Prof. Dr. V. Schmidt/J. Wiedmann

WS 98/99
Blatt 9
09.12.1998

Übungen zu Statistik II

(Abgabe: Mittwoch, den 16.12.1998, vor den Übungen)

1. Beweisen Sie die Aussage von Proposition 2.3.10: Es ist

$$\sup_{0<s<1}\left(\hat{G}_n(s)-s\right) \stackrel{d}{=} \sup_{0<s<1}\left(s-\hat{G}_n(s)\right),$$

   d.h., ist F stetig, so gilt $D_n^+ \stackrel{d}{=} D_n^-$. (5)

2. Gegeben sei eine einfache Zufallsstichprobe $(X_1,\ldots,X_n)$ mit $X \sim F$. Berechnen Sie $\mathrm{E}(X^{(r)})$, $\mathrm{Var}(X^{(r)})$, $\mathrm{Cov}(X^{(r)},X^{(s)}), r,s \in \{1,\ldots,n\}, r<s$ für

   a) $F = U(0,1)$ (3)

   b) $F = Exp(1)$ (3)

3. Beweisen Sie die Aussage von Proposition 2.4.3: Sei $(X_1,...,X_n)$ eine einfache Zufallsstichprobe mit $X_i \sim Exp(1)$, ferner gelte $X^{(0)} = 0$. Dann gilt

   a) $X^{(1)}, X^{(2)} - X^{(1)}, ..., X^{(n)} - X^{(n-1)}$ sind unabhängig (2)

   b) $(n-i+1)\cdot\left(X^{(i)} - X^{(i-1)}\right) \sim Exp(1) \quad \forall i = 1,..,n$ (2)

   c) $X_n^{(s)} - X_n^{(r)} \stackrel{d}{=} X_{n-r}^{(s-r)} \quad$ für $1 \le r < s \le n$. (2)

4. $X_1,...,X_n$ beschreiben die Strahlungsdauer von n gleichartigen Atomen eines radioaktiven Isotops. Nehmen Sie an, es gelte:

$$X_i \sim Exp(\theta) \quad i.i.d., \quad i = 1,\ldots,n, \quad \theta > 0.$$

   a) Berechnen Sie die Halbwertszeit h, für die gilt:

$$P(X_i > h) = \frac{1}{2}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

   (2)

   b) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung für ein Mol des bei dem Reaktorunfall von Tschernobyl freigesetzten Cäsiums Cs^{137} mit einer Halbwertszeit von 37 Jahren, d.h.

$$\mathrm{E}(X^{(n)}) \text{ sowie } \sqrt{\mathrm{Var}(X^{(n)})}.$$

   (3)

   Hinweis:

   - Ein Mol von Cs^{137} besteht aus ungefähr $6 \cdot 10^{23}$ Atomen.
   - Benutzen Sie zur Berechnung die folgenden Approximationen:

$$\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \approx \frac{\log n}{\theta} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2} \approx \frac{\pi^2}{6}.$$