Prof. Dr. V. Schmidt/J. Wiedmann

WS 98/99
Blatt 12
13.01.1999

Übungen zu Statistik II

(Abgabe: Mittwoch, den 20.01.1998, vor den Übungen)

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen von Lemma 3.1.4.
   Sei $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_r) \sim M_{n,p_1,\ldots,p_r}$. Zeigen Sie:

   a) Die charakteristische Funktion von $\underline{X}$ lautet:

   $$\phi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \left(\sum_{j=1}^{r} p_j e^{it_j} \right)^n .$$

   (3)

   b) (i) $\mathrm{E}(\underline{X}) = n(p_1, \ldots, p_r)$ (2)

   (ii) $\mathrm{Cov}(\underline{X}) = n(p_j \delta_{jk} - p_j p_k)_{j,k=1,\ldots,r} =: C_r$. (2)

   c) $rg(C_r) = r - 1$, falls $p_i > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, r$. (2)

   d) Sei $C^\star_{r-1} := (p_j \delta_{jk} - p_j p_k)_{j,k=1,\ldots,r-1}$, wobei $p_i > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, r$ und $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ gilt. Zeigen Sie:

   $$rg(C^\star_{r-1}) = r - 1 \text{und } (C^\star_{r-1})^{-1} = (\frac{\delta_{ij}}{p_i} + \frac{1}{p_r})_{i,j=1,\ldots,r-1}$$

   (5)

2. Der durch botanische Vererbungsversuche berühmt gewordene Biologe Gregor Mendel erhielt bei einem Kreuzungsversuch mit Erbsen folgendes Resultat:

315	runde gelbe Erbsen,
108	runde grüne Erbsen,
101	kantige gelbe Erbsen,
32	kantige grüne Erbsen.

   Widerspricht dieses Ergebnis seiner Theorie, nach der sich die vier Zahlen wie 9 : 3 : 3 : 1 verhalten müßten ($\alpha = 0.05$) ? (5)

3. Bei einem Spiel wurden 42 Studenten aufgefordert, eine ganze Zahl zwischen 0 und 9 zu nennen. Das Ergebnis dieser Befragung ist in folgender Tabelle dargestellt:

Zahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
# der Nennungen	5	4	6	5	4	3	1	7	2	5

   a) Überprüfen Sie, ob diese Daten einer auf $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ gleichverteilten Grundgesamtheit enstammen können.($\alpha = 0.05$). (3)

   b) Bei einem 2. Spiel sollte jeder der Studenten eine ganze Zahl aus $[0, 9]$ so wählen, daß sie dem aus dem 1.Spiel bestimmten Wert von $\frac{2}{3}\overline{X}$ möglichst nahe kommt. Hierbei kam folgendes Ergebnis zustande:

Zahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
# der Nennungen	1	5	11	11	6	5	0	0	1	1

   Testen Sie auch diese Daten auf die $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$-Gleichverteilung ($\alpha = 0.05$). (3)