U. Jensen/ T. Herberts

SS 2001
Blatt 4
10.5.2001

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastische Prozesse

(Abgabe: Donnerstag, den 17.5.2001, vor den Übungen)

1. Im folgenden sei $(Y_n), n \in I\!N$, eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, und die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), n \in \mathbb{N}$, sei gegeben durch
$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n).$$
   a) Für zwei Dichtefunktionen f und g sei $(X_n), n \in I\!N$, die Folge der Likelihoodquotienten
   $$X_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{f(Y_k)}{g(Y_k)}, \quad n \in I\!N.$$
   Zeigen Sie, daß (X_n) ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}$ ist, falls die Y_k identisch verteilt sind mit Dichte g und $E|Y_1| < \infty$. Geben Sie weiterhin eine Filtration an, bezüglich der (X_n) kein Martingal bildet. (4)
   b) Beweisen Sie, daß die durch
   $$X_n = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} Y_k - \frac{n}{2}\right\}$$
   definierte Folge (X_n) ein $\mathbb{F}$-Martingal ist, falls die Y_k alle standardnormalverteilt sind. (3)
   c) Es sei $E(Y_k) = 0$ und $Var(Y_k) = \sigma_k^2 < \infty$ für alle k. Zeigen Sie, daß die durch
   $$X_n = \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$
   gegebene Folge ein $\mathbb{F}$-Martingal bildet. (3)

2. In einer Urne befinden sich zum Zeitpunkt 0 eine schwarze und eine weiße Kugel. Zu jedem Zeitpunkt $n \in I\!N$ wird aus der Urne zufällig (d.h. jede Kugel wird mit derselben Wahrscheinlichkeit gezogen) eine Kugel entnommen und die Farbe der Kugel festgestellt. Anschließend wird die Kugel zusammen mit einer weiteren Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Die Zufallsvariable B_n bezeichne die Anzahl der schwarzen Kugeln, die sich zum Zeitpunkt n (nach Ziehen und Zurücklegen) in der Urne befinden, abzüglich der ersten schwarzen Kugel. Zeigen Sie, daß die Folge $(X_n), n \in I\!N$, mit
$$X_n = \frac{B_n + 1}{n + 2}$$
ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n) = (\sigma(X_1, \ldots, X_n))$ ist. (3)

3. (X_n), $n \in I\!N$, sei ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n), n \in I\!N$, mit endlichen zweiten Momenten $E(X_n^2) < \infty$. Zeigen Sie für die Zuwächse $Y_n = X_n - X_{n-1}$ (mit $X_0 := 0$): Für $n, m \in I\!N$ gilt
$$E(Y_n) = 0, \ \ Cov(Y_n, Y_{n+m}) = 0$$
und somit
$$Var(X_n) = \sum_{k=1}^{n} Var(Y_k)\,.$$
(3)