

---

# Algorithmen zur effizienten Schätzung der Kovarianzfunktion von Binärbildern

- 1 – Definition der Kovarianzfunktion
- 2 – Beispiel für den Fall  $d = 2$  (Verschiebung)
- 3 – Bestimmung der Kovarianz mittels Verschiebungs- bzw. Faltungsoperation
- 4 – Beispiel für den Fall  $d = 2$  (Faltung)
- 5 – Fourier-Transformierte und Faltungssatz
- 6 – Diskrete Fourier Transformation (DFT)
- 7 – Fast Fourier Transformation (FFT)
- 8 – Vorgehensweise bei Implementierung

## 1 Definition der Kovarianzfunktion

Im folgenden gehen wir immer von einer *zufälligen abgeschlossenen Menge* (ZAM) aus. Dieses ist eine messbare Abbildung, für die gilt:

$$\Xi : \Omega \rightarrow \mathbb{F}, \quad (1)$$

wobei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$  ein Messraum ist, der folgendermaßen konstruiert wird:

- $\mathbb{F}$  : Familie aller abgeschlossenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$
- $\mathcal{K}$  : Familie aller kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$

Sei nun  $\mathcal{F}$  die *kleinste*  $\sigma$ -Algebra über  $\mathbb{F}$ , die alle Mengen der Form

$$\mathbb{F}_K = \{F \in \mathbb{F} \mid F \cap K \neq \emptyset\} \quad \text{mit } K \in \mathcal{K} \quad (2)$$

enthält.

Die Verteilung (das Bildmaß) von  $\Xi$  auf  $\mathcal{F}$  sei

$$\mathbb{P}_{\Xi}(A) = \mathbb{P}(\Xi \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \Xi(\omega) \in A\}), A \in \mathcal{F}. \quad (3)$$

**Bemerkung:** Eine ZAM wird als stationär bezeichnet, falls  $\mathbb{P}_{\Xi} = \mathbb{P}_{\Xi+x} \forall x \in \mathbb{R}^d$  gilt.

Für eine solche stationäre ZAM  $\Xi$  können wir nun verschiedene Kenngrößen betrachten, wie z.B.

- den *Volumenanteil*  $p$  von  $\Xi$  in  $\mathbb{R}^d$

$$p = \mathbb{E}|\Xi \cap [0, 1]^d| \quad (4)$$

- die *Kovarianz(funktion)* von  $\Xi$

$$C(h) = \mathbb{P}(o \in \Xi, h \in \Xi), h \in \mathbb{R}^d. \quad (5)$$

**Bemerkung:** Aufgrund der Definition der Kovarianz wird sie manchmal auch als Zweipunktüberdeckungswahrscheinlichkeit bezeichnet.

Es geht hier vor allem um die Kovarianz und ihre Schätzung. Da wir nicht den gesamten  $\mathbb{R}^d$  betrachten können, führen wir ein (beliebiges) Beobachtungsfenster  $W$  mit  $W \in \mathcal{K}$  und  $|W| > 0$  ein. Dann gilt für  $h \in \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned}
 C(h) &= \mathbb{P}(o \in \Xi, h \in \Xi) \cdot \frac{|W \cap (W + h)|}{|W \cap (W + h)|} \\
 &= \frac{\int_{W \cap (W+h)} \mathbb{P}(o \in \Xi, h \in \Xi) dx}{|W \cap (W + h)|} = \frac{\int_{W \cap (W+h)} \mathbb{P}(x \in \Xi, (x - h) \in \Xi) dx}{|W \cap (W + h)|} \\
 &= \frac{\int_{W \cap (W+h)} \mathbb{P}(x \in \Xi, x \in (\Xi + h)) dx}{|W \cap (W + h)|} = \frac{\int_{W \cap (W+h)} \mathbb{E} \mathbf{1}_{\Xi \cap (\Xi + h)}(x) dx}{|W \cap (W + h)|} \\
 &= \frac{\mathbb{E} |\Xi \cap (\Xi + h) \cap W \cap (W + h)|}{|W \cap (W + h)|}
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort, dass durch

$$\hat{C}(h) = \frac{|\Xi \cap (\Xi + h) \cap W \cap (W + h)|}{|W \cap (W + h)|} \quad (6)$$

ein *erwartungstreuer Schätzer* für  $C(h)$  gegeben ist. Für  $|W \cap (W + h)| = 0$  setzen wir  $\hat{C}(h) = 0$ .

