U. Jensen/ T. Herberts

SS 2001
Blatt 8
28.6.2001

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastische Prozesse

(Abgabe: Donnerstag, den 5.7.2001, vor den Übungen)

1. Gegeben seien zwei unabhängige Poisson-Prozesse (N_t) und (M_t) mit Rate λ bzw. μ und Ankunftszeiten $S_i = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t = i\}$ bzw. $X_i = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : M_t = i\}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwischen zwei Ankunftszeitpunkten S_i und S_{i+1} von (N_t) genau ein Ankunftszeitpunkt von (M_t) liegt.
   Hinweis: Für zwei Zufallsvariablen Y, Z mit $Z \sim F$ gilt
   $$P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(Y \leq y | Z = z) dF(z).$$
   (4)

2. Zeigen Sie: Ist (N_t), $t \in \mathbb{R}_+$, ein Poisson-Prozeß, dann besitzt die bedingte Verteilung der Zufallsvariablen $S_1, \ldots, S_{N_t}$ bei gegebenem $N_t = n$ die Dichte
   $$f : (s_1, \ldots, s_n) \to \begin{cases} \frac{n!}{t^n} & \text{für } 0 < s_1 < \ldots < s_n < t, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
   Hinweis: Berechnen Sie
   $$\frac{P(s_i < S_i \leq s_i + h_i, i = 1, \ldots, n | N_t = n)}{h_1 \cdot \ldots \cdot h_n}$$
   und lassen Sie $h_i \to 0$ gehen, $i = 1, \ldots, n$. (5)

3. Unabhängig von einem Poisson-Prozeß $(N_t), t \in \mathbb{R}_+$, mit Rate λ wird eine Münze geworfen. Ein neuer Prozeß (X_t) wird auf folgende Weise definiert: Zeigt die Münze Wappen, so wird $X_t = (-2)^{N_t}$ gesetzt, zeigt sie Zahl, dann ist $X_t = (-2)^{N_t+1}$. Skizzieren Sie eine typische Trajektorie von (X_t) und bestimmen Sie die endlichdimensionalen Verteilungen des Prozesses (X_t). (4)

4. Es sei N ein homogener Poisson-Prozeß mit unbekannter Rate λ. Um λ zu schätzen, wird N bis zum Zeitpunkt t beobachtet. Berechnen Sie die Likelihoodfunktion von $N_s, 0 \leq s \leq t$, d.h. die gemeinsame Dichte von N_t und $S_1, \ldots, S_{N_t}$, und damit den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ. (3)