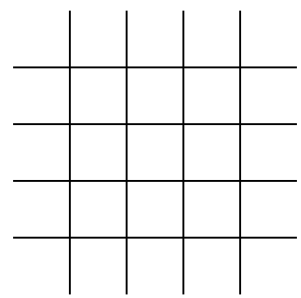
Zellen

Gegeben sei ein Raum und ein Gitter, das den Raum in gleichförmige und gleichgroße Zellen aufteilt.

Zellen

Gegeben sei ein Raum und ein Gitter, das den Raum in gleichförmige und gleichgroße Zellen aufteilt.

Beispiel: Der Raum ist der $\mathbb{R}^2$ und wir verwenden ein orthogonales Gitter, das die Ebene in Quadrate aufteilt:



Zustand einer Zelle

Jede Zelle hat einen Zustand.

Zustand einer Zelle

Jede Zelle hat einen Zustand.

Im einfachen Falle ist 0 oder 1, weiß oder schwarz.

Zustand einer Zelle

Jede Zelle hat einen Zustand.

Im einfachen Falle ist 0 oder 1, weiß oder schwarz.

Im allgemeineren Falle kann eine feste Zahl von Farben verwendet werden.

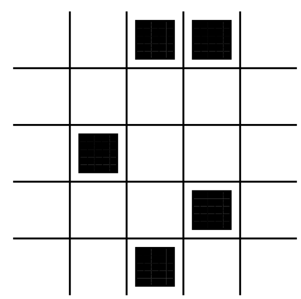
Zustand einer Zelle

Jede Zelle hat einen Zustand.

Im einfachen Falle ist 0 oder 1, weiß oder schwarz.

Im allgemeineren Falle kann eine feste Zahl von Farben verwendet werden.

Beispiel:



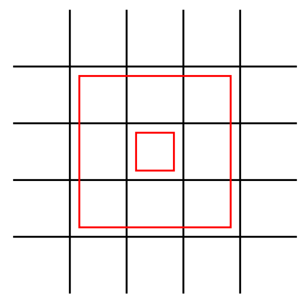
Nachbarschaft

Für jede gegebene Zellenaufteilung hat jede Zelle genau n Nachbarn.

Nachbarschaft

Für jede gegebene Zellenaufteilung hat jede Zelle genau n Nachbarn.

Beispiel: Im Falle von Quadrat-Zellen hat jede Zelle genau 8 Nachbarn:



Zellulärer Automat

Gegeben sei ein Raum, eine Zellenaufteilung und ein daraus folgendes Nachbarschaftsverhältnis, bei dem jede Zelle genau n Nachbarn hat. Die Zustandsmenge einer Zelle seien die ganzen Zahlen aus dem Intervall $[0..k-1]$.

Dann läßt sich eine Transitionsfunktion definieren, die in Abhängigkeit der Zustände aller Nachbarn und des Zustandes der zu betrachtenden Zelle deren neuen Zustand bestimmt.

Bei einer Transition des Automaten wird die Transitionsfunktion für alle Zellen gleichzeitig angewendet. Dabei ist zu beachten, daß die Transitionsfunktion jeweils den Zustand der Nachbarn vor deren Transition berücksichtigt.

Conways Game of Life

Gegeben ein Quadratgitter auf dem $\mathbb{R}^2$.

Die Zustände sind tot (weiß) und lebendig (schwarz).

Die Transitionsfunktion operiert in Abhängigkeit der Zahl der lebenden Nachbarn:

Tod: Wenn weniger als zwei Nachbarn oder mehr als 3 Nachbarn da sind, stirbt die Zelle.

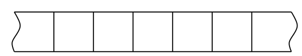
Überleben: Wenn genau zwei oder drei Nachbarn da sind, bleibt eine lebende Zelle weiter leben. Eine tote Zelle mit genau zwei Nachbarn bleibt weiterhin tot.

Geburt: Wenn genau 3 Nachbarn da sind und die eigene Zelle tot ist, wird die eigene Zelle in den Lebenszustand versetzt.

Zum Ausprobieren: http://hensel.lifepatterns.net/.

Elementare zelluläre Automaten

Zelluläre Automaten sind auch im eindimensionalen Falle sinnvoll. Im einfachsten Falle haben wir nur ein eindimensionales Band von Zellen, bei dem jede Zelle genau 2 Nachbarn hat.