### 2 Beispiel für den Fall $d = 2$ (Verschiebung)

- Es sei nun eine  $(m \times n)$ -Bildmatrix  $\mathbf{A}$  gegeben. Die Berechnung der „diskretisierten“ Kovarianz für einen Vektor  $h \in \mathbb{R}^2$  kann analog zum Fall  $d = 1$  mit Hilfe der *Verschiebungsoperation* erfolgen.
- Zur Illustration der *Verschiebungsoperation* wird die folgende  $(4 \times 6)$  Matrix  $\mathbf{A}$  betrachtet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \end{pmatrix}$$

So ergibt sich z.B. für  $h = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  der folgende Schätzer für die Kovarianz:

$$\hat{C}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{a_{23}a_{00} + a_{24}a_{01} + a_{25}a_{02} + a_{33}a_{10} + a_{34}a_{11} + a_{35}a_{12}}{6}.$$

### 3 Bestimmung der Kovarianz mittels Verschiebungs- bzw. Faltungsoperation

Führen wir nun die *Set-Kovarianz*  $c_W(h) = |W \cap (W + h)|$ ,  $h \in \mathbb{R}^d$ , ein. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 C(h) c_W(h) &= \mathbb{E} |\Xi \cap (\Xi + h) \cap W \cap (W + h)| \\
 &= \mathbb{E} \int_{W \cap (W+h)} \mathbf{1}_\Xi(x) \mathbf{1}_{\Xi+h}(x) dx \\
 &= \mathbb{E} \int_{W \cap (W+h)} \mathbf{1}_\Xi(x) \mathbf{1}_\Xi(x - h) dx \\
 &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_\Xi(x) \mathbf{1}_\Xi(x - h) \mathbf{1}_{W \cap (W+h)}(x) dx \\
 &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\mathbf{1}_\Xi(x) \mathbf{1}_W(x)}_{=: f(x)} \mathbf{1}_\Xi(x - h) \mathbf{1}_{(W+h)}(x) dx \\
 &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) f(x - h) dx \quad (\text{Verschiebungsoperation}).
 \end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich mit  $g(x) := f(-x)$ , dass

$$\begin{aligned} C(h) c_W(h) &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(h-x) dx && \text{(Faltungsoperation)} \\ &= \mathbb{E}(f * g)(h), \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck der Definition der Faltung zweier Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^d$  entspricht und „ $*$ “ das Symbol für den Faltungsoperator darstellt.

Zusammengefasst ergibt sich:  $C(h) \cdot c_W(h) = \mathbb{E}(f * g)(h)$ .

#### Bemerkungen:

- Wir können nun den Schätzer  $\hat{C}(h)$  für die Kovarianz auf zwei Arten berechnen, zum einen über eine Verschiebung, zum anderen über eine Faltung.
- Für  $a, b \in \mathbb{C}^n$  ist die *diskrete Faltung*  $a * b = c$  gegeben durch

$$c_i = \sum_{k=0}^i a_k \cdot b_{i-k}, \quad i = 0, \dots, 2n - 2$$



4 Beispiel für den Fall  $d = 2$  (Faltung)

- Wir betrachten hier zwei  $(m \times n)$ -Bildmatrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  mit  $\check{\mathbf{B}} = \mathbf{A}$ , d.h. die Einträge der Matrix  $\mathbf{B}$  gleichen denen der Matrix  $\mathbf{A}$  nach einer Spiegelung an dem Mittelpunkt der Matrix  $\mathbf{A}$ .
- Zur Illustration der *Faltungsoperation* werden die folgenden  $(4 \times 6)$  Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  betrachtet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{05} & b_{04} & b_{03} & b_{02} & b_{01} & b_{00} \\ b_{15} & b_{14} & b_{13} & b_{12} & b_{11} & b_{10} \\ b_{25} & b_{24} & b_{23} & b_{22} & b_{21} & b_{20} \\ b_{35} & b_{34} & b_{33} & b_{32} & b_{31} & b_{30} \end{pmatrix}$$

- $f(x) = \mathbf{1}_W(x) \mathbf{1}_\Xi(x)$  entspricht den Einträgen der Matrix  $\mathbf{A}$
- Wegen  $g(x) = f(-x)$  gilt für die obige Bildstruktur:

$$x - h = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} n - 1 \\ m - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

