U. Jensen/ T. Herberts

SS 2001
Blatt 6
11.6.2001

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastische Prozesse

(Abgabe: Donnerstag, den 21.6.2001, vor den Übungen)

1. (Doob-Zerlegung) Es sei $X = (X_n), n \in I\!N_0$, ein integrierbarer Prozeß, der an eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), n \in I\!N_0$, adaptiert ist. Zeigen Sie: X besitzt eine Zerlegung
$$X_n = X_0 + A_n + M_n,$$
wobei $M = (M_n)$ ein $\mathbb{F}$-Martingal mit $M_0 = 0$ ist und A ein vorhersagbarer Prozeß mit $A_0 = 0$, und diese Zerlegung ist P-f.s. eindeutig.
(Hinweis: A_n erhält man über $E(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A_{n-1}$.) (5)

2. Es sei (X_n), $n \in I\!N_0$, ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n), n \in I\!N_0$, mit $X_0 = 0$, und $Y_n = X_n - X_{n-1}$ sei die zugehörige Martingaldifferenzenfolge. Zeigen Sie: (X_n) konvergiert fast sicher, falls $\sum_{k=1}^{\infty} E(Y_k^2) < \infty$ gilt. (4)

3. $(X_n), n \in I\!N$, sei ein Supermartingal bezüglich einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), n \in I\!N$, welches zu einem Supermartingal $(X_n), n \in I\!N \cup \{\infty\}$, fortgesetzt werden kann mit $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n \in I\!N} \mathcal{F}_n)$. Zeigen Sie, daß $(X_n), n \in I\!N$, fast sicher konvergiert.
(Hinweis: Wenden Sie Doob's Konvergenzsatz auf $Y_n := E(X_\infty|\mathcal{F}_n)$ und auf das nichtnegative Supermartingal $Z_n := X_n - Y_n$ an.) (4)

4. Zeigen Sie: Eine Familie $\mathcal{X}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist gleichgradig integrierbar, falls ein $p > 1$ existiert mit
$$\sup_{X \in \mathcal{X}} E(|X|^p) < \infty.$$
(3)