

Übungen zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

(Abgabe: Do. 14.12.2006, 10:10 Uhr, H11)

1. (a) Zeige die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ mit Hilfe der Definition, das heißt, bestimme für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein N_ε , so dass gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon,$$

für

i.

$$a_n = \frac{3}{2n + n^4} + \frac{1}{n^2},$$

ii.

$$a_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 + n^2}.$$

(10)

- (b) Geben sie für die beiden Folgen aus (a) jeweils einen Index n an, ab welchem die Folgenterme einen Abstand von weniger als $\frac{1}{1000}$ vom Grenzwert haben. (3)

2. Untersuche die gegebenen Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(a)

$$a_n = \frac{6n^4 + 5n^2 - n}{3n^2(n + n^2 + 2)}$$

(b)

$$a_n = \frac{n^3 + 5 - 2n}{4n^3 - n^2 + n^4}$$

(c)

$$a_n = \frac{2 \cdot 4^n + 4 \cdot 2^n + (-1)^n}{4 \cdot 3^n - 4^n}$$

(d)

$$a_n = \frac{(-1)^n n^4}{(2n^2 + 3)^2}$$

(12)

3. Untersuche die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

auf Konvergenz.

(6)

4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ existieren folgende Grenzwerte?

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{1}{n} \right)^3,$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x-1} \right)^n,$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^2 + \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right)^{n^2}$$

Bestimme den jeweiligen Grenzwert. (13)

5. Beweise oder widerlege:

Die Summe zweier divergenter Folgen ist divergent. (3)

6. Beurteile durch Untersuchung der Folgen der induzierten Preise auf Konvergenz, ob die beiden Cobweb-Modelle aus Blatt 2, Aufgabe 2 stabil sind. (10)

7. Der Nikolaus verschnürt Päckchen und bindet sie aneinander.

Zu diesem Zweck hat er 100 m Schnur vorgesehen (aber noch weitere Schnur vorrätig). Nachdem er die 100 m Schnur verbraucht hat, stellt er fest, dass er noch nicht alle Päckchen aneinander gebunden hat und gibt daher noch einmal 50 m dazu. Als auch das nicht ausreicht, nimmt er weitere 25 m vom Schnur-Vorrat, usw. (das heißt, er gibt jedes Mal die Hälfte der vorhergehenden Schnurlänge dazu). Wie viele Meter Schnur benötigt der Nikolaus, wenn er diesen Vorgang

(a) insgesamt 8-mal wiederholt,

(b) bis in alle Ewigkeit fortsetzen würde?

(8)