- Das Integral geht in folgende Doppelsumme über:

$$\sum_{i=0}^{m-1+h_2} \sum_{j=0}^{n-1+h_1} a_{ij} \cdot b_{(m-1)-i+h_2, (n-1)-j+h_1}$$

- Für  $h = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ergibt sich

$$|W \cap (W + h)| = (m - |h_2|)(n - |h_1|) = 6$$

und

$$\hat{C}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{a_{23}b_{35} + a_{24}b_{34} + a_{25}b_{33} + a_{33}b_{25} + a_{34}b_{24} + a_{35}b_{23}}{6}.$$

**Bemerkung:** Sowohl die Verschiebungsoperation hat *Komplexität*  $O(n^2)$  für  $d = 1$ , als auch die Faltung. Im folgenden werden wir eine Möglichkeit aufzeigen, mit deren Hilfe wir die Faltung schneller berechnen können. Dafür benötigen wir den Begriff der *Fourier-Transformation*.

## 5 Fourier-Transformierte und Faltungssatz

Für  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  Lebesgue-integrierbar existiert

$$F(t)(= \mathcal{F}\{f\}(t)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{2\pi i\langle t,x \rangle} dx, \forall t \in \mathbb{R}^d \quad (7)$$

und ist die *Fourier-Transformierte* der Funktion  $f$ . Durch

$$f(x)(= \mathcal{F}^{-1}\{F\}(x)) = \int_{\mathbb{R}^d} F(t)e^{-2\pi i\langle x,t \rangle} dt, \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (8)$$

ist die *inverse Fourier-Transformierte* der Funktion  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben.

### Bemerkungen:

- Ein Beispiel für eine Fourier-Transformierte ist die charakteristische Funktion einer (absolut stetigen) Zufallsvariablen.
- Die Fourier-Transformation wird unter anderem in der Physik (Übergang vom Zeitbereich in den Frequenzbereich), aber auch in der Analysis (Theorie der partiellen Differentialgleichungen) und in vielen anderen Bereichen verwendet.

Wir können mit (d-1)-maliger Anwendung des Satzes von Fubini eine d-dimensionale Fourier-Transformation in d eindimensionale Transformationen überführen.

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i \langle t, x \rangle} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \dots, x_d) e^{2\pi i (t_1 x_1 + \dots + t_d x_d)} d(x_1, \dots, x_d) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_d) e^{2\pi i t_1 x_1} dx_1 \right) e^{2\pi i (t_2 x_2 + \dots + t_d x_d)} d(x_2, \dots, x_d) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \dots \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_d) e^{2\pi i t_1 x_1} dx_1 \right) e^{2\pi i t_2 x_2} dx_2 \right) \dots e^{2\pi i t_d x_d} dx_d}_{\mathcal{F}\{f_{x_1}\}(t_1)} \\
 &= \mathcal{F}\{\dots \{\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f_{x_1}\}(t_1)\}(t_2) \dots\}(t_d)
 \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Dasselbe kann man auch für die inverse Fourier-Transformation zeigen.

Mit Hilfe der Fourier-Transformation können wir nun folgenden *Faltungssatz* formulieren. Die Fourier-Transformation der Faltung der Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleich dem Produkt der Fourier-Transformationen der Funktionen  $f$  und  $g$ , also

$$\mathcal{F}\{(f * g)(h)\}(t) = F(t) \cdot G(t), \forall h \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } \mathcal{F}\{f * g(h)\}(t) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(h) e^{2\pi i t h} dh \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) g(h - x) dx \right) e^{2\pi i t h} dh \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(w) e^{2\pi i t (w+x)} dx dw \\ &= \mathcal{F}\{f\}(t) \cdot \mathcal{F}\{g\}(t) = F(t) \cdot G(t), \quad \forall h \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Analoges kann man für Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  zeigen.

