U. Jensen/ T. Herberts

SS 2001
Blatt 7
21.6.2001

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastische Prozesse

(Abgabe: Donnerstag, den 28.6.2001, vor den Übungen)

1. Gegeben sei eine gleichgradig integrierbare Familie $\mathcal{X}$ von Zufallsvariablen. Zeigen Sie: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für $A \in \mathcal{F}$ gilt: Aus $P(A) \leq \delta$ folgt $\int_A |X| dP \leq \epsilon$ für alle $X \in \mathcal{X}$. (2)

2. Es sei $(X_n), n \in \mathbb{N}$, eine Folge von integrierbaren Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

   a) Es existiert ein X mit $X_n \stackrel{p}{\to} X$, und (X_n) ist gleichgradig integrierbar.

   b) Es existiert ein $X \in L(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $X_n \stackrel{L^1}{\to} X$. (8)

3. Es sei $(X_n), n \in \mathbb{N}$, eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen und $\mathcal{A}$ die zugehörige Tail-σ-Algebra. Zeigen Sie: Falls eine Zufallsvariable Y $\mathcal{A}$-meßbar ist, existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so daß $P(Y = y) = 1$ gilt. (2)

4. $(N_t), t \in \mathbb{R}_+$, sei ein Poisson-Prozeß mit Rate λ und $S_1 = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t = 1\}$. Zeigen Sie, daß für $0 < s < t$ gilt:
$$P(S_1 < s | N_t = 1) = \frac{s}{t}.$$
   Benutzen Sie dabei die Formel
$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$
   und die Unabhängigkeit von N_s und $N_t - N_s$. (4)