K. Stadtmüller
C. Röscheisen

Wintersemester 2006/07
08.02.2007
Blatt 15

Übungen zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

(Besprechung: Mo. 12.02.2007, 14:15 Uhr, H14
und Do. 15.02.2007, 10:15 Uhr, H11)
- ohne Abgabe -

1. Eine Umweltschutzgruppe hat über einen Zeitraum von mehreren Monaten (Messperioden) die Konzentration (in Promille) eines Schadstoffes in der Umgebung einer Mülldeponie gemessen. Aus chemischen Untersuchungen ist dabei bekannt, dass dieser Stoff theoretisch eine maximale Konzentration von 65 Promille erreichen kann und Werte ab 60 Promille als gesundheitsschädlich einzustufen sind. Anhand der empirisch gewonnenen Daten soll nun untersucht werden, wann die Gefährdungsgrenze vorraussichtlich überschritten wird. Hierbei soll eine Regressionsfunktion der Form

$$f(x) = \frac{65}{1 + ce^{-dx}}$$

verwendet werden.

Periode x_i	1	2	3	4	5
Messwert y_i	45	47	50	54	56

Hinweis: Führe das Problem durch geeignete Umformungen und Logarithmieren auf lineare Regression zurück.

2. Es sei

$$F(x, y) = e^{\cos x \cdot \sin y} + x \cdot y\,.$$

Zeige, dass in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ durch $F(x, y) = 1$ eine Funktion $y(x)$ impliziert definiert wird.
Berechne $y'(x)$ und bestimme $y'(0)$.

3. Bestimme den minimalen Abstand der Parabel $y(x) = x^2 - 4$ zum Ursprung

   (a) mit der Einsetzmethode.

   (b) mit der Lagrange-Methode.

Hinweis: Der Abstand d zweier Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist definiert durch

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

4. Einfaches Marktmodell:
   Es seien folgende Angebots- und Nachfragefunktionen gegeben:

$$q^S(p) \;=\; 2p - 30,\; q^D(p) \;=\; -3p + 75\,.$$

   (a) Bestimme das (statische) Marktgleichgewicht.
   (b) Stelle die Differenzengleichung für die Folge $(p_t)_{t=0}^{\infty}$ der Preise im Sinne des Cobweb-Modells mit Startwert $p_0 = 30$ auf.
   (c) Überprüfe das Modell auf Stabilität.
   Hinweis:
   Bestimme dazu zunächst die Lösung der in (b) aufgestellten Differenzengleichung.

5. Beweise den *binomischen Satz* durch vollständige Induktion:

$$(1+x)^n \;=\; \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

   Hinweis: Hier darf das in den Übungen bewiesene *Additionstheorem für Binomialkoeffizienten* verwendet werden:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \;=\; \binom{n+1}{k}, \quad n, k \in \mathbb{N},\; k \leq n$$

6. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge

$$a_n \;=\; \left(\frac{2x-3}{3x+2}\right)^n \quad ?$$

   Gib für diese Fälle den Grenzwert an.

7. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   (a)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(k-1)!}{k^{2k}}$$

   (b)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k(k-1)(2+k^2)}{2k^4 - k^2 + 1}$$

8. Bestimme folgende Grenzwerte:

   (a)
   $$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sin(\pi x)}$$

   (b)
   $$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\frac{\pi}{4} - x}$$

9. (a) Herbert zahlt ab Januar 2006 zwei Jahre lang zu Beginn jedes Monats 80 € auf ein Konto ein. Anschließend lässt er das Konto unberührt. In welchem Jahr wird das Guthaben auf 2.500 € angewachsen sein, wenn die jährliche Verzinsung (mit Zinseszins) während dieser Zeit immer 2 % beträgt?

   (b) Viktor will bei einem gleichbleibenden Zinssatz (jährliche Verzinsung mit Zinseszins) von 3 % ab 2007 jährlich jeweils zu Jahresbeginn 2.000 € auf sein Konto einzahlen.
   Bis zu welchem Jahr (einschließlich) muss er diesen Betrag einzahlen, um anschließend (d.h. ab dem darauffolgenden Jahr) 12 Jahre lang jeweils am Jahresende (nach der Zinsgutschrift) einen Betrag von 3.000 € abheben zu können?

10. Untersuche die Funktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 3x^3 - 2x^2 + x - 1 & , \; x \leq 1 \\ x^3 - 2x^2 + 3x - 1 & , \; x > 1 \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit

11. Bestimme die Nullstellen, sämtliche lokalen und absoluten Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \; f(x) \;=\; \sin(tx)\,, \; t \neq 0$$

in Abhängigkeit von t.

12. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \; f(x,y,z) \;=\; \frac{xy^4}{z^2} + (x+z)^3 - y^3$$

auf Homogenität.

13. Bestimme und klassifiziere die lokalen Extremstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) \;=\; x^2 - 2y + xy - x\,.$$

14. Berechne alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion

$$f(x,y,z) \;=\; z^2 e^x + \ln z \cdot \sin y - y^x \quad , \quad y,z > 0\,.$$

15. Die Produktionskosten eines Betriebs seien durch

$$K(x) \;=\; x^2 - 30x + 500$$

gegeben.

(a) Wie hoch ist die prozentuale Änderung ungefähr, wenn die Produktion von $x = 50$ um 1 % erhöht wird?

(b) Um wie viele Einheiten ändern sich die Kosten ungefähr, wenn die Produktion von $x = 50$ um 1 Einheit erhöht wird?

16. Bestimme die Extremstellen der Funktion

$$f(x,y,z) \;=\; x - xy + 2z^2$$

unter der Nebenbedingung $x + y + z = 8$.
Bei Verwendung der Lagrange-Methode genügt es, die Kandidaten für Extremstellen zu berechnen.

17. Beweise oder widerlege:

(a) Jedes Polynom vom Grad $n = 7$ hat (mindestens) eine reelle Nullstelle.

(b) Jede differenzierbare Funktion ist homogen.