Bayessche Bildanalyse unter Verwendung von (gefärbten) Tessellationen

Rachel Philipp

Juni 2003

1 Übersicht

1. Übersicht
2. Zufällige Tessellation
   - Deterministische Tessellation
   - Poisson-Voronoi Tessellation
   - Poisson-Delaunay Tessellation
   - Poisson-Line Tessellation
   - Iterierte Tessellationen
3. Bildmodell und Bayesscher Ansatz, Störungsmodelle

1 Übersicht

4. Bild-Segmentierung unter Verwendung von Voronoi-Polygonen und MCMC
   - Voronoi-Tessellation als Grundlage der a-priori-Verteilung in der Bayesschen Bildanalyse
   - Berechnung der a-posteriori-Verteilung
   - 3 Algorithmen für die Simulation
   - Anwendung auf Mikroskopaufnahmen von Muskelfasern
5. Weitere Anwendungen
6. Literatur

2 Zufällige Tessellation

Definition 1 (Deterministische Tessellation) *Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller nichtleeren Polygone im $\mathbb{R}^2$.*
Eine Folge $\tau = \{P_n\}$ von Mengen $P_n \in \mathcal{P}$ heißt (deterministische) **Tessellation** *des $\mathbb{R}^2$, falls gilt:*

(i) $int(P_{n_1} \cap P_{n_2}) = \emptyset \qquad \forall n_1 \neq n_2$

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \mathbb{R}^2$

(iii) $\{P_n \in \tau : P_n \cap B \neq \emptyset\}$ *ist eine endliche Menge für alle kompakten Mengen $B \subset \mathbb{R}^2$*

Bezeichnung: Die Polygone P_n werden **Zellen** der Tessellation genannt.

Definition 2 (Zufällige Tessellation) *Sei* $X = \{\Xi_1, \Xi_2, ...\}$ *ein stochastischer Punktprozess von abgeschlossenen Mengen und sei* $\mathcal{T}$ *die Menge aller Tessellationen* τ.
Dann heißt X *eine* **zufällige Tessellation**, *falls* $P(X \in \mathcal{T}) = 1$.
Eine zufällige Tessellation X *heißt*

- **stationär**, *falls ihre Verteilung bzgl. beliebiger Verschiebungen im* $\mathbb{R}^2$ *invariant ist,*
- **isotropisch**, *falls dasselbe für beliebige Drehungen um den Ursprung gilt,*
- **bewegungsinvariant**, *falls sie stationär und isotropisch ist.*

Definition 3 (Voronoi-Tessellation) *Sei* $M = \{p_1, p_2, ...\}$ *eine Menge von Punkten im* $\mathbb{R}^2$.
Für $p_n, p_m \in M$, $n \neq m$ *sei die Halbebene* $H(p_n, p_m)$ *definiert durch*

$$H(p_n, p_m) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - p_n\| \leq \|p - p_m\|\}.$$

Dann heißt

$$P_n = \bigcap_{m \neq n} H(p_n, p_m) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - p_n\| \leq \|p - p_m\| \quad \forall m \neq n\}$$

Voronoi-Zelle *des Punktes* p_n *(Nukleus, Geburtspunkt, Zellkern) und* $\tau = \{P_n\}$ *heißt* **Voronoi-Tessellation** *bezüglich* M.

$\Longrightarrow$ Für $p \in intP_n$ gilt: p_n ist der nächste Nachbar von p in M.

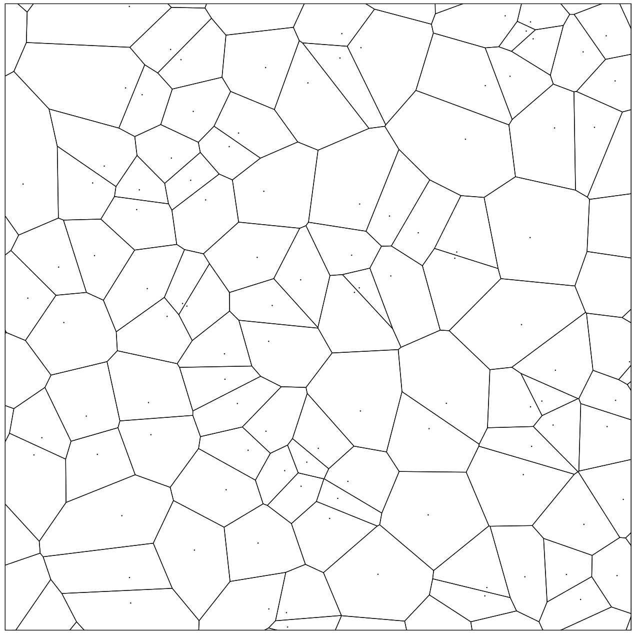

Figure 1: Beispiel einer Voronoi-Tessellation

Definition 4 (Poisson-Voronoi Tessellation) *Sei* $X = \{X_1, X_2, \ldots\}$ *ein stationärer Poisson-Punktprozess.*
Die Voronoi-Tessellation, die von X *induziert wird, heißt* **Poisson-Voronoi Tessellation***.*

