Prof. Dr. V. Schmidt/Dipl. math. oec. J. Wiedmann

WS 98/99
Blatt 1
15.10.1998

Übungen zu Statistik II

(Abgabe: Mittwoch, den 21.10.1998, vor den Übungen)

1. Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariable mit $\mathrm{E}(X_i) = \mu_i$ und $\mathrm{Var}(X_i) = 1$. Sei $Y := \sum_{i=1}^n X_i^2$, d.h. $Y \sim \mathcal{X}^2_{n,\lambda}$ mit $\lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i^2$. Zeigen Sie:

   a) Die Momenterzeugende Funktion von Y ist gegeben durch
   $$M(t) = \mathrm{E}(\exp(tY)) = (1-2t)^{-n/2} \exp\left(\frac{t\lambda}{1-2t}\right), \quad t < \frac{1}{2}$$
   (3)

   b) $\mathrm{Var}(Y) = 2n + 4\lambda$ (2)

2. $\{X_n\}, \{Y_n\}, n \in \mathbb{N}$ seien zwei Folgen von Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

   a) $(X_n - Y_n) \xrightarrow{p} 0, Y_n \xrightarrow{d} Y \Longrightarrow X_n \xrightarrow{d} Y$ (3)

   b) $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{p} 0 \Longrightarrow X_n Y_n \xrightarrow{p} 0$ (2)

   c) $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{p} c, c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

      (i) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$ (2)

      (ii) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$ (2)

      (iii) $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$ falls $c \neq 0$ (2)

3. Zeigen Sie:
   $$\lim_{m\to\infty} F_{m,n,\lambda}(x) = \left(1 - \mathcal{X}^2_n\left(\frac{n}{x}\right)\right) I_{(0,\infty)}(x), \quad \lambda > 0$$
   (5)

4. Gegeben sei ein lineares Modell $Y = X + \epsilon$, wobei
   $$\mathrm{E}(\epsilon) = 0, \quad \mathrm{Cov}(\epsilon) = \sigma^2 I, \quad \sigma^2 > 0, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad rg(X) = 2.$$

   a) Zeigen Sie: Die Kleinst-Quadrate-Schätzer für β_1 bzw. β_0 sind
   $$\hat\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar x)(Y_i - \bar Y)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar x)^2}, \text{ bzw. } \hat\beta_0 = \bar Y - \hat\beta_1 \bar x.$$
   (4)

   b) Die letzten 10 Jahre wurden die Gewinne eines Unternehmens aufgezeichnet (in 1000 DM). Man erhielt folgende Meßreihe:

Jahr (t_i)	'88	'89	'90	'91	'92	'93	'94	'95	'96	'97
Gewinn (X_i)	74	78	81	96	107	110	120	127	133	142

   Berechnen Sie unter Zugrundelegung obigen Modells und dem Ansatz aus a) die Schätzungen für β_0 und β_1. Führen Sie ebenfalls einen graphischen Vergleich der Werte (t_i, X_i) und $(t_i, \hat\beta_0 + \hat\beta_1 t_i), i = 1, \cdots, 10$ durch. (4)