Einführung in die Fuzzy-Logik und deren Anwendung in der Bildverarbeitung

Stefanie Weißenborn
30. Juni 2003

1 Einführung und Historische Hintergründe

- etwa 400 v. Chr. Parminedes: Vorschlag zur ersten Version vom "Gesetz der ausgeschlossenen Mitte" von Aristoteles: stieß sofort auf heftige Proteste u.a. von Heraclit
- Grundlagen zu heutigen Fuzzy-Logik legte Plato, der festhielt, daß es eine sog. "dritte Region" gäbe
- zu Beginn des 20. Jhd. Lukasiewics: Einführung der ersten systematische Alternative zur bi-bewerteten Logik von Aristoteles (*möglich* als numerischer Wert zwischen "richtig" und "falsch")
- 1965 erste Veröffentlichung Lotfi A. Zadeh's, Professor der University of Berkeley, Kalifornien, über Fuzzy-Mengen ["Fuzzy Sets", Info. & Ctl., Vol. 8, 1965]

- 1968 L. A. Zadeh "Fuzzy Algorithms", Info. & Ctl., Vol. 12
- Zadeh's Theorie, die vorschlug, sog. *membership function*s auf dem reellen Intervall $[0, 1]$ zu definieren, blieb zunächst kaum beachtet
- erst 1974 erste praktische Anwendung: Regulierung einer Dampfmaschine mittels Fuzzy-Logik durch Mamdani & Assilian
- ab 1985: Entwicklung der ersten Computer-Chips basierend auf Fuzzy-Logik in den Bell Laboratories;
  Anwendung: Kameras, Camcorder, Waschmaschinen...
- heutzutage: Entwicklung der Fuzzy-Logik zu einem der schnell-wachsenden Sektoren in der angewandten Künstlichen Intelligenz

2 Das Prinzip der Fuzzy-Logik

Grundlagen: Hauptmerkmal der Notation von Fuzzy-Systemen: Wahrheitswerte (in der Fuzzy-Logik) bzw. Grade der Zugehörigkeit (bei Fuzzy-Mengen) werden als Wert *zwischen* 0.0 und 1.0 dargestellt

0.0 entspricht "falsch" und 1.0 steht für "richtig"

Einführendes Beispiel:

- Die Aussage sei

  "Jane ist alt"

  Wenn Jane 75 Jahre alt ist, könnten wir der Aussage einen Wahrheitsgehalt von 0.80 zusprechen.

- in Mengen-Terminologie ausgedrückt, könnte die Aussage wie folgt lauten:

  "Jane ist ein Mitglied der Menge alter Leute."

- übertragen in Fuzzy-Mengen wäre die Aussage:

  $$mALT(Jane) = 0.80$$

  wobei m die sog. *membership function* ist, die einen Wert zwischen 0.0 und 1.0 zurückliefert und in diesem Fall auf der Menge alter Menschen definiert ist.

Unterschied zwischen Fuzzy-Systemen und der Wahrscheinlichkeitstheorie:

- beide operieren auf dem selben numerischen Intervall
- beide haben ähnliche Werte:
  0.0 repräsentiert Falsch (bzw. Nicht-Zugehörigkeit)
  1.0 repräsentiert Richtig (bzw. Zugehörigkeit)
- **Unterscheidung** wird bei folgenden Aussagen notwendig:

  aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung entstehen Aussagen der natürlichen Sprache in folgender Art:

  "Die Wahrscheinlichkeit, daß Jane alt ist, beträgt 80%."

in Fuzzy-Terminologie lautet eine Aussage hingegen wie folgt:

"Jane's Grad der Zugehörigkeit zur Menge der alten Menschen beträgt 0.8."

