Prof. Dr. V. Schmidt/Dipl. math. oec. J. Wiedmann

WS 98/99
Blatt 2
21.10.1998

Übungen zu Statistik II

(Abgabe: Mittwoch, den 28.10.1998, vor den Übungen)

1. Beweisen Sie folgende Aussagen der Proposition 1.1.9:

   a) Es sei $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \mathcal{C})$, $A \in M(m,n;\mathbb{R})$und $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt: $A\underline{X} + \underline{b} \sim \mathcal{N}(A\underline{\mu} + \underline{b}, ACA^T)$ (2)

   b) Sind $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_m$ unabhängige n-dim. Zufallsvektoren mit $\underline{X}_i \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}_i, C_i)$ für $i = 1, \ldots, m$, dann gilt

   $$\sum_{j=1}^{m} \underline{X}_j \sim \mathcal{N}\left(\sum_{j=1}^{m} \underline{\mu}_j, \sum_{j=1}^{m} C_j\right)$$

   (2)

2. Beweisen Sie den Satz 1.1.11. Es sei $\underline{Y} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, C)$. Ist $C \in M(n,n,\mathbb{R})$ positiv definit, so ist durch

   $$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{detC}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{\mu} - \underline{x})^T C^{-1} (\underline{\mu} - \underline{x})\right), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}$$

   eine Dichte zu $\mathcal{N}(\underline{\mu}, C)$ gegeben. (4)

3. Sei $A \in M(n,n;\mathbb{R})$ symmetrisch, $\underline{X} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{E}(\underline{X}) = \underline{\mu}$. Zeigen Sie:

   $$\mathrm{E}(\underline{X}^T A \underline{X}) = \underline{\mu}^T A \underline{\mu} + sp(AC)$$

   (4)

4. Gegeben sei ein Zufallsvektor $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

   a) Es gelte $\underline{X} \sim \mathcal{N}\left((1, 7, -5)^\top, I\right)$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\frac{1}{2}X_1^2 + X_2^2 + \frac{1}{2}X_3^2 - X_1X_3$. (3)

   b) Es gelte $\underline{X} \sim \mathcal{N}\left(\underline{0}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 2X_1X_2 - 2X_1X_3 - 2X_2X_3$. (3)

5. Beweisen Sie die Behauptung aus Satz 1.1.17 b). Seien A_1 und $A_2 \in M(n,n;\mathbb{R})$ symmetrische Matrizen. Ferner sei $\underline{X} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, C)$ und $C \in M(n,n;\mathbb{R})$ sei positiv definit. Dann gilt:
   Ist $A_1CA_2 = 0$, so sind $\underline{X}^T A_1 \underline{X}$ und $\underline{X}^T A_2 \underline{X}$ unabhhängige Zufallsgrößen. (6)