Prof. Dr. V. Schmidt/J. Wiedmann

WS 98/99
Blatt 11
23.12.1998

# Übungen zu Statistik II

(Abgabe: Mittwoch, den 13.01.1999, vor den Übungen)

1. $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F$. Zeigen Sie, daß $\hat{F}_n^{-1}(p) \xrightarrow{f.s.} F^{-1}(p)$ i.a. falsch ist, falls $F^{-1}$ nicht stetig ist. (4)

2. Beweisen Sie folgende Aussagen von Proposition 2.5.1: Es sei $F$ stetig. Dann gilt

   a) Ist $r = (r(i)) \in \mathcal{G}_n$, so ist $P\left(R_i(\underline{X}) = r(i) \quad \forall i = 1, \ldots, n\right) = \frac{1}{n!}$ (2)

   b) $P\left(R_j(\underline{X}) = k\right) = \frac{1}{n}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ (1)

   c) $\mathrm{E}(R_j(\underline{X})) = \frac{n+1}{2}$ (1)

   d) $\mathrm{Var}(R_j(\underline{X})) = \frac{n^2-1}{12}$ (1)

3. $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion $F$. Mit $W_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{F}_n(x) - F(x))^2 dF(x)$ ist die sog. Cramer-von-Mises Statistik gegeben. Zeigen Sie:

$$W_2^n = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left(F(X^{(i)}) - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 \quad \text{P-f.s.}$$

   . (6)

4. Seien $U_1, \ldots, U_n$ unabhängige auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Die Anderson-Darling-Statistik ist dann durch

$$AD_n = \int_0^1 \frac{\alpha_n^2(t)}{t(1-t)}dt \quad \text{mit} \quad \alpha_n(t) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\{U_i \le t\}} - t\right), \quad 0 \le t \le 1,$$

   gegeben. Zeigen Sie:

   a) Es gilt folgende für die Berechnung nützliche Identität:

$$AD_n = -n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\left(\ln(U^{(j)}) + \ln(1 - U^{(n+1-j)})\right).$$

   (4)

   b) $\mathrm{E}(\alpha_n(t)) = 0$ und $\mathrm{Cov}(\alpha_n(t_i), \alpha_n(t_j)) = t_i(1-t_j)$ für $t_i \le t_j$. (2)

5. Gegeben seien folgende Daten :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5.12 | 3.60 | 4.51 | 5.39 | 4.09 |
| 6.82 | 7.35 | 5.44 | 4.14 | 3.75 |
| 4.00 | 5.20 | 4.78 | 5.35 | 3.82 |

Nehmen Sie an, daß es sich dabei um die Realisierung einer einfachen Zufallsstichprobe zu einem Merkmal mit stetiger Verteilung $F$ handelt.

a) Testen Sie $H_0 : F(x) = Exp_{0.15}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ vs. $H_1 : F(x) \neq Exp_{0.15}(x) \quad \exists x \in \mathbb{R}$ mit dem Anpassungstest von Kolmogorov-Smirnov zum Niveau $\alpha = 0.05$. (4)

b) Plotten Sie die zugehörige empirische Verteilungsfunktion sowie die hypothetische Verteilungsfunktion unter $H_0$ in ein Schaubild. (3)