### 6 Diskrete Fourier Transformation (DFT)

Einige Vorüberlegungen zur DFT: Wir haben  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und wollen die Fourier-Transformierte hiervon. Wir bestimmen  $N$  aufeinanderfolgende Funktionswerte  $f_k$  von  $f$ , sodass  $f_k = f(x_k)$  gilt mit  $x_k = k \cdot \Delta$  und  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , wobei  $\Delta$  den (gleichbleibenden) Abstand zwischen den Stützpunkten bezeichne. Wir setzen nun noch  $t_j = \frac{j}{N\Delta}$  für  $j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$ . Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} F(t_j) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i t_j x} dx \\ &\approx \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \cdot f_k e^{2\pi i t_j x_k} \\ &= \Delta \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{2\pi i \frac{j}{N\Delta} k \Delta} \\ &= \Delta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{2\pi i k j / N} \end{aligned}$$

### Bemerkungen:

- Zu einem gegebenen Vektor  $f = (f_0, \dots, f_{N-1})$  bezeichnet der Vektor  $F = (F_0, \dots, F_{N-1})$  mit

$$F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{2\pi i k j / N}$$

die *diskrete Fourier-Transformierte* (DFT) von  $f$ . Die Indizierung des Vektors  $F$  kann dabei von  $j = 0, 1, \dots, N - 1$  laufen, da  $F_j$  periodisch in  $j$  mit Periode  $N$  ist, d.h.  $F_j = F_{j+N}$ .

- Die DFT bildet also einen n-dimensionalen (komplexen) Vektor auf einen n-dimensionalen komplexen Vektor ab.
- Die *inverse DFT* unterscheidet sich von der DFT nur geringfügig: Um aus einem gegebenen Vektor  $(F_0, \dots, F_{N-1})$  den Vektor  $(f_0, \dots, f_{N-1})$  zurückzuerhalten, wende man die folgende Formel an:

$$f_j = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{-2\pi i k j / N}.$$

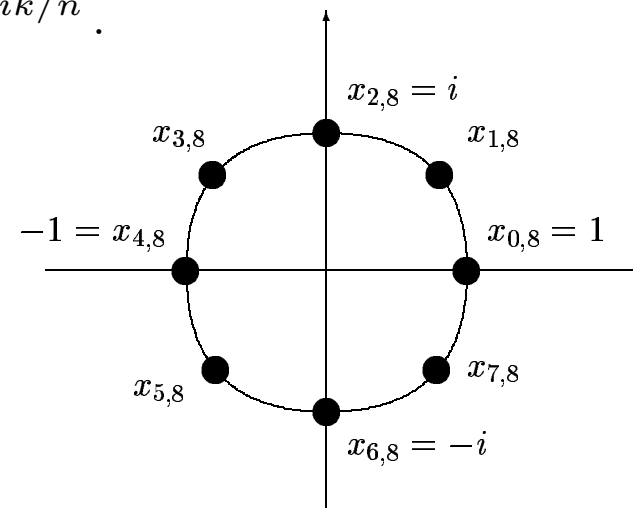
## 7 Fast Fourier Transformation (FFT)

Die DFT bringt uns aber auch noch keinen Vorteil in der Berechnung von  $\widehat{C}(h)$ , weil sie, ebenso wie die diskrete Faltung und die diskrete Verschiebung, auch eine Komplexität von  $O(n^2)$  hat. Die Lösung des Problems ist die *Fast Fourier Transformation* (FFT), die einen Algorithmus zur Durchführung der DFT mit Komplexität  $O(n \log(n))$  darstellt.

- Eine komplexe Zahl  $z$  ist  $n$ -te *Einheitswurzel*, falls  $z^n = 1$ . Es gibt im Komplexen genau  $n$  Lösungen der Gleichung  $z^n = 1$ , nämlich  $z_{0,n}, \dots, z_{n-1,n}$  mit

$$z_{k,n} = e^{2\pi i k/n}.$$

Veranschaulichung der  
 $n$ -ten Einheitswurzeln ( $n = 8$ ):





- Mit der *Eulerschen Formel* kann überprüft werden, dass  $z_{k,n}$  tatsächlich eine  $n$ -te Einheitswurzel ist:

$$(z_{k,n})^n = (e^{2\pi ik/n})^n = e^{2\pi ik} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1 + i \cdot 0 = 1$$

