U. Jensen/ T. Herberts

SS 2001
Blatt 5
17.5.2001

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastische Prozesse

(Abgabe: Donnerstag, den 31.5.2001, vor den Übungen)

Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind freiwillig und ergeben Zusatzpunkte.

1. (X_n), $n \in \mathbb{N}$, sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $S = \{0, 1\}$. Weiter seien ρ und τ Stoppzeiten bezüglich der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Überprüfen Sie, ob folgende Zufallsvariablen Stoppzeiten bezüglich $\mathbb{F}$ sind:

   a) $\inf\{n : X_n = 1\}$;

   b) $\rho - \tau$;

   c) $S = \begin{cases} 3, & \text{falls } X_2 = 0, \\ 1, & \text{falls } X_2 = 1; \end{cases}$

   d) $T = \begin{cases} 5, & \text{falls } X_4 = 0, \\ 7, & \text{falls } X_4 = 1. \end{cases}$

   (4)

2. Es sei $(Y_n), n \in I\!N$, eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit

   $$P(Y_i = 1) = p \text{ und } P(Y_i = -1) = q = 1 - p$$

   für $i \geq 1$. $(S_n), n \in I\!N_0$, sei definiert durch $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ und $S_0 = 0$.

   a) Zeigen Sie: Für jede Stoppzeit τ mit $E(\tau) < \infty$ gilt

   $$E(S_\tau) = (p - q)E(\tau).$$

   (Hinweis: Zeigen Sie, daß $(S_n - n(p - q))$ ein Martingal ist.) (4)

   b)* Es seien $a, b \in I\!N$ und $p = q = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie mit Hilfe des Optional Stopping Theorems, angewandt auf das Martingal (S_n), die Wahrscheinlichkeit dafür, daß S_n den Zustand $-a$ vor dem Zustand b erreicht. Betrachten Sie dazu die Stoppzeit

   $$T = \inf\{n : S_n = -a \text{ oder } S_n = b\}.$$

   Dabei können Sie $E(T) < \infty$ voraussetzen. (4)

   c)* Wenden Sie das Optional Stopping Theorem für $p = q = \frac{1}{2}$ auf $(S_n^2 - n)$ an und berechnen Sie damit den Erwartungswert von T. (5)

3. $(Y_n), n \in I\!N_0$, sei eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $Y_i \sim N(0, 1)$. Weiterhin sei $X_n = \sum\limits_{i=0}^{n} Y_i$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), n \in I\!N_0$, mit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \ldots, Y_n)$.

   a) Zeigen Sie, daß (Z_n), $n \in I\!N_0$, mit $Z_n := e^{\theta X_n}$, $\theta > 0$, ein $\mathbb{F}$-Submartingal ist, und berechnen Sie $E(Z_n)$. (3)

   b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a):

   $$P(\sup_{0 \leq i \leq n} X_i > c) \leq \exp\left(-\frac{c^2}{2(n+1)}\right).$$

   (Hinweis: Minimieren Sie die Schranke in θ.) (4)