U. Jensen/ A. Gandy

SS 2003
Blatt 3
27.5.2003

Punktprozesse – Übungen

(Abgabe: Di, den 10. Juni 2003, vor den Übungen)

1. (Münzwurf) Sei $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\omega) = \frac{1}{4}$ $\forall \omega \in \Omega$, $\mathcal{A} = \sigma(\{(0,0)\})$, $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $X((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1 + \omega_2$. Bestimmen Sie $E[X|\mathcal{F}], E[X|\mathcal{A}]$ und $E[X|\mathcal{B}]$. (3)

2. X, Y seien Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x,y)$. Bestimmen Sie $E[X|Y]$ falls

   a) $f(x,y) = \frac{1}{2} I_{[0,1]}(x) I_{[0,2]}(y)$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{für } 0 \leq x + y \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

   (2)

3. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), t \in I\!R_+$, sei eine Filtration auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, Y sei eine integrierbare Zufallsvariable und $M_t = E(Y|\mathcal{F}_t)$. Zeigen Sie, daß $M = (M_t), t \in I\!R_+$, ein $\mathbb{F}$-Martingal ist. (2)

4. (Doob-Zerlegung) Es sei $X = (X_n), n \in I\!N_0$, ein integrierbarer Prozeß, der an eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), n \in I\!N_0$, adaptiert ist. Zeigen Sie: X besitzt eine Zerlegung
$$X_n = X_0 + A_n + M_n,$$
wobei $M = (M_n), n \in I\!N_0$ ein $\mathbb{F}$-Martingal mit $M_0 = 0$ ist und A ein vorhersagbarer Prozeß (d.h. A_n ist $\mathcal{F}_{n-1}$-meßbar für alle $n \in I\!N$, A_0 konstant) mit $A_0 = 0$ ist, und diese Zerlegung ist P-f.s. eindeutig.
(Hinweis: A_n erhält man über $E(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A_{n-1}$) (4)

5. Der Vektor (T, U) habe die bivariate Marshall-Olkin-Exponentialverteilung, d.h.
$$T = Y_1 \wedge Y_{12} \text{ und } U = Y_2 \wedge Y_{12}$$
mit unabhängigen Zufallsvariablen Y_1, Y_2 und Y_{12}, die exponentialverteilt mit Parametern λ_1, λ_2 bzw. λ_{12} sind. Zeigen Sie, dass in diesem Modell die constant sum-Bedingung erfüllt ist. (5)