Dr. Andreas Borchert
Christian Ehrhardt
Institut für Angewandte Informationsverarbeitung

Allgemeine Informatik III (WS 2006/2007)

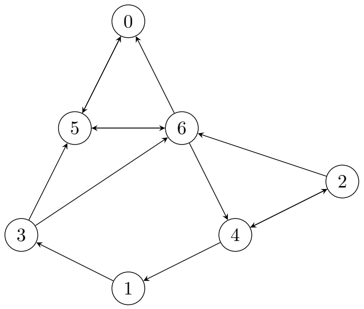
Abgabetermin 5.Dezember 2006

Breitensuche (7 Punkte)

In dieser Aufgabe wird ein Programm entwickelt, das in einem Graph die Länge des kürzesten Wegs vom Startknoten (bei uns immer der mit der Nummer 0) zu allen anderen Knoten berechnet. Für die Zwecke dieser Aufgabe besteht ein Graph aus N Knoten, die von 0 bis $N-1$ durchnumeriert sind. Von einem Knoten zu einem anderen kann es entweder eine direkte Verbindung der Länge 1 oder keine direkte Verbindung geben.
Achtung: Eine solche Verbindung funktioniert nur in eine Richtung, es kann also durchaus sein, daß man (wie im unten gezeigten Beispiel) von Knoten 3 über eine direkte Verbindung zu Knoten 5 kommen kann, aber nicht von Knoten 5 über eine direkte Verbindung zu Knoten 3. Natürlich ist es aber auch möglich, daß zwischen zwei Knoten je eine direkte Verbindung in die eine und eine in die andere Richtung gibt (im Beispiel zwischen den Knoten 5 und 6 der Fall).

Ein Beispielgraph

Die folgende Abbildung zeigt einen Graph mit 7 Knoten. Die Pfeilspitzen zeigen an, in welche Richtung die jeweiligen Kanten als direkte Verbindung zwischen Knoten benutzt werden können.



Wenn wir, wie immer in dieser Aufgabe, den Knoten 0 als Startknoten wählen, dann ergeben sich die folgenden Längen für die kürzesten Wege:

Nummer des Knotens	0	1	2	3	4	5	6
Länge des kürzesten Wegs von 0 aus	0	4	4	5	3	1	2

Beschreibung eines Graphen

Ein Graph wird durch folgende Informationen vollständig beschrieben:

- Die Anzahl N der Knoten im Graph (durchnumeriert beginnend bei 0)
- Eine $N \times N$-Matrix aus Nullen und Einsen, wobei der Eintrag an der Stelle (i, j) genau dann eine Eins ist, wenn es eine direkte Verbindung von Knoten i zu Knoten j gibt.

Eine solche Beschreibung des oben abgebildeten Graphen könnte also wie folgt aussehen:

```
7
0000010
0001000
0000101
0000011
0110000
1000001
1000110
```

Euer Programm soll eine solche Beschreibung eines Graphen von der Standardeingabe einlesen können.

Berechnung des kürzesten Wegs

Bei der Berechnung des kürzesten Weges geht man z.B. wie folgt vor:

- Eine Zahl, die als Abstand nicht vorkommen kann (z.B. die -1), wird für einen unendlichen Abstand reserviert. Am Ende hat ein Knoten von 0 den Abstand unendlich, wenn es keinen Pfad von Knoten 0 zu diesem Knoten gibt.
- Zu Beginn hat der Knoten 0 den Abstand 0 von Knoten 0 (wer hätte es gedacht). Alle anderen Knoten haben zu Beginn den Abstand unendlich von Knoten 0.
- In jedem Schritt wird ein Knoten gewählt, der von den bisher noch nicht gewählten Knoten den minimalen Abstand von Knoten 0 hat. Knoten mit Abstand unendlich können nicht ausgewählt werden. Damit wird jeder Knoten höchstens ein einziges Mal ausgewählt und im ersten Schritt kann nur der Knoten 0 gewählt werden, weil alle anderen den Abstand unendlich haben.
- Wurde ein Knoten gewählt, dann betrachtet man alle Nachbarknoten, die vom gewählten Knoten aus *über eine direkte Verbindung* erreichbar sind. Alle unter diesen Knoten, die bisher noch den Abstand unendlich haben, bekommen jetzt einen neue Abstand zugewiesen. Dieser Abstand ist um genau 1 größer, als der Abstand des gewählten Knoten.

