Prof. Dr. V. Schmidt/J. Wiedmann

WS 98/99
Blatt 10
16.12.1998

Übungen zu Statistik II

(Abgabe: Mittwoch, den 23.12.1998, vor den Übungen)

1. F sei symmetrisch bzgl. m (d.h. mit $X \sim F$ gilt $(X-m) \stackrel{d}{=} -(X-m)$).

   a) Zeigen Sie: Für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt: $F^{-1}(\alpha) = 2m - F^{-1}(1-\alpha+0)$, d.h. es ist $\mathrm{med}(F) = m$. (4)

   b) Zeigen Sie:

   $$m = \frac{1}{1-2\alpha}\int_\alpha^{1-\alpha} F^{-1}(t)dt, \quad \alpha \in (0,1)$$

   (5)

2. Beweisen Sie die Aussage von Proposition 2.4.7:

   a) Ist $0 < p < 1$, so ist

   $$\gamma_p(\hat{F}_n) = \begin{cases} X^{([np]+1)} & \text{für } np \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(X^{([np])} + X^{([np]+1)}\right) & \text{für } np \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (4)

   b) Es ist

   $$\gamma_{\frac{3}{4}}(\hat{F}_n) - \gamma_{\frac{1}{4}}(\hat{F}_n) = \begin{cases} X^{([\frac{3n}{4}]+1)} + X^{([\frac{n}{4}]+1)} & \text{für } \frac{n}{4} \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(X^{([\frac{3n}{4}])} + X^{([\frac{3n}{4}]+1)} - X^{([\frac{n}{4}])} - X^{([\frac{n}{4}]+1)}\right) & \text{für } \frac{n}{4} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (3)

3. Beweisen Sie folgende Aussage der Proposition 2.4.8: Es sei $(X_1, ..., X_n)$ eine einfache Zufallsstichprobe einer Zufallsvariablen X mit absolut stetiger Verteilungsfunktion F und Dichte f. Zeigen Sie, daß durch:

   $$f_M(x) = \begin{cases} \frac{2(2m)!}{(m-1)!^2}\int_x^\infty [F(2x-u)]^{m-1}[1-F(u)]^{m-1}f(2x-u)f(u)du & \text{für } n = 2m \\ \\ \frac{(2m+1)!}{(m)!^2}F(x)^m(1-F(x))^m f(x) & \text{für } n = 2m+1 \end{cases}$$

   eine Dichte des Medians gegeben ist ($x \in \mathbb{R}$). (5)

4. Beweisen Sie die Aussage von Proposition 2.4.9 :

   Es sei F eine stetige Verteilungsfunktion, $p \in (0,1)$ und F^{-1} sei stetig in p. Dann ist :

   $$P\left(X^{(i)} \le \gamma_p(F) \le X^{(j)}\right) = \sum_{k=i}^{j-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad 1 \le i < j \le n.$$

   (4)