Prof. Dr. U. Jensen
H. Höfling 6. Juni 2002

Übungen zu Wirtschaftsstatistik

Sommersemester 2002
Blatt 6
Abgabe am 18.6.2002 vor den Übungen

1. Man hat das Höhenwachstum von Tomatenpflanzen gemessen. Dabei wurden die Pflanzen unter vergleichbaren Bedingungen gezogen, lediglich das verwendete Düngemittel variierte. Dabei hat man die folgenden Ergebnisse ermittelt: (in cm)

Dünger 1	Dünger 2	Dünger 3
75	60	80
65	57	87
78	62	-
80	-	-

Dabei sei Y_{ij} die j-te Beobachtung bei Behandlung mit dem i-ten Düngemittel und genüge dem Modell

$$Y_{ij} = \beta_i + \varepsilon_{ij}, \quad E(\varepsilon_{ij}), \quad E(\varepsilon_{ij}^2) = \sigma^2$$

wobei die Fehlervariablen voneinander unabhängig seien.

(a) Formulieren Sie das zugehörige lineare Modell. (2)

(b) Bestimmen Sie alle möglichen Werte für β_1, β_2 und β_3, so daß die folgenden Funktionen minimiert werden. Hierbei ist $e = Y - \hat{Y}$ und $\hat{Y} = X\hat{\beta}$.

i. $Q(Y, \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$. Stellen Sie hierzu auch die Normalgleichungen auf. (3)

ii. $Q(Y, \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} |e_i|$. (3)

iii. $Q(Y, \hat{\beta}) = \max_{1 \leq i \leq n} |e_i|$. (Aufgabe optional) (3)

2. In einem Labor untersucht man die Wachstumsgeschwindigkeit von Bakterienkulturen. Hierzu wurde bei einer Kultur zu verschiedenen Zeitpunkten die von den Bakterien bedeckte Fläche gemessen. Hierbei ergaben sich die folgenden Werte (Zeit in Stunden, Fläche in mm^2):

Zeit (x)	0,5	1	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21	24
Fläche (y)	0,6	0,7	0,9	1,3	1,85	3,4	6,6	12,4	23,0	62	170	430	1100

Es wird ein exponentielles Wachstum unterstellt, also $f(\beta_0, \beta_1, x) = \beta_0 e^{\beta_1 x}$

(a) Finden Sie eine linearisierende Transformation. Stellen Sie das lineare Modell auf. (3)

(b) Bestimmen Sie KQS für β_0, β_1. Bestimmen Sie die Schätzwerte für die Fläche der Bakterienkultur. (4)

3. Eine deutsche Supermarktkette hat den Umsatz ihrer Filialen im Monat März ermittelt (in TEUR). Außerdem wurde noch die Zahl der Kunden (in Tausend) und die zur Verfügung stehende Verkaufsfläche in 1000m^2 erfasst. Es wird angenommen, daß der Umsatz linear von der Kundenanzahl und der Verkaufsfläche abhängt.

Supermarkt Nr.	Kundenzahl	Verkaufsfläche	Umsatz
1	27,5	0,7	543
2	35,2	1,3	967
3	31,4	1,0	757
4	21,2	0,5	345
5	40,3	1,4	1234
6	29,3	0,85	587
7	30,5	1,2	812
8	37,4	1,4	1148
9	23,4	0,65	413
10	25,8	0,9	619

   (a) Formulieren Sie das lineare Modell. Gehen Sie hierbei von den üblichen Annahmen eines normalverteilten linearen Modells aus. (3)

   (b) Berechnen Sie die KQ-Schätzer für β_0, β_1 und β_2. (4)

   (c) Berechnen Sie die Schätzwerte für die Umsätze $\hat{Y}_i$ und die Fehlerterme e_i. (3)

Hinweis: Um Matrixoperationen durchzuführen stehen in EXCEL die Funktionen MTRANS für die transponierte Matrix, MMULT für Matrixmultiplikationen und MINV für die Inverse zur Verfügung. Bei der Verwendung dieser Funktionen ist zu beachten, daß zur Bestätigung der Eingabe die Tastenkombination UMSCHALT+STRG+Eingabe zu verwenden ist und vor Eingabe der Bereich, in dem das Resultat erscheinen soll, zu markieren ist. (Siehe auch in der Online-Hilfe unter „Eingeben einer Matrixformel.“)