- Es wird so lange ein neuer Knoten ausgewählt, bis jeder Knoten einmal gewählt wurde oder bis alle noch nicht gewählten Knoten den Abstand unendlich haben.

Für den oben gezeigten Graph würde der Algorithmus also wie folgt ablaufen:

	Abstand von 0 zu Knoten							
	0	1	2	3	4	5	6	gewählter Knoten
Schritt 0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0
Schritt 1	0	-1	-1	-1	-1	1	-1	5
Schritt 2	0	-1	-1	-1	-1	1	2	6
Schritt 3	0	-1	-1	-1	3	1	2	4
Schritt 4	0	4	4	-1	3	1	2	2 (nichts zu ändern!)
Schritt 5	0	4	4	-1	3	1	2	1
Schritt 6	0	4	4	5	3	1	2	3 (nichts zu ändern!)
Schritt 7	0	4	4	5	3	1	2	Ende

Der Weg selbst (3 Punkte)

Natürlich interessiert uns eigentlich nicht nur die Länge des kürzesten Wegs sondern auch ein möglicher kürzester Weg selbst. Zum Glück kann man diesen aus dem Graph und den Längen der kürzesten Wege wieder rekonstruieren. Dazu beginnt man beim Zielknoten und betrachtet alle Vorgänger, also alle Knoten, von denen es eine direkte Verbindung zum Zielknoten gibt. Einer dieser Knoten muß von Knoten 0 aus über einen Pfad erreichbar sein, der um 1 kürzer ist, als der kürzeste Pfad zum Zielknoten. Ein kürzester Pfad zum Zielknoten setzt sich dann aus diesem Pfad und der direkten Verbindung zusammen.
Ergänzen Sie Ihr Programm so, daß neben der Länge der kürzesten Wege auch noch die Wege selbst ausgegeben werden. Eine vollständige Ausgabe für das oben angegebene Beispiel könnte also wie folgt aussehen:

```
Dist from 0 to 0: 0  Path: 0
Dist from 0 to 1: 4  Path: 0 5 6 4 1
Dist from 0 to 2: 4  Path: 0 5 6 4 2
Dist from 0 to 3: 5  Path: 0 5 6 4 1 3
Dist from 0 to 4: 3  Path: 0 5 6 4
Dist from 0 to 5: 1  Path: 0 5
Dist from 0 to 6: 2  Path: 0 5 6
```

Hinweise

- Auf der Homepage der Vorlesung gibt es weitere Beispiele von Graphen. Selbstverständlich sollte Ihr Programm diese und andere Eingabebeispiele korrekt bearbeiten.
- Die Auswahl der Knoten erfolgt immer in der Reihenfolge, in der die Knoten "entdeckt" wurden (ein Knoten wird entdeckt, sobald sich sein Abstand von unendlich auf einen anderen Wert ändert). Man muß also im ersten Teil der Aufgabe nicht unbedingt in jedem Schritt alle Knoten nach einem noch nicht ausgewählten mit kürzestem Abstand durchsuchen, sondern kann sich die entdeckten aber noch nicht gewählten Knoten merken und in der selben Reihenfolge bearbeiten (auswählen).
- Der bei der Entdeckung eines neuen Knotens gerade ausgewählte Knoten ist ein zulässiger Vorgängerknoten auf dem kürzesten Weg von 0 zum gerade entdeckten Knoten. Diese Information kann im zweiten Teil bei der Rekonstruktion des Wegs nützlich sein.
- Voraussichtlich werden wir die Suche nach einem kürzesten Weg auf dem nächsten Blatt nochmals verwenden und dabei dieses Programm erweitern.