U. Jensen/ A. Gandy

SS 2003
Blatt 2
13.5.2003

Punktprozesse – Übungen

(Abgabe: Di, den 27. Mai 2003, vor den Übungen)

1. Ein stochastischer Prozeß $X = (X_t), t \in I\!R_+$, heißt gleichgradig integrierbar, falls
$$\lim_{c\to\infty} \sup_{t\in I\!R_+} E[|X_t| I_{\{|X_t|>c\}}] = 0$$
gilt. Zeigen Sie: X ist gleichgradig integrierbar, falls ein $p > 1$ existiert mit
$$\sup_{t\in I\!R_+} E(|X_t|^p) < \infty.$$
(4)

2. (Monotone Konvergenz) Sei $\mathcal{A}$ eine Sub-σ-Algebra der zugrunde gelegten σ-Algebra $\mathcal{F}$. Sei X_n eine Folge wachsender, integrierbarer Zufallsvariablen. Ferner sei X integrierbar und $X_n \to X P$-f.s.. Zeigen Sie, dass P-f.s.
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n|\mathcal{A}] = \mathrm{E}[X|\mathcal{A}].$$
(4)

3. Sei $f_1(t) = t^2$, $f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ 2 & \text{für } 1 < t \le 2 \end{cases}$, $f_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < 1 \\ 2 & \text{für } 1 \le t \le 2 \end{cases}$ und $g(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \le t < 1 \\ 2 & \text{für } 1 \le t \le 2 \end{cases}$.

   Bestimme die Lebesgue-Stieltjes-Integrale $\int_0^2 f_1 dg$, $\int_0^2 f_2 dg$, $\int_0^2 f_3 dg$. Existieren die entsprechenden Riemann-Stieltjes-Integrale? (4)

4. Ein stochastischer Prozeß $(N_t), t \in I\!R_+$, heißt *Poisson-Prozeß*, falls gilt:

   (i) $N_0 = 0$,

   (ii) N besitzt unabhängige Zuwächse, und

   (iii) für $t > s$ ist $N_t - N_s$ Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\lambda(t-s)$ $(\lambda > 0)$.

   Zeigen Sie, daß $(N_t - \lambda t), t \in I\!R_+$, ein Martingal bezüglich der natürlichen Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), t \in I\!R_+$, mit $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, 0 \le s \le t)$ ist. (3)