U. Jensen/ T. Herberts

SS 2001
Blatt 9
5.7.2001

Übungen zu
Wahrscheinlichkeitstheorie/Stochastische Prozesse

(Abgabe: Donnerstag, den 12.7.2001, vor den Übungen)

In allen Aufgaben ist $(B_t), t \in \mathbb{R}_+$, eine Brownsche Bewegung.

1. Zeigen Sie, daß die stochastischen Prozesse $B_t(i)$, $i = 1, 2$, definiert durch

$$\begin{aligned} B_t(1) &= cB_{\frac{t}{c^2}}, \quad c \neq 0\,, \\ B_t(2) &= B_{t+a} - B_a, \quad a > 0\,, \end{aligned}$$

   ebenfalls Brownsche Bewegungen sind. (4)

2. Sei $c \in \mathbb{R}$ und $X_t = \exp(cB_t - \frac{c^2}{2}t)$. Zeigen Sie, daß $(X_t), t \in \mathbb{R}_+$, ein Martingal bezüglich der natürlichen Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ ist. (3)

3. Für $0 \leq t \leq 1$ sei $Z_t = B_t - tB_1$ ((Z_t) heißt *Brownsche Brücke*). Berechnen Sie die Kovarianzfunktion von (Z_t). (1)

4. a) Zeigen Sie mit Hilfe der gemeinsamen Dichte von B_s und B_t, daß die bedingte Verteilung von B_s gegeben $B_t = y$ gleich der Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu = \frac{s}{t}y$ und Varianz $\sigma^2 = \frac{s(t-s)}{t}$ ist. (4)

   b) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil a) $E(B_sB_t|B_1 = 0)$ für $s, t \in [0, 1]$.
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst $E(B_sB_t|B_1) = E(B_tE(B_s|B_t)|B_1)$. (3)