$\Longrightarrow$ Eine Poisson-Voronoi Tessellation wird in zwei Schritten erzeugt:

- Generiere die Realisierung x eines stationären Poisson-Punktprozesses X.
- Konstruiere die Voronoi-Tessellation mit $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ als Menge der Nuklei.

Korollar 1 (Eigenschaften von Voronoi-Tessellationen) *Es gilt:*

(i) *Jede Voronoi-Zelle ist ein konvexes Polygon.*

(ii) $Q = \{q_1, q_2, \ldots\}$ *sei die Menge aller Eckpunkte der Polygone einer Voronoi-Tessellation* τ.

- $\forall q_i \in Q$ *existiert genau ein Kreis mit Mittelpunkt* q_i, *der durch drei oder mehr Nuklei* $q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}$ *geht, in dessen Innerem aber kein weiterer Punkt aus M liegt.*
- *Sei* q_i *der Eckpunkt in einer Voronoi-Tessellation* τ, *der den Polygonen* P_1, P_2 *und* P_3 *gemeinsam ist. Dann ist* q_i *der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks* $\overline{p_1 p_2 p_3}$.

ohne Beweis

Definition 5 (Delaunay-Tessellation) *Sei $M = \{p_1, ...p_r\}$ eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^2$, in der p_i, p_j, p_k, $(i \neq j, j \neq k, k \neq i)$ nicht auf derselben Linie liegen.*
Sei $\tau = \{P_n\}$ die Voronoi-Tessellation bezüglich M. Sei $Q = \{q_1, ...q_m\}$ die Menge der Eckpunkte von τ und $p_{i_1}, ..., p_{i_k}$ seien die Punkte in M, deren Zellen den Eckpunkt q_i teilen.
Sei

$$T_i = \{p \in \mathbb{R}^2 : p = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j p_{i_j}, \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0\}$$

und $D = \{T_1, ..., T_m\}$. Falls $k_i = 3 \ \forall i = 1, ..., m$ gilt, heißt D **Delaunay-Tessellation** *der konvexen Hülle von M.*

Bemerkung: Die Delaunay-Tessellation wird aufgrund der Gestalt der erzeugten Polygone auch Triangulation genannt.

Definition 6 (Poisson-Delaunay Tessellation) *Sei* $X = \{X_1, X_2, ...\}$ *ein stationärer Poisson-Punktprozess.*
Die Delaunay-Tessellation, die von X *induziert wird, heißt* **Poisson-Delaunay Tessellation**.

Bemerkung: Die Delaunay-Tessellation (DT) liefert den dualen Graphen zur Voronoi-Tessellation (VT), denn:

- jedes Dreieck der DT steht in Bezug zu genau einem Eckpunkt der VT,
- jede Kante der DT steht in Bezug zu genau einer Kante der VT,
- jeder Eckpunkt der DT steht in Bezug zu genau einer Zelle der VT.

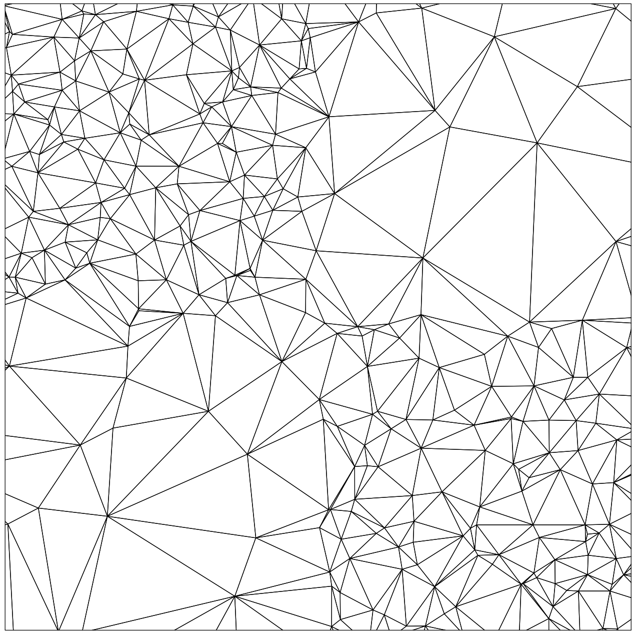

Figure 2: Beispiel einer inhomogenen Delaunay-Tessellation

Korollar 2 (Charakterisierung der Delaunay-Triangulation) *Sei $D = \{T_1, ..., T_m\}$ eine Triangulation der konvexen Hülle einer Punktmenge $M = \{p_1, ..., p_r\}$. Dann gilt:*