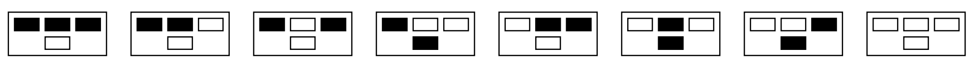


Wenn nur zwei Farben verwendet werden (weiß und schwarz), dann wird von elementaren zellulären Automaten gesprochen.

Beispiel I

Gegeben sei folgende Transitionsregel für einen elementaren zellulären Automaten: Nur wenn $genau$ eine Zelle von den beiden Nachbarschaftszellen und der eigenen Zelle schwarz ist, dann wird die eigene Zelle im nächsten Schritt schwarz. Ansonsten bleibt sie weiß.

Da es überschaubar nur 8 verschiedene Ausgangszustände bei der Transition einer einzelnen Zelle, läßt sich die Transitionsfunktion in der folgenden übersichtlichen Form darstellen:



Hier wird für jede Kombination von drei Zellen (Nachbarzellen einschließlich eingeschlossener Zelle) der zugehörige Funktionswert der Transitionsfunktion darunter angegeben.

Beispiel II

Angenommen, wir beginnen mit einem Ausgangszustand, bei dem nur eine einzige Zelle schwarz ist und alle anderen weiß sind:

Beispiel II

Angenommen, wir beginnen mit einem Ausgangszustand, bei dem nur eine einzige Zelle schwarz ist und alle anderen weiß sind:

Im nächsten Transitionsschritt bleibt dann die mittlere Zelle schwarz und die beiden Nachbarzellen wechseln von weiß auf schwarz:

Beispiel II

Angenommen, wir beginnen mit einem Ausgangszustand, bei dem nur eine einzige Zelle schwarz ist und alle anderen weiß sind:

Im nächsten Transitionsschritt bleibt dann die mittlere Zelle schwarz und die beiden Nachbarzellen wechseln von weiß auf schwarz:

Im darauffolgenden Schritt geht es nur am Rand des schwarzen Trios weiter, da im inneren Bereich immer mehr als eine Zelle schwarz ist:

Wieviele Automaten gibt es?

Es gibt nur endlich viele Transitionsfunktionen für eine gegebene Zellenaufteilung.

Bei n Nachbarn und k Farben gibt es nur k^{n+1} verschiedene Ausgangssituationen und k verschiedene Funktionswerte. Entsprechend ergeben sich daraus $k^{k^{n+1}}$ verschiedene Transitionsfunktionen und damit zelluläre Automaten.

Wieviele Automaten gibt es?

Es gibt nur endlich viele Transitionsfunktionen für eine gegebene Zellenaufteilung.

Bei n Nachbarn und k Farben gibt es nur k^{n+1} verschiedene Ausgangssituationen und k verschiedene Funktionswerte. Entsprechend ergeben sich daraus $k^{k^{n+1}}$ verschiedene Transitionsfunktionen und damit zelluläre Automaten.

Entsprechend gibt es nur $2^{2^3} = 256$ verschiedene elementare zelluläre Automaten.

Wieviele Automaten gibt es?

Es gibt nur endlich viele Transitionsfunktionen für eine gegebene Zellenaufteilung.

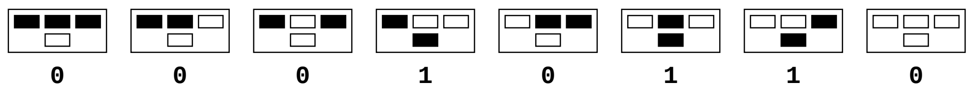
Bei n Nachbarn und k Farben gibt es nur k^{n+1} verschiedene Ausgangssituationen und k verschiedene Funktionswerte. Entsprechend ergeben sich daraus $k^{k^{n+1}}$ verschiedene Transitionsfunktionen und damit zelluläre Automaten.

Entsprechend gibt es nur $2^{2^3} = 256$ verschiedene elementare zelluläre Automaten.

Conways Game of Life ist nur eine Variante von $2^{2^9} = 2^{512}$ möglichen zellulären Automaten mit zwei Farben auf dem zweidimensionalen Gitter.

