Berechnung einer KLV – Kurzeinführung

1 Sterbewahrscheinlichkeiten

Bei den Sterbewahrscheinlichkeiten wird zum einen nach dem Alter und zum anderen nach dem Geschlecht unterschieden. Die Betrachtung hier bezieht sich auf einen x-jährigen Mann, kann aber direkt auf eine y-jährige Frau übertragen werden.

q_x = P(genau x-Jähriger stirbt im Lauf des nächsten Jahres)
p_x = P(genau x-Jähriger erlebt den (x+1)ten Geburtstag)
$= 1 - q_x$
${}_np_x$ = P(genau x-Jähriger überlebt die nächsten n Jahre)
$= {}_{n-1}p_x \cdot p_{x+n-1} = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1}$

Alternative Darstellungsweise: Betrachte eine gewisse Anzahl Neugeborener (l_0) und deren (erwartete) Sterblichkeit über die Jahre hinweg.

l_x = erwartete Anzahl der im Alter x noch Lebenden.

Zusammenhang zwischen l, p, q:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{l_{x+1}}{l_x} \\ q_x &= 1 - p_x = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} =: \frac{d_x}{l_x} \\ {}_np_x &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \end{aligned}$$

1.1 Rechnerisches Höchstalter

Zur Vereinfachung beim Rechnen wird ein rechnerisches Höchstalter ω eingeführt (derzeit: $\omega = 110$):

$q_{110} = 1 \Leftrightarrow p_{110} = 0 \quad \Rightarrow \quad l_{111} = l_{112} = \ldots = 0$

2 Äquivalenzprinzip

Bei jeder Versicherung stehen den Beiträgen (im allgemeinen einmalig oder regelmäßig) Leistungsversprechen gegenüber, die bei Eintritt gewisser Bedingungen erbracht werden müssen. Beiträge wie Leistungen sind nicht sicher,

sondern Zufallsvariable, und werden zu verschiedenen Zeitpunkten fällig. Nach dem **Individualprinzip** soll daneben jeder Versicherungsvertrag „sich selbst tragen“, d.h. die erwarteten Beiträge die erwarteten Leistungen gerade decken. Daraus ergibt sich das sogenannte **Äquivalenzprinzip**:

Barwert der erwarteten Prämieneinnahmen = Barwert der erwarteten Leistungen

Die Abdiskontierung auf den aktuellen Zeitpunkt erfolgt mittels des sogenannten Rechnungszinses. Im folgenden wird die konventionelle Betrachtungsweise mit konstantem Rechnungszins von $i = 4\%$ unterstellt. Der Diskontfaktor ist damit $v = 1/1,04$.

3 Kapitalbildende Lebensversicherung (KLV)

Ein genau x-Jähriger schließt eine KLV mit einer Laufzeit von n Jahren und einer Versicherungssumme S ab:

Kapitalbildend: Erlebt er das Ende der Laufzeit, bekommt er die Versicherungssumme S ausbezahlt.

Lebensversicherung: Stirbt er vorher, wird die VS mit dem Tod fällig.

1. **Beiträge:** Zu Beginn eines jeden Versicherungsjahres zahlt der VN, sofern er noch lebt, die Versicherungsprämie P
2. **Leistungen:** Bei Tod innerhalb der Laufzeit zahlt der Versicherer zum Ende des Versicherungsjahres die VS aus. Bei Erleben des Laufzeitendes wird die VS ausbezahlt.

Zuerst: Betrachtung ohne Einrechnung von Kosten (Nettoprämie)

3.1 Barwert der Prämie P

$$\begin{aligned} \mathrm{BW}_P &= \mathrm{P} \cdot \sum_{i=1}^{n} P(\text{VN lebt zu Beginn des i-ten Vers.-Jahres}) \cdot \text{Diskontfaktor} \\ &= \mathrm{P} \cdot \sum_{i=1}^{n} {}_{i-1}p_x v^{i-1} = \mathrm{P} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} {}_ip_x v^i =: P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \end{aligned}$$