- Außerdem ergibt sich, dass man alle  $n$ -ten Einheitswurzeln als Potenzen von  $z_{1,n}$  erhalten kann. Sei  $z := z_{1,n} = e^{2\pi i/n}$ , dann gilt:

$$- z_{0,n} = e^0 = (e^{2\pi i/n})^0 = z_{1,n}^0,$$

$$- z_{1,n} = e^{2\pi i 1/n} = z_{1,n}^1,$$

$$- z_{2,n} = e^{2\pi i 2/n} = (e^{2\pi i/n})^2 = z_{1,n}^2,$$

⋮

- Im Folgenden sei  $n$  eine Zweierpotenz. Dann erhält man durch Quadrieren der  $n$ -ten Einheitswurzeln gerade die  $(n/2)$ -ten Einheitswurzeln (und zwar zweimal). Sei im Folgenden  $k = 0, \dots, (n/2) - 1$ :

$$(z_{k,n})^2 = e^{2\pi ik/(n/2)} = z_{k,n/2},$$

$$\begin{aligned} (z_{(n/2)+k,n})^2 &= e^{2\pi i((n/2)+k)/(n/2)} \\ &= e^{2\pi i} \cdot e^{2\pi ik/(n/2)} = e^{2\pi ik/(n/2)} = z_{k,n/2}. \end{aligned}$$

Ab sofort sei  $N$  immer eine Zweierpotenz und gebe, so wie bisher, die Anzahl der Stützpunkte der betrachteten Funktion  $f$  an. Ausserdem setzen wir  $W := e^{2\pi i/N}$ . Mit diesen Voraussetzungen können wir den Term für die DFT folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
 F_j &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{2\pi i k j / N} \\
 &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k} e^{2\pi i (2k) j / N} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k+1} e^{2\pi i (2k+1) j / N} \\
 &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k} e^{2\pi i k j / (\frac{N}{2})} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k+1} \underbrace{e^{2\pi i 2k j / N + 2\pi i j / N}}_{(e^{2\pi i / N})^j e^{2\pi i 2k j / N}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k} e^{2\pi i k j / (\frac{N}{2})} + W^j \cdot \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k+1} e^{2\pi i k j / (\frac{N}{2})} \\
 &= F_j^e + W^j F_j^o
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $F_j^{e(ven)}$  die  $j$ -te Komponente der Fourier-Transformierten der Länge  $\frac{N}{2}$ , die aus den Funktionswerten von  $f$  mit geraden Indices gebildet wird, und  $F_j^{o(dd)}$  analog die mit den ungeraden Indices. Für  $j$  gilt immer noch  $0 \leq j \leq N - 1$ . Aber  $F_j^e$  und  $F_j^o$  sind periodisch in  $j$  und zwar mit der Länge  $\frac{N}{2}$ . Denn man kann das ursprüngliche  $F$  für  $0 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1$  wie folgt aufteilen:

$$F_j = F_j^e + W^j F_j^o \quad (10)$$

$$F_{\frac{N}{2}+j} = F_{\frac{N}{2}+j}^e + W^{\frac{N}{2}+j} F_{\frac{N}{2}+j}^o = F_j^e - W^j F_j^o, \quad (11)$$

weil für

$$e^{2\pi i k (\frac{N}{2}+j) / (\frac{N}{2})} = e^{2\pi i k \frac{N}{2} / (\frac{N}{2})} \cdot e^{2\pi i k j / (\frac{N}{2})} = \underbrace{e^{2\pi i k}}_{\cos(k2\pi) + i \sin(k2\pi) = 1} \cdot e^{2\pi i k j / (\frac{N}{2})}$$

und

$$W^{\frac{N}{2}+j} = (e^{2\pi i / N})^{\frac{N}{2}+j} = e^{(\pi i N + 2\pi i j) / N} = \underbrace{e^{\pi i}}_{=-1} \cdot e^{2\pi i j / N} = -(e^{2\pi i / N})^j = -W^j$$

gilt.



Diese Erkenntnisse kann man rekursiv weiter auf die  $F_j^e$  und  $F_j^o$  anwenden und bekommt so sukzessiv in insgesamt  $\log_2(N)$  Schritten alle möglichen  $2^N$  Permutationen für die  $e$ 's und  $o$ 's und damit zusammenhängend einelementige Transformationen. Diese Transformationen sind aber nichts anderes als Identitäten (für bestimmte  $f_k$ ), weil  $j = k = 0$  gilt und somit

$$F_0 = \sum_{k=0}^0 f_k \cdot e^{2\pi i k j / 1} = f_0 \cdot e^{2\pi i 0} = f_0. \quad (12)$$

### Bemerkungen:

- Man kann die sich ergebende *rekursive* Vorgehensweise auch in eine *iterative* Abfolge umwandeln.
- Es gibt viele modifizierte FFTs für jeweils spezielle Probleme, die bis zu zweimal schneller sind als der hier vorgestellte.