Jedes Dreieck T_i in D hat einen "leeren Umkreis" in dem Sinne, dass keine weiteren Punkte aus M darin liegen

$$\Longleftrightarrow$$

D ist eine Delaunay-Triangulation

ohne Beweis

Definition 7 (Poisson-Line Tessellation) *Sei* $X = \{X_1, X_2, ...\}$ *ein bewegungsinvarianter Poisson-Punktprozess. Sei* $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, ...\}$ *eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen auf* $[0, 2\pi]$.
Der markierte Punktprozess $X = (X_n, \Phi_n)$ *heißt dann Poisson-Line Prozess. Die zufällige Tessellation* τ*, die von* X *induziert wird, heißt Poisson-Line Tessellation.*

Durch Überlagerung (superposition) oder Schachtelung (nesting) mehrerer (gleicher oder verschiedener) Tessellationen kann man in der Realität auftretende Strukturen eventuell angemessen abbilden. $\Longrightarrow$ Iteration

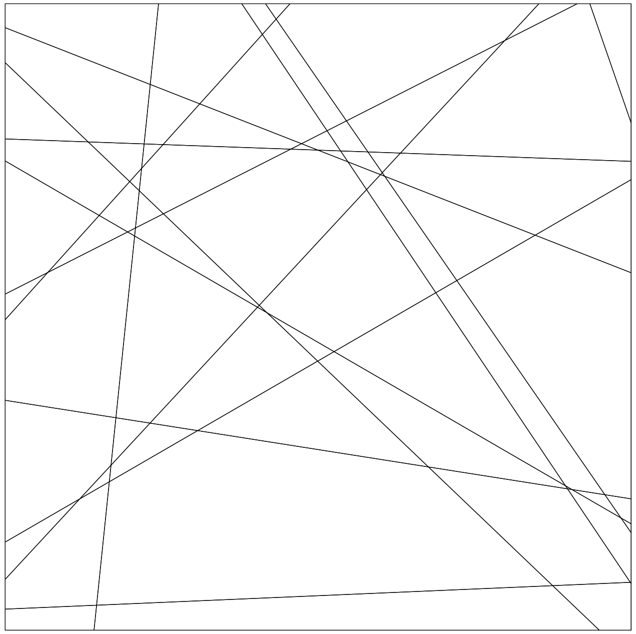

Figure 3: Beispiel einer Poisson-Line Tessellation

3 Bildmodell und Bayesscher Ansatz, Störungsmodelle

Ziele:

- Struktur der Störung angemessen modellieren
- Unbekannte Systeme durch Einbringen von verfügbaren Informationen regulieren
- Aussagen über die Velässlichkeit der Ergebnisse treffen

Notation:

- μ: zugrunde liegendes, echtes Bild (oft ein diskretes Gitter: Bild aus Pixeln $\mu = \{\mu_{jk}, j, k = 1, ..., N\}$)
- z: Beobachtung, Signal ($z = \{z_{jk}, j, k = 1, ..., N\}$)

- $P(z|\mu)$: beschreibt den Prozess der Entstehung der Beobachtung z bei einem bestimmten zugrunde liegenden Bild μ
- $\Pi(\mu)$: a-priori-Verteilung - modelliert alle Annahmen über die Eigenschaften des "echten" Bildes μ
- $\Pi(z)$: Randdichte für die Beobachtung z - wird meist nicht berücksichtigt, da sie keine Information über das echte Bild μ enthält

Satz von Bayes:

$$P(\mu|z) = \frac{P(z|\mu)\Pi(\mu)}{\Pi(z)} \propto P(z|\mu)\Pi(\mu)$$

$\Longrightarrow P(\mu|z)$: a-posteriori-Verteilung.