3.2 Barwert der Leistungen

Normiere hier die Leistungen zunächst auf S=1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{BW}_L &= \text{Todesfalleistung} + \text{Erlebensfalleistung} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(\text{VN stirbt im i-ten Vers.-Jahr}) \cdot \text{Diskontfaktor(nachschüssig)} + \\
&\quad P(\text{VN erlebt Laufzeitende}) \cdot \text{Diskontfaktor(n Jahre)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} {}_{i-1}p_x \cdot q_{x+i-1} \cdot v^i \;+\; {}_np_x v^n \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} {}_ip_x \cdot q_{x+i} \cdot v^{i+1} \;+\; {}_np_x v^n =: A_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}$$

3.3 Kommutationswerte

Zur Vereinfachung der Rechnungen wird häufig mit den sogenannten *Kommutationswerten* gerechnet, die für eine bestimmte Sterblichkeit und einen konstanten Zins einmal ausgerechnet und tabelliert werden.

$$D_i := l_i v^i \,;\; C_i := d_i v^{i+1}$$

heißen **abdiskontierte Lebende** bzw. **abdiskontierte Tote**.

$$N_x := \sum_{i=x}^{\omega-x} D_{x+i};\; M_x := \sum_{i=x}^{\omega-x} C_{x+i}$$

heißen **aufsummierte abdiskontierte Lebende** bzw. **aufsummierte abdiskontierte Tote**. Damit ergeben sich folgende Umformungen obiger Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{i=0}^{n-1} {}_ip_x \cdot v^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{l_{x+i}}{l_x} \cdot v^i \cdot \frac{v^x}{v^x} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{l_{x+i} \cdot v^{x+i}}{l_x \cdot v^x} \\
&= \frac{1}{D_x} \sum_{i=0}^{n-1} D_{x+i} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\
A_{x:\overline{n}|} &= {}_np_x \cdot v^n + \sum_{i=0}^{n-1} {}_ip_x \cdot q_{x+i} \cdot v^{i+1} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{l_{x+i}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+i}}{l_{x+i}} \cdot v^{i+1} \cdot \frac{v^x}{v^x} \\
&= \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d_{x+i} \cdot v^{x+i+1}}{l_x \cdot v^x} \\
&= \frac{D_{x+n} + \sum_{i=0}^{n-1} C_{x+i}}{D_x} = \frac{D_{x+n} + (M_x - M_{x+n})}{D_x}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich also das **Netto-Äquivalenzprinzip für eine KLV:**

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S \cdot A_{x:\overline{n}|}$$

4 Einrechnung von Kosten

Kosten werden als zusätzliche Leistungen betrachtet, die durch die Bruttoprämie gedeckt werden müssen. Die typischerweise verwendeten Kostenarten sind:

- Abschlußkosten
  - einmalig: zu Versicherungsbeginn. Bezugsgröße: Beitragssumme, $\alpha n P$
  - laufend: während Versicherungsdauer. Bezugsgröße: Versicherungssumme, $\alpha^\gamma S$
- Inkassokosten (pro Beitragszahlung). Bezugsgröße: Prämie βP
- allgemeine Verwaltungskosten (während Versicherungsdauer). Bezugsgröße: Versicherungssumme, γS

Typische Sätze sind: $\alpha \le 4\%$, $\alpha^\gamma \le 1\%_0$, $\beta \le 6\%$, $\gamma \le 6\%_0$

Äquivalenzprinzip: $P^B \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S A_{x:\overline{n}|} + \alpha n P + \beta P \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + (\alpha^\gamma + \gamma) S \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

$$\begin{aligned}
P^B(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \alpha n - \beta \ddot{a}_{x:\overline{n}|}) &= S A_{x:\overline{n}|} + (\alpha^\gamma + \gamma) S \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \\
P^B[(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \alpha n] &= S\big[A_{x:\overline{n}|} + (\alpha^\gamma + \gamma)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\big]
\end{aligned}$$

Sind $n, x, \alpha, \beta, \alpha^\gamma, \gamma, D_x, M_x, N_x$ gegeben, so kann in dieser Gleichung je nach Bedarf nach P^B oder S aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}
P^B &= S \cdot \frac{A_{x:\overline{n}|} + (\alpha^\gamma + \gamma)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \alpha n} \\
&= S \cdot \frac{\frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x} + (\alpha^\gamma + \gamma)\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}{(1-\beta)\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \alpha n}
\end{aligned}$$