Es ergibt sich also folgender Algorithmus:



- **FFT-Algorithmus:** Die Komplexität dieses Algorithmus ergibt sich aus der Rekursionsgleichung  $T(n) = 2 T(n/2) + O(n)$ , deren Lösung nach dem Master-Theorem  $T(n) = O(n \log n)$  ist.

```

PROCEDURE FFT( $N, (f_0, \dots, f_{N-1})$ )
IF  $N = 1$  THEN RETURN ( $f_0$ )
ELSE
   $f^{e(\text{ven})} := (f_0, f_2, \dots, f_{N-2})$ 
   $f^{o(\text{dd})} := (f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$ 
   $F^{e(\text{ven})} := \text{FFT}(N/2, f^{e(\text{ven})})$ 
   $F^{o(\text{dd})} := \text{FFT}(N/2, f^{o(\text{dd})})$ 
   $z_0 := 1$ 
   $z := e^{i2\pi/N}$ 
  FOR  $j := 0$  TO  $(N/2) - 1$  DO
     $F_j := F_j^{e(\text{ven})} + z_0 \cdot F_j^{o(\text{dd})}$ 
     $F_{(N/2)+j} := F_j^{e(\text{ven})} - z_0 \cdot F_j^{o(\text{dd})}$ 
     $z_0 := z_0 \cdot z$ 
  RETURN ( $F_0, F_1, \dots, F_{N-1}$ )

```

### 8 Vorgehensweise bei Implementierung

Es ergibt sich also folgende Vorgehensweise um z. B. die Kovarianz eines zweidimensionalen Binärbildes zu schätzen.

- $\mathbf{A}$  eine  $(m \times n)$  Matrix, enthalte die diskretisierte Bildstruktur des Binärbildes
- Es gelte  $\check{\mathbf{B}} = \mathbf{A}$ , d.h. die Einträge der Matrix  $\mathbf{B}$  gleichen denen der Matrix  $\mathbf{A}$  nach einer Spiegelung an dem Mittelpunkt der Matrix  $\mathbf{A}$ .
- Auffüllen von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  mit Nullen bis  $2m - 1$  und  $2n - 1$
- Auffüllen von vergrößerten  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  mit Nullen bis zur nächsten Zweierpotenz
- $f(x) = \mathbf{1}_{\Xi}(x)\mathbf{1}_{\mathcal{W}}(x)$  entspricht den Einträgen der Matrix  $\mathbf{A}$
- zweidimensionale Fourier-Transformation in  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  durch jeweils zwei eindimensionale DFTs; d.h. transformieren alle Funktionswerte von  $f(x)$  in der ersten Dimension (iterieren über alle Spalten), speichern das Ergebnis in  $\mathbf{A}$  ab und transformieren, die sich ergebenden Werte in der zweiten Dimension (iterieren über alle Zeilen), wiederum „in situ“ ( $\mathbf{A}$  enthält nun die Werte der zweidimensionalen Fourier-Transformation von  $f(x)$ ); gleiches mit  $\mathbf{B}$

- Nach dem Faltungssatz gilt, dass die Fourier-Transformierte der Faltung von  $f$  und  $g$ , an der Stelle  $t$ , dem Produkt der transformierten Funktionen, jeweils an der Stelle  $t$ , entspricht.
- Also  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  komponentenweise multiplizieren und in  $\mathbf{A}$  abspeichern.
- zweidimensionale inverse Fourier-Transformation auf  $\mathbf{A}$  anwenden und in  $\mathbf{A}$  abspeichern; ergibt die Werte der Faltung  $(f * g)(h)$  für alle zulässigen  $h \in \mathbb{R}^2$
- nicht vergessen, die einzelnen Einträge durch  $|W \cap (W + h)|$  zu teilen

# Literatur

- [1] Ohser, J. and Mücklich, F. (2000) *Statistical Analysis of Microstructures in Material Science*. J. Wiley & Sons, Chichester.
- [2] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, W.T. (1986) *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Schöning, U. (2001) *Algorithmik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- [4] Stoyan, D., Kendall, W.S., and Mecke, J. (1995) *Stochastic Geometry and its Applications*. J. Wiley & Sons, Chichester (2nd ed.).
- [5] Donald E. Knuth (1997) *The Art of Computer Programming*. Addison Wesley.