Prof. Dr. V. Schmidt/J. Wiedmann

WS 98/99
Blatt 4
04.11.1998

Übungen zu Statistik II

(Abgabe: Mittwoch, den 11.11.1998, vor den Übungen)

1. Im Modell der einfaktoriellen Varianzanalyse sind die geschätzten Residuen gegeben durch $\hat{\varepsilon}_{ij} = X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot}$. Zeigen Sie unter der Annahme der Unabhängigkeit der Residuen ε_{ij} mit $\mathrm{E}(\varepsilon_{ij}) = 0$ und $\mathrm{Var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2 \ \forall i, j$ folgende Eigenschaften:

   a) $\mathrm{E}(\hat{\varepsilon}_{ij}) = 0$ (1)

   b) $\mathrm{Var}(\hat{\varepsilon}_{ij}) = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$ (3)

   c) $\mathrm{Cov}(\hat{\varepsilon}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{sl}) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq s \\ \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) & \text{für } i = s \text{ und } j = l \\ -\frac{\sigma^2}{n_i} & \text{für } i = s \text{ und } j \neq l \end{cases}$ (3)

2. Legen Sie dieser Aufgabe die Daten von Blatt 3, Aufgabe 4 zugrunde. Zunächst soll untersucht werden, ob die Voraussetzungen des Models der einfaktoriellen Varianzanalyse erfüllt sind.

   a) Testen Sie unter der Annahme $X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$, $\varepsilon_{ij} \sim F$, ε_{ij} unabhängig, die Hypothesen
   $$H_0 : F \in \left\{N(0, \sigma^2), \sigma^2 > 0\right\} \text{ vs. } H_1 : F \notin \left\{N(0, \sigma^2), \sigma^2 > 0\right\}$$
   mit dem modifizierten $\mathcal{X}^2$-Anpassungstest von Pearson ($\alpha = 0.1$). (Verwenden Sie: $MSQI = \frac{1}{n-r} SQI$ als Schätzer für σ^2). (4)

   b) Überprüfen Sie, ob von Varianzhomogenität ausgegangen werden kann ($\alpha = 0.05$) mit

      (i) dem Bartlett-Test. (3)

      (ii) dem modifizierten Levene-Test, (3)

   c) Testen Sie unter Zugrundelegung des Modells der einfaktoriellen Varianzanalyse
   $$X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, i = 1, \ldots, 4, j = 1, \ldots, n_i,$$
   ob es signifikante Unterschiede zwischen den Faktorstufen bezüglich des Intelligenzquotienten gibt ($\alpha = 0.05$). (5)

   d) Geben Sie ein zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall für σ^2 an. (1)

3. Es seien $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen; $W = \max\limits_{1 \leq i \leq n} Y_i - \min\limits_{1 \leq i \leq n} Y_i$ bezeichne die Spannweite von $\underline{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}^\top$. Ferner sei $\nu \in \mathbb{N}$ und $\hat{\sigma}$ ein Schätzer für σ, der von W unabhängig ist und welcher $\frac{\nu\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_\nu$ erfüllt.

   a) Bestimmen Sie die Dichte $f_{\min\limits_i Y_i, \max\limits_i Y_i}(x, y)$. (2)

   b) Bestimmen Sie die Dichte der Spannweite W. (3)

   c) Berechnen Sie die Dichte $f_{W/\hat{\sigma}}(x) =: q_{n,\nu}(x)$ der studentisierten Spannweite $\frac{W}{\hat{\sigma}}$. (3)