Störungsmodelle:

- Multiplikative Störung: $z_{jk} = \mu_{jk} \cdot \varepsilon_{jk}$ mit unabhängigen Störfaktoren $\varepsilon_{jk} \sim Bernoulli(p)$
- Additive Störung: $z_{jk} = \mu_{jk} + \varepsilon_{jk}$ mit unabhängigen Störfaktoren $\varepsilon_{jk} \sim N(0, \sigma^2)$
- Deformierung von Tessellationen (z.B. Verschiebung von Eckpunkten der Polygone)
- ...

Bemerkung: Die beiden ersten Modelle sind pixelbasiert, das dritte betrifft die geometrische Struktur des Bildes.

4 Voronoi-Polygone in der Bayesschen Bildanalyse

Zusammenfassung:

Man verwendet ein Modell von Voronoi-Polygonen, um ein digitalisiertes Bild zu beschreiben und zu segmentieren. Dem Bayesschen Ansatz folgend ermittelt man die mathematischen Formeln für die Wahrscheinlichkeit $P(z|\mu)$ und die a-priori-Verteilung $\Pi(\mu)$, die auf einer Tessellation basieren. Drei Algorithmen zur Schätzung und Simulation der a-posteriori-Verteilung werden vorgestellt: ein "gefrässiger" Algorithmus, ein Metropolis-Hastings- und ein Reversible Jump MCMC (RJMCMC)-Algorithmus. Schätzungen für das "echte" Bild liefern der MAP und die Mittelwerte der Pixel aus der Simulation.

Die Methode wird auf ein echtes Bild von Muskel-Faser-Querschnitten angewendet.

- Grundlage: gestörtes Bild (Mikroskopaufnahme)
- Konstruiere a-priori-Verteilung $\Pi(\mu)$ aus Wissen über das Bild (Tessellation induziert durch Θ)
- Wähle Modell der Störung $P(z|\mu)$ (Additive Störung)
- Simuliere von der a-posteriori-Verteilung $P(\mu|z)$ mit MCMC
  $\Longrightarrow$ Mittelwerte für Pixel
  $\Longrightarrow$ Konfiguration, für die a-posteriori maximal ist (MAP)

Modellparameter:

- Betrachte ein (zweifarbiges) Bild, skaliert auf das Einheitsquadrat
- $\Theta = \{(u_i, v_i, c_i) | i = 1, ...n\}$ mit $\theta_i = (u_i, v_i, c_i)$ bestehend aus den karthesischen Koordinaten (u_i, v_i) und der Farbe $c_i \in \{\eta_{-1}, \eta_1\}$ des i-ten Punktes
- Das $N \times N$ Bild $\mu(\Theta) = \{\mu_{jk}(\Theta), j, k = 1, ..., N\}$ einer Voronoi-Tessellation induziert von den Punkten in Θ wird folgendermaßen gebildet:
  - z.B mit Green und Sibsons (1978) TILE-Routine wird die Tessellation erstellt.

- Jedes Pixel $\mu_{j,k}$ an der Stelle (x_j, y_k), $1 \leq j,k \leq N$ mit $x_j = (j - .5)/N$, $y_k = (k - 0.5)/N$ erhält die Farbe $c_i \in \{\eta_{-1}, \eta_1\}$ des Zellkerns der Voronoi-Zelle zu der es gehört.

- Da alle Information über $\mu(\Theta)$ in Θ enthalten ist, wird in dieser Anwendung oft vereinfachend Θ anstelle von $\mu(\Theta)$ geschrieben.

Die a-priori-Verteilung

Die Wahl der a-priori-Verteilung ist problemspezifisch. Sei nun

- n fest vorgegeben und die Anzahl der Polygone konstant,
- (u_i, v_i) und c_i unabhängig,
- die Nuklei (u_i, v_i) unabhängig voneinander gleichverteilt auf dem Einheitsquadrat (Poisson-Feld),
- die Farben $c_i \in \{\eta_{-1}, \eta_1\}$ unabhängig nach der $Bernoulli(p_c)$-Verteilung gewählt.

$\Longrightarrow$ a-priori-Verteilung:

$$\Pi(\Theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{U[0,1]}(u_i) \cdot f_{U[0,1]}(v_i) \cdot p_c^{\mathbb{I}(c_i=\eta_1)} \cdot (1 - p_c)^{\mathbb{I}(c_i=\eta_{-1})}$$

mit der Dichte der Gleichverteilung auf $[0,1]$ $f_{U[0,1]}(x)$ und der Indikatorfunktion $\mathbb{I}(\cdot)$.

