Lösungen zum Wiederholungsblatt vom 21.12.2006

1.
$$q^S(p) = 5p - 4, \;\; q^D(p) = 121 - 20p$$

(a) Bestimme das Marktgleichgewicht:

$$q^S(p^E) = q^D(p^E) \;\Leftrightarrow\; 5p^E - 4 = 121 - 20p^E \;\Leftrightarrow\; 25p^E = 125 \;\Leftrightarrow\; p^E = 5$$

$$q^E = q^S(p^E) = 5 \cdot 5 - 4 = 21$$

$\Longrightarrow$ Marktgleichgewicht: $E = \{(q^E, p^E)\} = \{(21, 5)\}$

(b) Cobweb: $q_{t+1} = q^S(p_t)\,,\; p_{t+1} = p^D(q_{t+1})$

$$q^D(p) = 121 - 20p \;\Leftrightarrow\; p^D(q) = \frac{121}{20} - \frac{1}{20}\,q$$

$$\Longrightarrow q_{t+1} = q^S(p_t) = 5p_t - 4$$
$$p_{t+1} = p^D(q_{t+1}) = \frac{121}{20} - \frac{1}{20}\,q_{t+1} = \frac{121}{20} - \frac{1}{20} \cdot (5p_t - 4) = -\frac{1}{4}p_t + \frac{25}{4}$$

Die Differenzengleichung für die Folge $(p_t)_{t=0}^{\infty}$ der Preise lautet also:

$$p_{t+1} = -\frac{1}{4}p_t + \frac{25}{4}\,,\; p_0 = 2$$

(c) Die Lösung der Differenzengleichung aus (b) ist:

$$p_t = \left(p_0 - \frac{25/4}{5/4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^t + \frac{25/4}{5/4} = -3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^t + 5 \;\overset{(t\to\infty)}{\longrightarrow}\; 5\,,\text{ da } |-\frac{1}{4}| < 1$$

$\Longrightarrow$ Das Modell ist stabil

2. Zu zeigen: $2^n > 3n\,,\; \forall\, n \geq 4, n \in \mathbb{N}$

Induktion über n:

Induktionsanfang: $n = 4$

$$2^4 = 16 > 12 = 3 \cdot 4 \quad \surd$$

Induktionsannahme: $2^n > 3n$ gilt für **ein** $n \geq 4$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$2^{n+1} \;=\; 2 \cdot 2^n \;\overset{I.A.}{>}\; 2 \cdot 3n \;=\; 3n + 3n \;>\; 3n + 3 \;=\; 3(n+1) \quad \surd$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}}_{\to e^{-x}}\cdot\sin\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{\pi}{2}}_{\to\frac{\pi}{2}}\right)\right) \overset{\sin\text{ stetig}}{=} e^{-x}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-x}$$

4. Zunächst Ratensparen mit nachschüssiger Verzinsung
$\Rightarrow$ Kapital am Ende des n-ten Jahres:

$$R_n = R\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

mit $R = 1.000, q = 1,05$

Von diesem Kapital, das zu Beginn des (n+1)-ten Jahres vorhanden ist, sollen 15 Jahre lang jeweils am Jahresende 1.200 € abgehoben werden (Rentenformel mit $P = R_n$).

$$\Longrightarrow \quad R_n\cdot q^{15} - A\cdot\frac{q^{15}-1}{q-1} \geq 0 \quad (\text{mit } A = 1.200)$$

$$\Longleftrightarrow \quad R_n\cdot q^{15} \geq A\cdot\frac{q^{15}-1}{q-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad R\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\cdot q^{15} \geq A\cdot\frac{q^{15}-1}{q-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad q^n \geq \frac{A}{R}\cdot\frac{q^{15}-1}{q^{15}}+1$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{\ln q}\cdot\ln\left(\frac{A}{R}\cdot\frac{q^{15}-1}{q^{15}}+1\right) = \frac{1}{\ln 1,05}\cdot\ln\left(1,2\cdot\frac{1,05^{15}-1}{1,05^{15}}+1\right) \approx 9,92$$

$$\overset{n\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} n = 10$$

$\Longrightarrow$ Hedwig muss bis Ende des Jahres 2015 einzahlen, damit ihr Plan aufgeht.

5. (a) Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)(k-1)}{2k^5+k^3-k^2}$?

Es gilt:

$$\left|\frac{k(k+1)(k-1)}{2k^5+k^3-k^2}\right| = \left|\frac{(k+1)(k-1)}{2k^4+k^2-k}\right| = \frac{k^2-1}{2k^4+k^2-k}$$
$$\leq \frac{k^2}{2k^4+k^2-k} \leq \frac{k^2}{2k^4} = \frac{1}{2k^2}$$

Nach Vorlesung konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$\Longrightarrow$ Mit dem Majorantenkriterium folgt damit die Konvergenz der Reihe

(b) Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(k^2+1)(k+1)(k-1)}{k^3(k+2)}$?

Es gilt:

$$\frac{2(k^2+1)(k+1)(k-1)}{k^3(k+2)} = \frac{2k^4-2}{k^4+2k^3} = \frac{2-\frac{2}{k^4}}{1+\frac{2}{k}} \xrightarrow{(k\to\infty)} 2 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ Das notwendige Kriterium für die Konvergenz einer Reihe ist nicht erfüllt, somit konvergiert die Reihe nicht.

(c) Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{k+2}}{k!}$?

1. Möglichkeit:

Mit $a_k = \frac{5^{k+2}}{k!}$ gilt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{5^{k+3}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{5^{k+2}}\right| = \frac{5}{k+1} \xrightarrow{(k\to\infty)} 0 < 1$$

$\Longrightarrow$ Mit dem Quotientenkriterium folgt damit die Konvergenz der Reihe

2. Möglichkeit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{k+2}}{k!} = 5^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!} = 25 \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} - 1\right) = 25 \cdot \left(e^5 - 1\right)$$

$\Longrightarrow$ Die Reihe konvergiert

6.
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 1 \\ x^3 - x^2 - x - 2 & , \quad 1 < x < 2 \\ x^2 - 3x + 2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

(i) $x_0 = 1$:
Betrachte Folge (x_n) mit $x_n \to 1\,(n \to \infty)$ und $x_n < 1$

$$\Rightarrow \; f(x_n) = 0 \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Betrachte Folge (x_n) mit $x_n \to 1\,(n \to \infty)$ und $x_n > 1$ ($x_n < 2$ für große n)

$$\Rightarrow \; f(x_n) = x_n^3 - x_n^2 - x_n - 2 \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} -3$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert nicht $\quad \Longrightarrow f$ ist unstetig an $x_0 = 1$

(ii) $x_0 = 2$:
Betrachte Folge (x_n) mit $x_n \to 2\,(n \to \infty)$ (dann ist $x_n > 1$ für große n)

$$\Rightarrow \; f(x_n) = \left\{ \begin{array}{ll} x_n^3 - x_n^2 - x_n - 2 & , \quad 1 < x_n < 2 \\ x_n^2 - 3x_n + 2 & , \quad x_n \geq 2 \end{array} \right\} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

$\Longrightarrow f$ ist stetig an $x_0 = 2$

(iii) Für $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$ ist f stetig, da Polynome stetige Funktionen sind.

7. Zu zeigen:

Sei $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0\,, a_k \neq 0$ ein Polynom ungeraden Grades (also k ungerade). Dann gilt im Fall $a_k > 0$

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$$

und falls $a_k < 0$:

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = \infty$$

Da Polynome immer stetig sind, folgt in beiden Fällen mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ gibt mit $p(x) = 0$, also die Behauptung.