Der semantische Unterschied beider Aussagen ist signifikant:

- die erste Sichtweise impliziert, daß Jane entweder alt oder nicht alt ist (ganz nach dem "Gesetz der ausgeschlossenen Mitte") -
wir haben lediglich eine *80%-ige Chance, zu wissen*, zu welcher Menge sie gehört
- im Gegensatz dazu ist Jane nach der Fuzzy-Terminologie
mehr oder weniger alt, was dem Wert 0.8 entspricht

Formalismen der Fuzzy-Logik

Um ein vollständiges System der Fuzzy-Logik einzuführen, müssen die Mengen-Operationen

Leer
Gleichheit
Komplement (nicht)
Teilmenge
Vereinigung (oder)
Schnitt (und)

definiert werden.

Definition 1 Wir bezeichnen mit X eine Menge von Objekten, deren Elemente x genannt werden. Demnach gilt $X = \{x\}$.

Definition 2 Eine Fuzzy-Menge A in X wird charakterisiert durch eine "*membership function*" $mA(x)$, welche

- jeden Punkt aus X auf das reellwertige Intervall $[0.0, 1.0]$ abbildet
- sich 1.0 annähert, je stärker die "Zugehörigkeit" von x in A.

Definition 3 Die Menge A wird als LEER bezeichnet, falls gilt:

$$mA(x) = 0.0 \ \forall x$$

Definition 4 Die Mengen A und B werden als GLEICH bezeichnet, falls gilt:

$$mA(x) = mB(x) \ \forall x \Longleftrightarrow mA = mB$$

Definition 5 Die Menge A' wird als $\mathrm{KOMPLEMENT}$ von A bezeichnet, falls gilt: $mA' = 1 - mA$

Definition 6 Die Menge A wird als $\mathrm{TEILMENGE}$ von B bezeichnet, falls gilt: $mA <= mB$

Definition 7 Die Menge C wird als $\mathrm{VEREINIGUNG}$ von A und B bezeichnet, falls gilt: $mC(x) = MAX\{mA(x), mB(x)\}$

Definition 8 Die Menge C wird als $\mathrm{SCHNITT}$ von A und B bezeichnet, falls gilt: $mC(x) = MIN\{mA(x), mB(x)\}$

Der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Fuzzy-Logik ist am deutlichsten für die Operatoren VEREINIGUNG (ODER) sowie SCHNITT (UND). Für unabhängige Ereignisse in der WR ist die Operation für UND die Multiplikation, in der Fuzzy-Logik hingegen das Minimum der Argumente:

Beispiel hierzu:

$x :=$ Bob

$S := \{$intelligente Menschen$\}$

$T := \{$große Menschen$\}$

außerdem gelte $mS(x) = 0.9$ und $mT(x) = 0.9$

$\Longrightarrow$ das Ergebnis der UND-Verknüpfung

- nach WR ist: $mS(x) * mT(x) = 0.81$
- das Fuzzy-Ergebnis ist: $MIN\{mS(x), mT(x)\} = 0.9$

Das Ergebnis aus der WR, das kleiner als jeder Einzelwert ist, wird nur sinnvoll, wenn es als die Wahrscheinlichkeit "etwas zu wissen" interpretiert wird. Wenn wir jedoch in der Fuzzy-Terminologie denken, ist die Bedeutung der beiden Funktionen mS und mT:
"Bob ist sehr klug" und "Bob ist sehr groß".
Wenn wir weiterhin annehmen, daß "sehr" ein stärkerer Ausdruck ist als "ziemlich", und wir "ziemlich" den Wert 0.81 zuweisen, wird der Unterschied beider Auffassungen deutlich:

- Interpretation aus WR: WENN Bob sehr klug ist UND Bob sehr groß ist, DANN ist Bob eine *ziemlich* große, intelligente Person.
- Interpretation mit Fuzzy-Logik: WENN Bob sehr klug ist UND Bob sehr groß ist, DANN ist Bob eine *sehr* große, intelligente Person.

Das Problem wird noch deutlicher, wenn weitere Faktoren in die UND-Verknüpfung aufgenommen werden: das Ergebnis einer unendlichen Serie von UND's wird gegen 0 gehen.
Fuzzy-Theoretiker argumentieren, daß ein Ergebnis von 0.59 (das einem verbalen Ausdruck von "einigermaßen" entsprechen könnte) als UND-Verknüpfung von 5 Faktoren des Wertes 0.9 ("sehr") falsch ist.