Identifizierung elementarer zellulärer Automaten

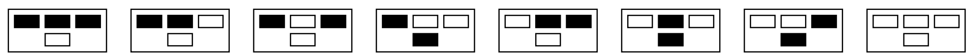
Da es nur 256 verschiedene gibt, lassen sie sich leicht nach folgendem Schema identifizieren:



Wenn weiß als 0 und schwarz als 1 kodiert wird, dann lassen sich entsprechende Binärziffern unter der Regel notieren. Das führt dann zur Binärzahl 00010110, die in das dezimale System konvertiert 22 ergibt.

Identifizierung elementarer zellulärer Automaten

Da es nur 256 verschiedene gibt, lassen sie sich leicht nach folgendem Schema identifizieren:



0 0 0 1 0 1 1 0

Wenn weiß als 0 und schwarz als 1 kodiert wird, dann lassen sich entsprechende Binärziffern unter der Regel notieren. Das führt dann zur Binärzahl 00010110, die in das dezimale System konvertiert 22 ergibt.

Zu beachten ist hier auch, daß die einzelnen Regeln nicht zufällig angeordnet sind, sondern entsprechend den Binärwerten der drei Nachbarzellen von 111 bis 000. Das niedrigstwertige Bit der Regelnummer gibt also den Funktionswert von 000 an, das nächste Bit spezifiziert den Funktionswert von 001 und so weiter bis zum höchstwertigen Bit, das den Funktionswert von 111 festlegt.

Geschichte zu den zellulären Automaten

Bereits in den 50er Jahren wurden zelluläre Automaten von von Neumann und anderen auf der Suche nach universellen Konstruktionswerkzeug betrachtet.

Geschichte zu den zellulären Automaten

Bereits in den 50er Jahren wurden zelluläre Automaten von von Neumann und anderen auf der Suche nach universellen Konstruktionswerkzeug betrachtet.

Ende der 60er Jahre entstand das "Game of Life" von John H. Conway, das nachhaltig populäre wurde durch die Kolumne von Martin Gardner in *Scientific American* (1970).

Geschichte zu den zellulären Automaten

Bereits in den 50er Jahren wurden zelluläre Automaten von von Neumann und anderen auf der Suche nach universellen Konstruktionswerkzeug betrachtet.

Ende der 60er Jahre entstand das “Game of Life” von John H. Conway, das nachhaltig populäre wurde durch die Kolumne von Martin Gardner in *Scientific American* (1970).

Unabhängig voneinander bewiesen Berlekamp, Conway, and Guy 1982 bzw. Gosper 1983, daß eine Turing-Maschine mit Hilfe des “Game of Life” gebaut werden kann.

Geschichte zu den zellulären Automaten

Bereits in den 50er Jahren wurden zelluläre Automaten von von Neumann und anderen auf der Suche nach universellen Konstruktionswerkzeug betrachtet.

Ende der 60er Jahre entstand das “Game of Life” von John H. Conway, das nachhaltig populäre wurde durch die Kolumne von Martin Gardner in *Scientific American* (1970).

Unabhängig voneinander bewiesen Berlekamp, Conway, and Guy 1982 bzw. Gosper 1983, daß eine Turing-Maschine mit Hilfe des “Game of Life” gebaut werden kann.

2002 wurde von P. Chapman eine entsprechende Turing-Maschine konstruiert.

Geschichte zu den zellulären Automaten

Bereits in den 50er Jahren wurden zelluläre Automaten von von Neumann und anderen auf der Suche nach universellen Konstruktionswerkzeug betrachtet.

Ende der 60er Jahre entstand das “Game of Life” von John H. Conway, das nachhaltig populäre wurde durch die Kolumne von Martin Gardner in *Scientific American* (1970).

Unabhängig voneinander bewiesen Berlekamp, Conway, and Guy 1982 bzw. Gosper 1983, daß eine Turing-Maschine mit Hilfe des “Game of Life” gebaut werden kann.

2002 wurde von P. Chapman eine entsprechende Turing-Maschine konstruiert.

Wolfram bewies 2002, daß eine Turing-Maschine auf Basis des elementaren zellulären Automaten mit der Nummer 110 gebaut werden kann.

Quelle

Als primäre Quelle über zelluläre Automaten dienten mir die hervorragenden Webseiten aus der Mathworld zu diesem Thema:

http://mathworld.wolfram.com/ElementaryCellularAutomaton.html