Prof. Dr. V. Schmidt/Dipl. math. oec. J. Wiedmann

WS 98/99
Blatt 3
28.10.1998

Übungen zu Statistik II

(Abgabe: Mittwoch, den 04.11.1998, vor den Übungen)

1. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine einfache Zufallsstichprobe mit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0, n > 1$. Zeigen Sie unter Verwendung der Theorie der quadratischen Formen:

   a) $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$ sind stochastisch unabhängig. (4)

   b) Mit $\mu = 0$ gilt: $\bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$ und $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$ (4)

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $\underline{X}$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit $\mathrm{E}(\underline{X}) = \underline{\mu}$ und $\mathrm{Cov}(\underline{X}) =: C$. Zeigen Sie:

   Ist $\underline{X} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, C)$ dann gilt: $\mathrm{Cov}\left(\underline{X}, \underline{X}^\top A \underline{X}\right) = 2CA\underline{\mu}$. (4)

   (Verwenden Sie ohne Beweis, daß die 3. Momente von $(\underline{X} - \underline{\mu})$ gleich 0 sind).

3. Beweisen Sie die Aussagen von Lemma 1.2.3. Es seien $X_{ij}, j = 1, \ldots, n_i, i = 1, \ldots, m$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ für $j = 1, \ldots, n_i, i = 1, \ldots, m$. Dann gilt im Falle $\sigma > 0$

   a) $\frac{1}{\sigma^2} SQI \sim \mathcal{X}^2_{n-m}$ mit $SQI = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2$. (3)

   b) $\frac{1}{\sigma^2} SQZ \sim \mathcal{X}^2_{m-1,\lambda}$ mit $\lambda = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m} n_i(\mu_i - \bar{\mu})^2$, $\bar{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i \mu_i$ und $SQZ = \sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2$. (3)

   c) SQI und SQZ sind unabhängig. (3)

4. Zur Untersuchung der Intelligenz von Studenten der Fachrichtungen WiWi (I), Medizin (II), Germanistik (III) und Mathematik (IV) wurden aus jeder dieser vier Fachrichtungen einer Universität einige Studenten zufällig ausgewählt und ihr IQ-Wert bestimmt.

Fachrichtung	IQ-Wert	n_i
I	99, 131, 118, 112, 128, 136, 120, 107, 134, 122	10
II	134, 103, 127, 121, 139, 114, 121, 132	8
III	120, 133, 110, 141, 118, 124, 111, 138, 120	9
IV	117, 125, 140, 109, 128, 137, 110, 138, 127, 141, 119, 148	12

   Plotten Sie als ersten Anhaltspunkt für das Vorliegen des Modells der einfaktoriellen Varianzanalyse in jeder der Faktortiefen ($i = 1, \ldots, r = 4$) die Residuen $\hat{\epsilon}_{ij} = X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot}, j = 1, \ldots, n_i$ gegen den Stichprobenumfang n_i. (5)