U. Jensen/ T. Herberts

SS 2001
Blatt 2
26.4.2001

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastische Prozesse

(Abgabe: Donnerstag, den 3.5.2001, vor den Übungen)

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine nichtnegative Zufallsvariable. Zeigen Sie:

   (a) $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t$ (3)

   (b) $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{a} \int_{\{X \geq a\}} X \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(X), \quad a > 0.$ (3)

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen und $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[X_i | S_n] = \mathbb{E}[X_j | S_n] = \frac{S_n}{n}\,.$$

(4)

3. Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\{a, b, c\}, \wp(\{a, b, c\}), \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{2} \text{ und } \mathbb{P}(\{b\}) = \mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{4}.$$

   Auf Ω sei die Zufallsvariable X definiert durch

$$X(a) = 1 \text{ und } X(b) = X(c) = 2.$$

   Berechnen Sie $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2)$ und $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{A}_2)|\mathcal{A}_1)$ für

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\} \text{ und} \\ \mathcal{A}_2 &= \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \Omega\}. \end{aligned}$$

   Gilt $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{A}_2)|\mathcal{A}_1)$? (5)