U. Jensen/ A. Gandy

SS 2003
Blatt 5
24.6.2003

Punktprozesse – Übungen

(Abgabe: Di, den 8. Juli 2003, vor den Übungen)

1. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), t \in I\!R$, sei eine rechtsseitig stetige Filtration und B ein vorhersagbares Rechteck, d.h. $B = \{0\} \times A$ mit $A \in \mathcal{F}_0$ oder $B = (a, b] \times A$ mit $A \in \mathcal{F}_a$. Weiterhin sei M ein $\mathbb{F}$-Martingal mit $E[\int_0^t |dM_s|] < \infty$ für alle $t \geq 0$. Beweisen Sie, daß der Prozeß $L = (L_t), t \in I\!R$, mit

$$L_t(\omega) = \int_0^t I_B(s, \omega) dM_s(\omega)$$

ein $\mathbb{F}$-Martingal ist. (4)

2. In Aufgabe 4 von Blatt 2 wurde gezeigt, daß für einen cadlag Poisson-Prozeß N mit Rate λ gilt: $M = (M_t), t \in I\!R_+$, mit

$$M_t = N_t - \lambda t$$

ist ein Martingal bezüglich der natürlichen Filtration von N. Zeigen Sie: $\langle M \rangle_t = \lambda t$ für alle $t \in I\!R_+$. (4)

3. ρ und τ seien Stoppzeiten bezüglich der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$, $t \in I\!R_+$, die von einem stochastischen Prozeß (X_t), $t \in I\!R_+$, erzeugt wird, d.h. $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. Weiter sei $A \in \mathcal{B}$ mit $A \neq \emptyset, A \neq \Omega$. Überprüfen Sie, ob folgende Zufallsvariablen $\mathbb{F}$-Stoppzeiten sind:

   a) $\rho \wedge \tau$;

   b) $S = \begin{cases} 7, & \text{falls } X_3 \in A, \\ 5, & \text{falls } X_3 \notin A; \end{cases}$

   c) $T = \begin{cases} 4, & \text{falls } X_2 \in A, \\ 1, & \text{falls } X_2 \notin A; \end{cases}$

   d) $\rho + \tau$;

   e) $\rho - \tau$.

   (6)

4. σ und τ seien Stoppzeiten bezüglich einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$, $t \in I\!R$. Zeigen Sie:

   a) Falls $\sigma \leq \tau$, dann gilt $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

   b) $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

   (3)

5. Zeigen Sie:

   a) Jedes gestoppte Martingal ist ein Martingal, d.h. ist M ein Martingal und τ eine Stoppzeit, so ist auch der Prozess M^τ definiert durch $M_t^\tau := M_{\tau \wedge t}$ ein Martingal.

   b) Jedes Martingal ist ein lokales Martingal.

   c) Jedes beschränkte, lokale Martingal ist ein Martingal.

   (3)