Tatsächlich besteht u.U. eine gewisse Abhängigkeit zwischen benachbarten Zellen des Originalbildes. Diese kann z.B. dadurch modelliert werden, dass die θ_i einem Strauß-Prozess folgen (Dryden, Farnoosh, Taylor). Weitere Möglichkeiten, solche Abhängigkeiten zu berücksichtigen, sind nach Gauß gestörte Punkte (Dryden et al., 1997) oder ein nächster Nachbar Markov-Prozess (Baddeley und Møller, 1989). Die Wahl hängt hierbei von der Beschaffenheit des zu rekonstruierenden Bildes ab.
In diesem Vortrag werden keine Abhängigkeitsstrukturen angenommen.

Einfluss der Störung:

Das beobachtete Bild sei $z = \{z_{jk}, j.k = 1, ..., n\}$ mit Pixel-Zentren in (x_j, y_k). Im Modell der multiplikativen Störung gilt:
$P(z_{jk} = \mu_{jk}(\Theta)|\Theta) = 1 - p$ und $P(z_{jk} \neq \mu_{jk}(\Theta)|\Theta) = p$

$$\Rightarrow \quad P(z_{jk}|\Theta) = p^{\mathbb{I}(z_{jk} \neq \mu_{jk}(\Theta))}(1-p)^{\mathbb{I}(z_{jk} = \mu_{jk}(\Theta))}$$

$$\Rightarrow \quad P(z|\Theta) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n} P(z_{jk}|\Theta) = p^{\sum_{j,k}\mathbb{I}(z_{jk} \neq \mu_{jk}(\Theta))}(1-p)^{\sum_{j,k}\mathbb{I}(z_{jk} = \mu_{jk}(\Theta))}$$

mit $\eta_{-1} = -1$, $\eta_1 = 1$ gilt:
$\mathbb{I}(z_{jk} \neq \mu_{jk}(\Theta)) = |z_{jk} - \mu_{jk}(\Theta)|/2$ und $\mathbb{I}(z_{jk} = \mu_{jk}(\Theta)) = 1 - |z_{jk} - \mu_{jk}(\Theta)|/2$

$$\Longrightarrow \quad P(z|\Theta) \propto exp\left\{-\frac{1}{2}\log(\frac{1-p}{p})\sum_{j,k}|z_{jk}-\mu_{jk}(\Theta)|\right\}$$

Bei Verwendung des Modells der additiven Störung erhält man analog:

$$P(z|\Theta) \propto exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j}\sum_{k}(z_{jk}-\mu_{jk}(\Theta))^2\right\}$$

Das so erzeugte Graustufenbild kann wieder in ein zweifarbiges umgewandelt werden, indem man alle Grauwerte unter einem Grenzwert t auf η_{-1} und alle darüber auf η_1 setzt.

a-posteriori-Verteilung

nach Bayes gilt: $P(\Theta|z) \propto P(z|\Theta, n)\Pi(\Theta|n)\Pi(n)$

Um einen Schätzer für Θ zu erhalten, simuliert man nach der Markov-Chain-Monte-Carlo Methode von einer Markov-Kette, deren Gleichgewichtsverteilung die a-posteriori-Verteilung ist. Bei festem n und einem Poisson-Prozess als a-priori-Verteilung gilt:

$$P(\Theta|z) \propto exp\left\{-\frac{1}{2}\log(\frac{1-p}{p})\sum_{j,k}|z_{jk} - \mu_{jk}(\Theta)|\right\}\prod_{i=1}^{n} p_c^{\mathbb{I}(c_i=1)}(1-p_c)^{\mathbb{I}(c_i=-1)}$$

Algorithmen

MAP-Schätzer: $\hat{\Theta} = arg\max(P(\Theta|z))$

$\Longrightarrow$ analytische Berechnung schwer möglich

Input: Das beobachtete, gestörte Bild $z = \{z_{jk}, j, k = 1, ..., N\}$, Störparameter p fest

Output: $\hat{\Theta} = \{(\hat{u_i}, \hat{v_i}, \hat{c_i}), i = 1, ..., n\}$ - eine Approximation des MAP-Schätzers; daraus lässt sich das geschätze Bild $\hat{\mu}$ durch Tessellation ableiten.

