Blatt 15, Aufgabe 1

Ansatz:

$$y = \frac{65}{1+ce^{-dx}} \overset{y\neq 0}{\iff} \frac{65}{y} = 1+ce^{-dx} \iff \ln\left(\frac{65}{y}-1\right) = -dx+\ln c$$

Mit $\tilde{y} := \ln\left(\frac{65}{y}-1\right), \tilde{c} := \ln c$:

$$\tilde{y} = -dx+\tilde{c} \qquad \text{(Lineare Regression)}$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	45	47	50	54	56
$\tilde{y}_i = \ln\left(\frac{65}{y_i}-1\right)$	-0,81093	-0,95978	-1,20397	-1,59109	-1,82813

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3\,, \quad \bar{\tilde{y}} = -1,27878$$

$$\overset{\text{Vorl.}}{\Longrightarrow} -d = \frac{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i\tilde{y}_i - \bar{x}\cdot\bar{\tilde{y}}}{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \bar{x}^2} \approx -0,2666$$

$$\tilde{c} = \frac{\bar{\tilde{y}}\cdot\left(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2\right) - \bar{x}\cdot\left(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i\tilde{y}_i\right)}{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \bar{x}^2} \approx -0,4791$$

$$\Longrightarrow d \approx 0,2666\,,\ c = e^{\tilde{c}} \approx 0,6193$$

$$\Longrightarrow y = \frac{65}{1+0,6193e^{-0,2666x}} \overset{!}{=} 60 \Leftrightarrow \frac{65}{60} = 1+0,6193e^{-0,2666x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{12}-1 = 0,6193e^{-0,2666x} \Leftrightarrow \frac{1/12}{0,6193} = e^{-0,2666x}$$

$$\Leftrightarrow -0,2666x = \ln\left(\frac{1}{12\cdot 0,6193}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(12\cdot 0,6193)}{0,2666} \approx 7,5234$$

$\Longrightarrow$ Die Gefährdungsgrenze wird voraussichtlich zwischen der 7. und 8. Messung überschritten.