Prof. Dr. V. Schmidt/J. Wiedmann

WS 98/99
Blatt 7
25.11.1998

Übungen zu Statistik II

(Abgabe: Mittwoch, den 02.12.1998, vor den Übungen)

1. Gegeben Sei das folgende Modell der zweifaktoriellen Varianzanalyse mit Einfachbelegung und Berücksichtigung von multiplikativer Wechselwirkung:

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + D\alpha_i\beta_j + \varepsilon_{ij}$$

$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ unabhängig, $i = 1, ..., I$, $j = 1, ..., J$ und $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = \sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0$. Bestimmen Sie den Kleinstquadrateschätzer für D unter der Annahme, daß die Parameter μ, α_i, β_j $\forall i, j$ bekannt sind. (5)

2. X_1 und X_2 seien unabhängige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktionen F_1 und F_2, wobei F_1 auf $\mathbb{R}$ stetig sei. Zeigen Sie:

$$P(X_1 = X_2) = 0$$

(4)

3. Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen und $\hat{F}_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,z]}(X_i)$ die empirische Verteilungsfunktion. Zeigen Sie:

   a) $\mathrm{E}(\hat{F}_n(z)) = F(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$ (1)

   b) $Cov\left(\hat{F}_n(z_1), \hat{F}_n(z_2)\right) = \frac{1}{n}F(z_1)(1 - F(z_2)), \quad z_1 < z_2.$ (4)

4. Gegeben seien folgende Eruptionslängen des Old-Faithful-Geysirs in Minuten:

   3.51 3.54 4.45 3.36 3.05 5.60 4.45 2.47 4.35 4.63

   a) Berechnen Sie die zugehörigen Realisierungen von D_{10}^{+}, D_{10}^{-} und D_{10} unter der Annahme, daß es sich hierbei um eine Stichprobe zum Merkmal X mit $X \sim N(4, 1)$ handelt. (4)

   b) Berechnen und plotten Sie die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_{10}(z)$ basierend auf obigen Daten und die $N(4,1)-$Verteilungsfunktion in ein gemeinsames Schaubild. Machen Sie hierbei auch die berechneten Werte von D_{10}^{+}, D_{10}^{-} und D_{10} kenntlich. (4)

5. Sei $(X_1, ..., X_n)$ eine einfache Stichprobe zu einem Merkmal X, welches eine stetige Verteilung F_X mit der Dichte f_X besitze. $(X^{(1)}, ..., X^{(n)})$ bezeichne die zu dieser Stichprobe gehörende Ordnungsstatistik. Zeigen Sie, daß für die gemeinsame Dichte der Ordnungsstatistik gilt:

$$f_{X^{(1)},...,X^{(n)}}(y_1, ..., y_n) = n! \cdot \prod_{i=1}^{n} f_X(y_i) \cdot I_B(y_1, ..., y_n).$$

wobei $B = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_1 < z_2 < \ldots < z_n\}$. (5)