Algorithmus 1 (Greedy Algorithmus) *(n fest)*

Schritt 1: *Generiere n Punkte gleichverteilt auf* $[0, 1]^2$, *setze Farben unabhängig nach der* $Bernoulli(p_c)$*-Verteilung* $\Longrightarrow$
$\Theta = \{(u_i, v_i, c_i), i = 1, ..., n\}$

Schritt 2: *Tesselliere das Einheitsquadrat nach diesen Punkten und* *erstelle das dazugehörige Bild* $\mu = \{\mu_{jk}(\Theta), j, k = 1, ..., N\}$

Schritt 3: *Berechne* $PD = P(\Theta|z)$ *nach obiger Formel*

In m Iterationen führe aus:

Schritt 4: *Für* $i = 1, ..., n$: $\{$

4.1 Generiere einen Punkt (u_i^*, v_i^*) *mit unabhängiger Farbe* c_i^* *nach* $Bernoulli(p_c)$*-Verteilung. Setze* $\Theta^* = \Theta \setminus (u_i, v_i, c_i) \cup (u_i^*, v_i^*, c_i^*)$

4.2 Berechne $PD^* = P(\Theta^*|z)$

Falls $PD^* \geq PD$ *akzeptiere neuen Punkt, d.h. ersetze* Θ *durch* Θ^**,*

falls $PD^* < PD$ *akzeptiere nicht, weiter mit* $\Theta\}$

Dieser Algorithmus wird “gefräßig” genannt, weil die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit in jedem Iterationsschritt größer wird, dabei aber die Gefahr besteht, dass man in ein lokales Maximum gerät.

Metropolis-Hastings Algorithmus

Hier wird ein vorgeschlagener Punkt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit α akzeptiert, auch wenn der dazugehörige Wert der a-posteriori-Verteilung schlechter als der im vorausgegangenen Schritt ist.

$$\alpha(\Theta, \Theta^*) = min\left(1, \frac{P(\Theta^*|z)}{P(\Theta|z)}\right)$$

Daraus ergibt sich der folgende

Algorithmus 2 (Metropolis-Hastings) *(n fest)*
Die Schritte 1-3 entsprechen genau denen im vorangegangenen Algorithmus.
In m Iterationen führe aus:
Schritt 4: *Für* $i = 1, ..., n$*:* $\{$
4.1 Generiere einen Punkt (u_i^*, v_i^*) *nach der Vorschlags-Verteilung mit unabhängiger Farbe* c_i^* *nach* $Bernoulli(p_c)$*-Verteilung.*
4.2 Wechsle mit Wahrscheinlichkeit α *von* Θ *zu* $\Theta^*\}$

Da die so konstruierte Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch ist, werden die Werte von angenommenen Θ nach einer großen Zahl von Iterationen der a-posteriori-Verteilung folgen.

Reversible jump MCMC Algorithmus

Bei diesem von Green (1995) eingeführten Algorithmus für die Simulation von der a-posteriori-Verteilung gibt es drei mögliche Veränderungen der Menge Θ:

Geburt: Ein neuer Punkt auf dem Einheitsquadrat wird nach der Gleichverteilung generiert und nach der $Bernoulli(p_c)$-Verteilung gefärbt.

Tod: Ein Punkt der Menge Θ wird zufällig ausgewählt und entfernt.

Position-Farbe: ein zufällig ausgewählter Punkt wird versetzt und nach der $Bernoulli(p_c)$-Verteilung neu gefärbt.

Im letzten Fall wird die Akzeptanzwahrscheinlichkeit wie im vorangegangenen Algorithmus berechnet. Für Geburt und Tod muss die Definition von α verallgemeinert werden.

Im Fall Geburt gilt:

$$\alpha(\Theta, \Theta^*) = min\left(1, \frac{P(z|\Theta^*)\Pi(\Theta^*|n+1)\Pi(n+1)r_{death}(\Theta^*)}{P(z|\Theta)\Pi(\Theta|n)\Pi(n)r_{birth}(\Theta)q(u)}\left|\frac{\delta\Theta^*}{\delta(\Theta, u)}\right|\right)$$

mit $\Pi(n)$ der Dichte der Zufallsvariable n (Anzahl der Polygone), die hier einer $Poisson(\lambda)$-Verteilung folgen soll.
Die Wahrscheinlichkeiten für die drei Typen der Veränderung sollen jeweil $1/3$ betragen.
r_{birth} sei die Wahrscheinlichkeit, bei gegebenem Θ eine bestimmte Geburt vorzuschlagen, r_{death} sei die Wahrscheinlichkeit der entgegengesetzten Veränderung, sodass gilt:
$\frac{r_{death}(\Theta^*)}{r_{birth}(\Theta^*)} = \frac{d_{n+1}}{(n+1)b_n}$ mit $d_1 = 0$, $b_1 = 2/3$, $b_j = d_j = 1/3$, $j \geq 2$.

