U. Jensen/ A. Gandy

SS 2003
Blatt 4
10.6.2003

# Punktprozesse – Übungen

(Abgabe: Di, den 24. Juni 2003, vor den Übungen)

1. $N$ sei ein integrierbarer Punktprozeß auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), t \in \mathbb{R}_+$, sei gegeben durch $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass für die Doob-Meyer-Zerlegung $N = M + A$ von $N$ bezüglich $\mathbb{F}$ gilt: $M \equiv 0$ und $A \equiv N$.
   Hinweis: Zeigen Sie, daß für jedes $\mathbb{F}$-Martingal $M$ gilt: $M_t = M_0$ f.s. für alle $t \geq 0$. (2)

2. Zeigen Sie: Für zwei quadratisch integrierbare, cadlag Martingale $M$ und $N$ existiert ein vorhersagbarer cadlag Prozeß $\langle M, N\rangle$ mit $\langle M, N\rangle_0 = 0$, so daß $MN - \langle M, N\rangle$ ein Martingal ist.
   Hinweis: $MN = \frac{1}{4}((M+N)^2 - (M-N)^2)$ und Doob-Meyer-Zerlegung. (5)

3. Gegeben seien wiederum zwei quadratisch integrierbare, cadlag Martingale $M$ und $N$. Zeigen Sie: Für den Prozeß $\langle M, N\rangle$ aus Aufgabe 2 gilt:
   $$E\langle M, N\rangle_t = Cov(M_t, N_t),$$
   falls $M_0$ und $N_0$ unkorreliert sind.
   Hinweis: Benutzen (und zeigen) Sie die Eigenschaft $EX_t = EX_0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, falls $X$ ein Martingal ist. (3)

4. Sei $X = (X_t), t \in \mathbb{R}_+$ ein adaptierter Prozess. Zeigen sie, dass $X$ progressiv ist, falls alle Pfade von $X$ linksstetig oder alle Pfade von $X$ rechtsstetig sind.
   Hinweis: Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ approximiere $X$ durch $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$-messbare Funktionen. (5)