Prof. Dr. U. Jensen/ Dipl.-Math. T. Herberts

SS 2001
Blatt 1
23.04.2001

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastische Prozesse

(Abgabe: Donnerstag, den 26.04.2001, vor den Übungen)

1. Welches der folgenden Mengensysteme ist eine σ-Algebra auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$?

   (a) $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset\}$
   (b) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$
   (c) $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \Omega\}$
   (d) $\mathcal{F}_4 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$

   (3)

2. Ein Mengensystem $\mathcal{M}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt **monotone Klasse**, falls für jede Folge $\{A_n\}$ mit $A_n \in \mathcal{M}$ und $A_n \uparrow A$ oder $A_n \downarrow A$ folgt, dass $A \in \mathcal{M}$. Zeigen Sie, dass für eine Algebra $\mathcal{F}$ in Ω gilt:

   $$\mathcal{F} \text{ ist } \sigma - \text{Algebra in } \Omega \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ ist monotone Klasse in } \Omega\,.$$

   (5)

3. Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben. Die **symmetrische Differenz** $A \triangle B$ zweier Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ ist durch $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ erklärt. Zeigen Sie:

   $$\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)\,.$$

   (2)

4. Zeigen Sie, dass für jede in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definierte Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Ereignissen $A_n \in \mathcal{F}$ folgende Ungleichungen gelten:

   (i) $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n)$
   (ii) $\limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n)\,.$

   (5)