In der aktuellen Anwendung bedeutet das, dass eine Geburt mit Wahrscheinlichkeit $\alpha(\Theta^*, \Theta) = min(1, A)$ akzeptiert wird mit

$$A = \frac{d_{n+1}}{b_n(n+1)} \left(\frac{\lambda}{n+1} \right) \frac{exp\left\{ -\frac{1}{2} \log(\frac{1-p}{p}) \sum_{j,k} |z_{jk} - \mu_{jk}(\Theta^*)| \right\}}{exp\left\{ -\frac{1}{2} \log(\frac{1-p}{p}) \sum_{j,k} |z_{jk} - \mu_{jk}(\Theta)| \right\}}$$

Ähnliche Überlegungen ergeben $\alpha(\Theta, \Theta^*) = min(1, A^{-1})$ als Akzeptanzwahrscheinlichkeit für Tod.

Algorithmus 3 (RJMCMC) *(n variabel)*

Die Schritte 1-3 entsprechen denen im vorangegangenen Algorithmus.

In m Iterationen führe aus:

Schritt 4: *Für* $i = 1, ..., n$: $\{$

4.1 Generiere $u \sim U[0, 1]$ *und wähle Veränderungstyp Position-Farbe, falls* $u \leq 1/3$, *Geburt, falls* $1/3 < u \leq 2/3$, *sonst Tod.*

4.2 Führe die Veränderung aus und berechne PD^*

4.3 Berechne die Akteptanzwahrscheinlichkeit α

4.4 Wechsle von Θ *zu* Θ^* *mit Wahrscheinlichkeit* $\alpha\}$

Alternativ zum MAP kann man als Schätzwert für die erwartete Farbe eines Pixels auch den minimum mean squares estimate (MMSE) betrachten:

$$\hat{E}[\mu_{jk}(\Theta)] = \frac{1}{M-m} \sum_{t=m+1}^{M} \mu_{jkt}(\Theta),$$

d.h. von einer Simulation (M Schritte) werden ab einer "Einbrennzeit" m die Pixel-Werte gemittelt. Die Schätzung für das ganze Bild setzt sich aus diesen einzelnen Schätzungen zusammen.

Anwendung auf Mikroskopaufnahme von Muskelfasern

- Die beiden häufigsten Grauwerte im Bild werden als η_{-1} und η_1 gewählt.
- additive Störungen mit $\sigma = 10$
- Anzahl der Zellen: $n = 45$
- Intensität der Anzahl von Punkten: $\lambda = 50$, $r = 0.05$, $b = 0.3$ als Parameter des Strauß-Prozesses
- $M = 250.000$ Schritte

- Beobachtung: Segmentierung recht gut, allerdings werden Polygone erzeugt, wo keine sein sollten (auf den Zellwänden).
- Korrektur: Pixel nahe an Kanten der Voronoi-Zellen werden als Zellwand markiert
- Endergebnis: Segmentierung nach unterschiedlichen Zelltypen ganz gut, allerdings werden einzelne Zellen selten richtig lokalisiert.