Analog verhält es sich mit der ODER-Verknüpfung, deren Wahrscheinlichkeitstheoretische Version folgende ist:

$$\text{A ODER B} \Longleftrightarrow (A + B - A * B).$$

Hier sollten Verknüpfungen von schwacher Zugehörigkeit keine starke Zugehörigkeit ergeben, sondern nach unten begrenzt sein durch den Faktor mit dem stärksten Zugehörigkeitgrad.

Weitere Merkmale

- es besteht die Möglichkeit, sog. "hedges" bzw. "Modifikatoren" von Fuzzy-Werten zu definieren
- dies ergab sich aus den Bemühungen einer engen Verbindung zwischen natürlicher Sprache und Fuzzy-Logik, sowie den Bemühungen, Fuzzy-Aussagen durch mathematische Berechnungen zu erzeugen
- **einfaches Beispiel:**
  Transformation der Aussage

  "Jane ist alt" in *"Jane ist sehr alt"*

- Der Modifikator "sehr" ist meist definiert als

$$m\text{"}sehr\text{"}A(x) = (mA(x))^2$$

Demnach würde gelten:

$$mALT(Jane) = 0.8 \Longrightarrow m\text{"}sehr - alt\text{"}(Jane) = 0.64$$

- weitere gebräuchliche "hedges":

$$m\text{"}mehr - oder - weniger\text{"}A(x) = \sqrt{mA(x)}$$

- außerdem existieren "hedges" noch für "ein wenig", "ziemlich", "etwas" usw.

3 Kritik & Anwendung

- ein Kritikpunkt ist die Zuweisung von Zahlenwerten zu linguistischen Ausdrücken (siehe Beispiel: "sehr" $\leftrightarrow$ 0.9, "ziemlich" $\leftrightarrow$ 0.81)
- formale Kritik: "für die beiden einzigen Bereiche, in denen Fuzzy-Logik möglicherweise gebraucht würde, kann man zeigen, daß sie unnötig ist"
- der Beweis für die Notwendigkeit wäre erbracht für
  1. die Natur von Richtig und Falsch: wenn man zeigen könnte, daß beide Werte NICHT diskret sind
  2. die Anwendung der Fuzzy-Systeme: wenn sich durch ihre Anwendung anstelle der klassischen Logik irgendeine Vereinfachung in Berechnungen ergäbe

Anwendungen

- erste große Anwendung im Bereich der Zementofensteuerung:
  1. intern 4 verschiedene Zustände des Zements überwachen
  2. vier Abläufe steuern
  3. und ungefähr 40-50 Faustregeln über deren Zusammenhang einhalten

  und zwar alles unter der Zielsetzung, eine große Anzahl hochkomplexer chemischer Reaktionen zu kontrollieren
- wichtiger Gegenstand der Forschung für die Zukunft ist im Bereich der dynamischen Steuerung zu finden
- Fuzzy-Systeme werden hierbei im Zusammenhang mit Schwellenwerten angewendet und es muß stark darauf geachtet werden, daß keine Oszillationen zwischen Schwellenwerten enstehen

außerdem findet Fuzzy-Logik Anwendung im Bereich der

- Informations-Wiederbeschaffungs-Systeme
  Navigationssysteme in automatischen Fahrzeugen
  automatischen Steuerung für den Betrieb von Zügen
  Roboter-Steuerung
- weitere Anwendungsgebiete: Experten-Systeme, z.B.
  Entscheidungsunterstützende Systeme, Finanzplaner,
  Diagnose-Systeme in der Sojabohnen-Zucht,
  ein meteorologisches Expertensystem für die Bestimmung geeigneter
  Felder für die Gummibaum-Pflanzung in China
- Waschmaschinen: der Waschvorgang wird unter Beachtung der
  Füllmenge, der Gewebe und der Waschmittelmenge optimiert

