U. Jensen/ T. Herberts

SS 2001
Blatt 3
3.5.2001

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastische Prozesse

(Abgabe: Donnerstag, den 10.5.2001, vor den Übungen)

1. Es sei $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ seien Sub-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{F}$ und $Y_i = E(X|\mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie:

$$E((X - Y_2)^2) + E\left((Y_2 - Y_1)^2\right) = E\left((X - Y_1)^2\right)$$

und somit

$$||X - Y_2||_2 \leq ||X - Y_1||_2.$$

(2)

2. X, Y seien integrierbare Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ eine Sub-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Zeigen Sie:

   a) Ist Y $\mathcal{A}$-meßbar und XY integrierbar, so folgt $E(XY|\mathcal{A}) = YE(X|\mathcal{A})$ f.s. (3)

   b) Für eine weitere σ-Algebra $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ gilt:

   $$E(E(X|\mathcal{A})|\tilde{\mathcal{A}}) = E(X|\tilde{\mathcal{A}}) = E(E(X|\tilde{\mathcal{A}})|\mathcal{A}) \text{ f.s.}$$

   (2)

   c) Sind $\sigma(X)$ und $\mathcal{A}$ unabhängige σ-Algebren, dann folgt $E(X|\mathcal{A}) = E(X)$ f.s. (2)

   d) Es seien $X_n \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in I\!N$. Falls $0 \leq X_n \uparrow X$ f.s., dann folgt

   $$0 \leq E(X_n|\mathcal{A}) \uparrow E(X|\mathcal{A}) \text{ f.s.}$$

   (2)

3. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

   a) Zeigen Sie, daß mit einer Sub-σ-Algebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{F}$ gilt:

   $$E(XE(Y|\mathcal{A})) = E(YE(X|\mathcal{A})) \text{ f.s.}$$

   (2)

   b) Beweisen Sie: Wenn $E(X|Y) = Y$ f.s. und $E(Y|X) = X$ f.s., dann folgt $X = Y$ f.s. (2)

4. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ((0,1), \mathcal{B}, \lambda)$ sei die Zufallsvariable $X(\omega) = \sin(\pi\omega)$ gegeben. Bestimmen Sie $E(X|\mathcal{A})$ für die σ-Algebra

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq (0,1) : A \text{ oder } A^C \text{ ist höchstens abzählbar}\}.$$

(3)