5 Weitere Anwendungen

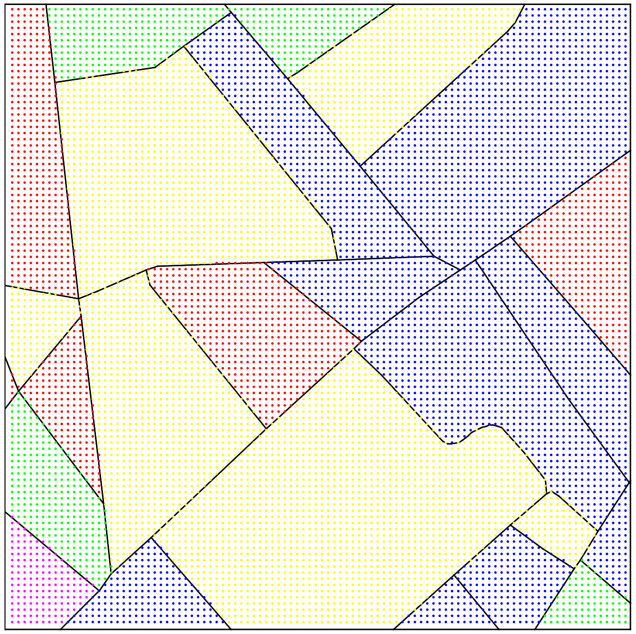

Figure 4: Pariser Straßenzellen

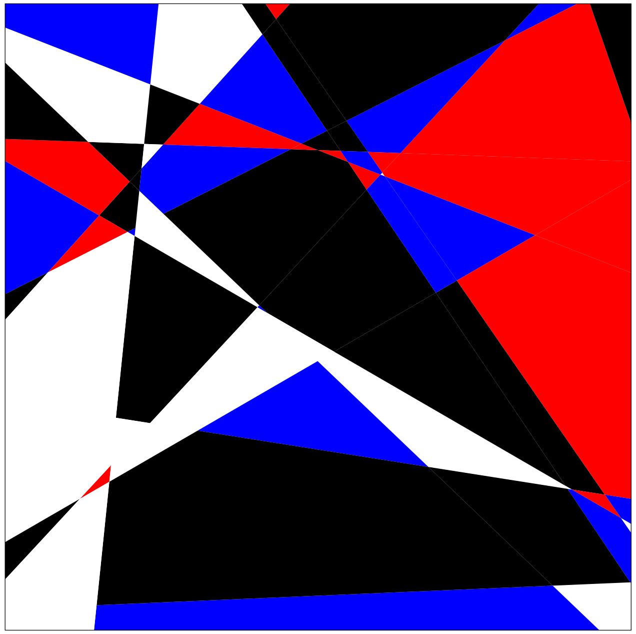

Figure 5: gefärbte Poisson-Line Tessellation

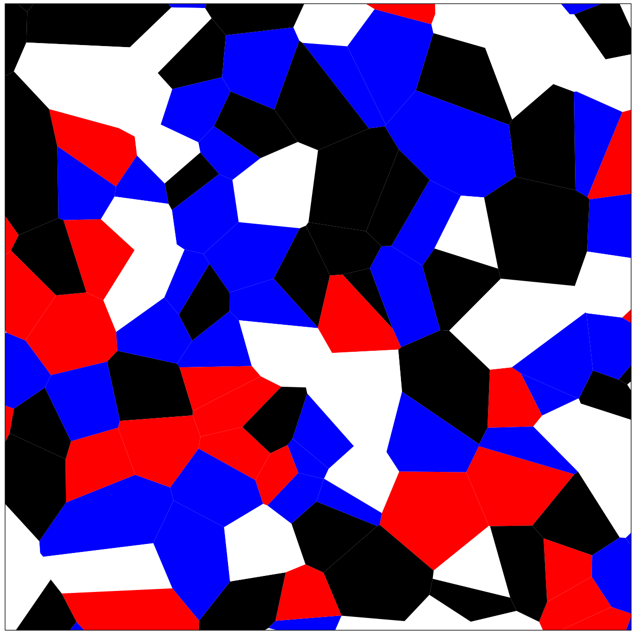

Figure 6: gefärbte Poisson-Voronoi-Tessellation

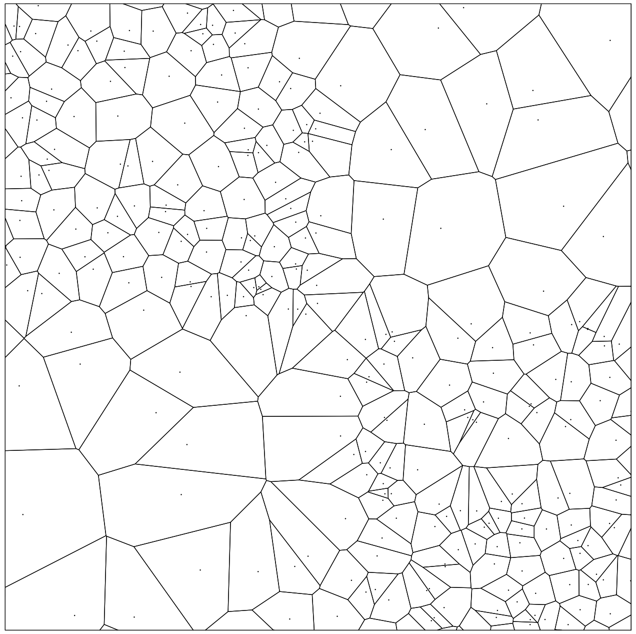

Figure 7: inhomogene Poisson-Voronoi Tessellation

6 Literatur

I.L. Dryden, R.Farnoosh, C.C. Taylor Image Segmentation using Voronoi Polygons and MCMC, with Application to Miscle Fibre Images

P.J. Green (1995) Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination, Biometrika, 82, 711-732

J.Møller, Ø. Skare Coloured Voronoi Tessellations for Bayesian image analysis and reservoir modelling

G. Nicholls (1998) Bayesian image analysis with Markov chain Monte Carlo and colored continuum triangulation mosaics. J.R. Statist. Soc. B60, 643-659