4 Fuzzy Filter in der Bildverarbeitung

Störungsarten bei Bildern

- die beiden verbreitetsten Arten von Störung sind **impulse noise** (Salz und Pfeffer) sowie **random noise** (Gauß'sche Störung)
- *impulse noise* wird durch einen Störungparameter p bestimmt
- *random noise* wird hingegen durch Erwartungswert und Varianz festgelegt
- bei *impulse noise* sind große Teile des Bildes ungestört, während die gestörten Bereiche dafür sehr stark vom Original abweichen
- *random noise* hingegen ist großflächig und stellt eine weit größere Herausforderung für die Filterung dar

- es gab viele Bemühungen, lineare und nicht-lineare Filter zu entwickeln, wobei die linearen Filter nicht in der Lage sind, *impulse noise* effektiv zu reduzieren und sogar dazu tendieren, die Schärfe des Bildes zu verwischen
- zur Bearbeitung *impulse noise*-gestörter Bilder ist demnach die Verwendung von sog. Median-Filter, eine nicht-lineare Filterart, empfehlenswert

Eigenschaften der Median-Filter

1. sie haben eine gute schärfeerhaltende Eigenschaften
2. filtern *impulse noise* effektiv
3. haben eine akzeptable störungsvermindernde Eigenschaft in den sehr einheitlichen Bildbereichen

Funktionsweise: mit Hilfe eines Fensters, das über das gesamte Bild bewegt wird, kann das zentrierte Pixel unter Berücksichtigung der *Mediane zu allen* anderen Fenster-Pixel ggf. ersetzt werden

Vorteil: Implementation eines Standard-Median-Filters ist einfach und die Bildbearbeitung relativ schnell

Nachteil: bei Anwendung auf *random noise*-gestörte Bilder ist das Ergebnis dagegen durchschnittlich, daher sind zur Bearbeitung *random noise*-gestörter Bilder sog. Moving-Average-Filter angebracht

Eigenschaften der Moving-Average-Filter

1. können *random noise* glätten
2. können *impulse noise* nicht beeinflussen

Funktionsweise: mit Hilfe eines Fensters, das über das gesamte Bild bewegt wird, kann das zentrierte Pixel unter Berücksichtigung des *Durchschnittes aller* anderen Fenster-Pixel ggf. ersetzt werden

Vorteil: Implementation ist einfach

Nachteil: sind schlecht schärfeerhaltend

Klassifikation der Fuzzy-Filter

je nach Filter-Strategie werden 2 Klassen unterschieden

1. klassische Filter
2. Fuzzy-Filter

5 Einfache Fuzzy-Filter

Definitionen von Fuzzy-Filtern

Sei $x(i,j)$ der Input eines 2-dimensionalen Fuzzy-Filters.
Dann ist der Output definiert als

$$y(i,j) = \frac{\sum_{(r,s)\in A} F[x(i+r,j+s)] \cdot x(i+r,j+s)}{\sum_{(r,s)\in A} F[x(i+r,j+s)]} \tag{1}$$

Hierbei stellt

- $F[x(i,j)]$ eine Gewichtungsfunktion dar

und

- A den betreffenden Fensterausschnitt.

1. Der median filter (MED)

hierfür ist die Gewichtungsfunktion definiert als

$$F_{med}[x(i+r,j+s)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } x(i+r,j+s) = x_{med}(i,j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

so daß der Ausgabewert $y(i,j)$ durch den Median $x_{med}(i,j)$ aus allen Werten $x(i+r,j+s)$ im Fenster A ersetzt wird.

2. Der moving average filter (MAV)

hierfür ist die Gewichtungsfunktion definiert als

$$F_{mav}[x(i+r,j+s)] = 1 \tag{3}$$

Den MAV kann man sich als 2-dimensionalen rechteckigen Filter vorstellen, der alle Input-Werte $x(i+r,j+s)$ im Fenster A überdeckt.

