K. Stadtmüller
C. Röscheisen

Wintersemester 2006/07
09.11.2006
Blatt 4

Übungen zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

(Abgabe: Do. 16.11.2006, 10:10 Uhr, H11)

1. Nachdem Heinrich dieses Jahr beim Einstein-Marathon nur faszinierter Zuschauer war, hat er sich nun vorgenommen, im nächsten Jahr selbst mitzulaufen. Daher beschließt er, in Zukunft täglich zu trainieren. Er möchte am ersten Tag 3 km laufen und sich dann jeden Tag um einen Kilometer steigern.
   Berechne mit Hilfe des Summenzeichens, wie viele Kilometer er nach den ersten zehn Trainingstagen in den Knochen haben wird. (2)

2. (a) Schreibe als Binomialkoeffizienten:

$$\frac{56 \cdot 55 \cdot 54}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30}{24}$$

   (b) Berechne:

$$\binom{257}{255}, \binom{468}{470}, \binom{1234}{0}$$

(5)

3. (a) Der Karnevalsverein eines kleinen Dorfs wählt einen neuen Vorstand. Man hatte sich vor langer Zeit einmal darauf geeinigt, dass es immer zwei gleichberechtigte Präsidenten geben soll und jedes Mitglied die Chance hat, gewählt zu werden. Wie viele verschiedene Wahlergebnisse sind möglich, wenn der Verein momentan 40 Mitglieder hat?

   (b) Im Hörsaal 14 mit 150 Plätzen nehmen 100 Studenten einen Platz ein. Wie viele verschiedene Sitzverteilungen gibt es, wenn nach Personen unterschieden wird?

   (c) Nach der Vorlesung gehen 10 hungrige Studenten zur Mensa. Dort werden 3 verschiedene Mittagessen angeboten. Wie viele verschiedene Kombinationen gibt es, wie die Studenten ihr Mittagessen auswählen können?

(6)

4. (a) Zeige das Additionstheorem für Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \;=\; \binom{n+1}{k}, \; n, k \in \mathbb{N},\; k \leq n$$

(b) Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \;=\; 0$$

(6)

5. Seien M eine beliebige, nichtleere Menge, $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$. Zeige:

$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B$$

(5)

6. Beweise durch vollständige Induktion:

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \;,\; \forall n \in \mathbb{N}$$

(7)

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) \;=\; n^2(n+1) \;,\; \forall n \in \mathbb{N}$$

(6)

7. Beweise oder widerlege:

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \;,\; \forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

(b) Für $b \geq a > 0$ gilt:

$$\frac{a}{b} \;\leq\; \frac{a+1}{b+1}$$

(c) Seien A, B und C beliebige Mengen. Dann gilt:

$$A \cap (B \cup C) \;=\; (A \cap B) \cup C$$

(7)

8. Zeige durch einen Widerspruchsbeweis, dass die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ für ungerade Zahlen a, b, c keine rationale Lösung x besitzt. (8)

Hinweis: Die Wurzel aus einer natürlichen Zahl ist entweder eine ganze oder aber eine irrationale Zahl.