U. Jensen/ T. Herberts

SS 2001
Blatt 10
12.7.2001

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastische Prozesse

(keine Abgabe)

In allen Aufgaben ist $(B_t), t \in \mathbb{R}_+$, eine Brownsche Bewegung auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.

1. Für $a > 0$ sei $\tau_a = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : B_t = a\}$ und

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} B_t & \text{für } t \leq \tau_a, \\ a - (B_t - a) = 2a - B_t & \text{für } t > \tau_a, \end{cases}$$

d.h. $(\tilde{B}_t)$ erhält man, indem man (B_t) für $t > \tau_a$ an der Geraden $y = a$ spiegelt. Zeigen Sie, daß $(\tilde{B}_t)$ ebenfalls eine Brownsche Bewegung ist.
Hinweis: Betrachten Sie

$$\begin{aligned} Y_t &= B_t \quad (0 \leq t \leq \tau_a) \text{ und} \\ Z_t &= B_{t+\tau_a} - B_{\tau_a} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

und benutzen Sie (ohne Beweis), daß (Z_t) eine Brownsche Bewegung unabhängig von (Y_t) ist (*starke Markov-Eigenschaft* der Brownschen Bewegung).

2. Berechnen Sie mit Hilfe der ersten Aufgabe $P(B_t \geq a | \tau_a \leq t)$, wobei τ_a in Aufgabe 1 definiert ist. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser bedingten Wahrscheinlichkeit die Dichte von τ_a und zeigen Sie, daß τ_a fast sicher endlich ist.

3. Berechnen Sie mit Aufgabe 2 die Verteilung von

$$M_t = \sup\{B_u : 0 \leq u \leq t\}.$$

4. (Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß) Es sei $X_t = e^{-t} B_{e^{2t}}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie:

$$Cov(X_u, X_{u+s}) Cov(X_{u+s}, X_{u+s+t}) = Cov(X_u, X_{u+s+t})$$

für alle $u \geq 0$.