3. Der "Gaussian fuzzy filter with median center" (GMED)
hierfür ist die Gewichtungsfunktion definiert als

$$F_{gmed}[x(i+r,j+s)] = e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x(i+r,j+s)-x_{med}(i,j)}{\sigma(i,j)}\right]^2} \tag{4}$$

wobei $x_{med}(i,j)$ der Median und $\sigma(i,j)$ die Varianz aller Input-Werte $x(i+r,j+s)$ im Fenster A sind.

4. Der "Gaussian fuzzy filter with moving average center" (GMAV)

hierfür ist die Gewichtungsfunktion definiert als

$$F_{gmav}[x(i+r,j+s)] = e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x(i+r,j+s)-x_{mav}(i,j)}{\sigma(i,j)}\right]^2} \text{ für } r,s \in A \qquad (5)$$

wobei $x_{mav}(i,j)$ der Durchschnitt und $\sigma(i,j)$ die Varianz aller Input-Werte $x(i+r,j+s)$ im Fenster A sind.

6 Zusammengesetzte Fuzzy-Filter

Einführende Notationen

- betrachtet wird ab nun ein Bild Q der Größe $N \times M$
- jedes Pixel aus Q ist bestimmt durch die Koordinaten (x, y)
- durch $q(x, y)$ sei die Graustufe bzw. Helligkeit des Pixels (x, y) definiert, wobei

$$0 \leq q \leq L - 1$$

- demnach ist L die Anzahl der Graustufen eines Bildes

- wird ein Farb- oder Mehrkanal-Bild **Q** betrachtet, so wird es durch einen Vektor $\mathbf{q}(x, y)$ dargestellt
- die Anzahl der Farben im Bild definiert hierbei die Dimension n des Vektors:

$$\mathbf{q}(x, y) = q_{\bar{1}}(x, y), \dots, q_{\bar{n}}(x, y)$$

- die quadratischen Ausschnitte bzw. "Fenster" eines Bildes werden mit W bezeichnet
- die Pixel in einem Fenster W der Größe $l \times l$ werden dargestellt durch $q_1(x, y), q_2(x, y), \dots, q_{l^2}(x, y) = q_i(x, y)$ für $i = 1, \dots, l^2$ wobei das Pixel in der Mitte i.d.R. mit $q(x, y)$ bezeichnet wird

Die "membership function" bei Fuzzy-Filtern

- wie in der Fuzzy-Theorie eingeführt wurde, existieren verschiedene Grade der Zugehörigkeit von Elementen x zu einer Menge A, die charakterisiert werden durch eine sog. *membership function* $\mu_A(x)$
- sei mit X eine Obermenge von Elementen x definiert; dann ist die Fuzzy-Menge $A \subset X$ definiert als

$$A = \{(x, \mu_A(x))|x \in X\}$$

Multipass fuzzy filter (MFF) [F. Russo 1995]

– filtert nicht nur *impulse noise* sondern gleichzeitig auch *random noise*

– besteht aus 3 Blöcken: jeder einzelne basiert auf einem Fuzzy-Filter, der Störungen filtert, ohne die Bildstruktur zu beeinflussen, so daß man sie auch mehrmals hintereinander anwenden könnte, ohne das Bild zu verwischen

– jeder Operator benutzt nur ganz bestimmte Fuzzy-Regeln um genau die Störung heraus zu filtern, für die er entwickelt wurde

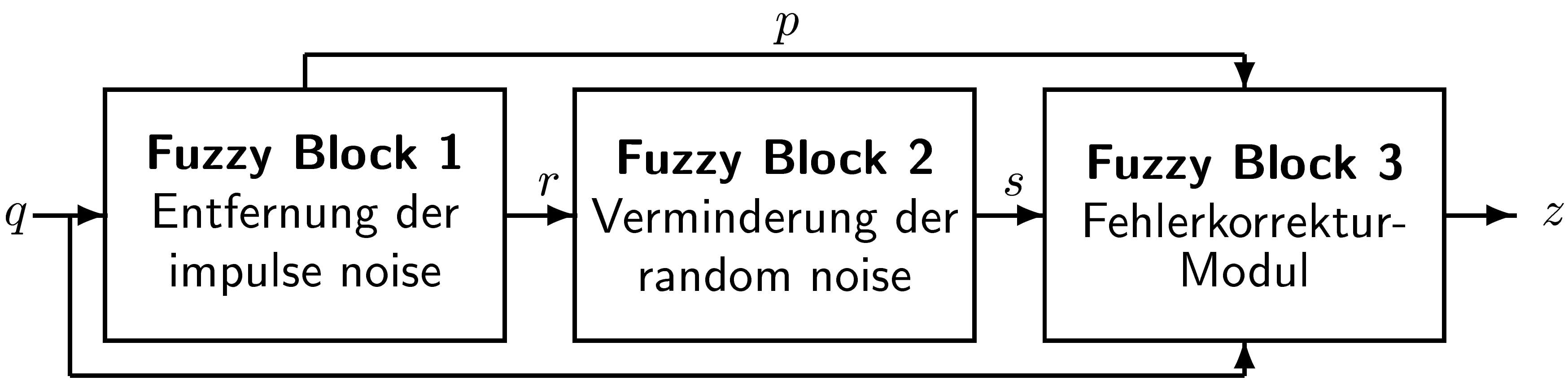

Abbildung 1 Struktur des mutilpass fuzzy filter (MFF)

Abbildung 2 Fenster-Konfigurationen
zur Eliminierung von *impulse noise*

Der erste Operator

- soll *impulse noise* filtern und den Output $r(x, y)$ erzeugen
- hierzu werden die 12 Vergleichsfenster aus Abbildung 2 verwendet
- der Input des Operators ist $\Delta w_{i,j}[q(x, y)]$ und ist gegeben als die Helligkeits-Differenz aus jedem der schwarz markierten Nachbar-Pixel und $q(x, y)$ für jedes der Fenster $W_1, \ldots, W_{12}$
- die Berechnung erfolgt gemäß

$$\Delta w_{i,j}[q(x, y)] = \{w_i \in W_j[q(x, y)]\} - q(x, y)$$

für

$$i = 1, \ldots, 8 \text{ und } j = 1, \ldots, 12$$

- diese Differenzen sowie die erste *membership function* dienen dazu, einen Korrektur-Term $\Delta r(x,y)$ zu berechnen
- diese erste benötigte *membership function* heißt μ_{LA} und ist definiert als

$$\mu_{LA}(u) = \begin{cases} 0 & \text{falls } -L+1 \leq u < a \\ \frac{b(u-a)}{(L-1)(b-a)} & \text{falls } a \leq u < b \\ \frac{u}{(L-1)} & \text{falls } b \leq u \leq L-1 \end{cases}$$

- damit kann der Korrektur-Term nun berechnet werden über

$$\Delta r(x,y) = (L-1)\{\max_{j=1,\dots,12}(\min_{i=1,\dots,8}[\mu_{LA}(\Delta w_{i,j}[q(x,y)])]) - \max_{j=1,\dots,12}(\min_{i=1,\dots,8}[\mu_{LA}(-\Delta w_{i,j}[q(x,y)])])\}$$

- er besteht aus 2 Sub-Termen, wobei der erste die positiven Helligkeits-Differenzen und der zweite die negativen analysiert
- der Output des ersten Operators kann somit berechnet werden über $r(x,y) = q(x,y) + \Delta r(x,y)$
- die Fuzzy-Menge LA (für Large), der ersten *membership function* wurde so gestaltet, daß *impulse noise* gefiltert wird, ohne die Bilddetails zu beeinflussen
- abhängig von der Amplitude der *impulse noise* schwankt der Output des Operators von "keiner Korrektur" $(= 0)$ bis zur "maximalen Korrektur" von $u/(L-1)$
- bei kleiner Amplitude wird davon ausgegangen, daß es sich um keine meßbare Störung handelt - demnach gibt es keine Filterung

Der zweite Operator

- soll *random noise* mit typischerweise kleinen Amplituden herausfiltern
- der Input des Operators ist $r(x, y)$
- der zu erzeugende Output $s(x, y)$ wird als guter Schätzer für das originale ungestörte Bild betrachtet
- hierzu wird ein Fenster der Größe 5×5 betrachtet, dessen Zentrum in (x, y) liegt
- wie schon beim ersten Operator, sind die Input-Werte gegeben durch Helligkeits-Differenzen Δw_i mit $i = 1, \ldots, 20$ im jeweils betrachteten Fenster

- diese Differenzen sowie die nächste *membership function* dienen dazu, einen neuen Korrektur-Term $\Delta s(x, y)$ zu berechnen
- diese dritte benötigte *membership function* heißt μ_{SM} und ist definiert als:

$$\mu_{SM}(u) = \begin{cases} 0 & \text{falls } -L+1 \leq u < -c \\ \frac{u+c}{2c} & \text{falls } -c \leq u < c \\ \frac{3c-u}{2c} & \text{falls } c \leq u < 3c \\ 0 & \text{falls } 3c \leq u \leq L-1 \end{cases}$$

- damit kann der Korrektur-Term nun berechnet werden über

$$\Delta s(x, y) = \frac{c}{20}\left(\sum_{i=1}^{20} \mu_{SM}(\Delta w_i) - \sum_{i=1}^{20} \mu_{SM}(-\Delta w_i)\right)$$

- der Output des zweiten Operators kann somit berechnet werden über $s(x,y) = r(x,y) + \Delta s(x,y)$
- die Fuzzy-Menge hierbei ist SM (für Small), und trägt diese Bezeichnung, da sie zur Filterung der *random noise* gestörten Pixel dient, die typischerweise kleine Amplituden aufweisen
- der Parameter c der *membership function* μ_{SM} dient der Steuerung der schärfeerhaltenden Eigenschaften dieses Filter-Blocks

- für den dritten Operator werden wir $p(x,y) = \mid \Delta[r(x,y)] \mid$ benötigen
- dieses p kann man als Schätzer der Amplitude der möglichen *impulse noise* des Pixels an der Stelle (x,y) betrachten

Der dritte Operator

- um das endgültige Bild Z zu erzeugen, wurde ein letzter Operator, das "Fehlerkorrektur-Modul" geschaffen
- da der zweite Operators *random noise* gefiltert hat, sind nun keine Störungen mehr mit kleiner Amplitude vorhanden
- das bedeutet, daß bei erneuter Anwendung des ersten Operators *impulse noise*-Filterung verbessert werden kann
- aus diesem Grund ist der dritte Operator dem ersten ziemlich ähnlich:
  er verwendet "Large-" und "Medium-" Fuzzy-Mengen und erzeugt zunächst aus dem Input Helligkeits-Differenzen für $i = 1, \ldots, 8$ im jeweils betrachteten Fenster

- die Berechnung erfolgt gemäß

$$\Delta w_{i,j}[s(x,y)] = \{w_i \in W_j[s(x,y)]\} - q(x,y)$$
$$\text{für } i = 1, \ldots, 8 \text{ und } j = 1, \ldots, 12$$

- diese Differenzen dienen nun dazu, einen Korrektur-Term $\Delta z(x,y)$ (ganz analog zu $\Delta r(x,y)$ im ersten Operator) zu berechnen

- der Output dieses letzten Operators kann dann berechnet werden über

$$z(x,y) = \begin{cases} q(x,y) + \Delta z(x,y) & \text{falls } p(x,y) > 0 \\ s(x,y) & \text{falls } p(x,y) = 0 \end{cases}$$

Fuzzy multilevel median filter (FMMF) [J. Y. Jiu 1996]

- filtert nur *impulse noise*
- basiert auf einem *multilevel median filter*, der durch die Aufnahme von Fuzzy-Regeln erweitert wurde
- der multilevel median filter ist folgendermaßen gestaltet: $W(x, y)$ sei ein quadratisches Fenster der Größe $(2l + 1) \times (2l + 1)$ mit Zentrum in (x, y)

- weiter sind 4 Unterfenster wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
W_1(x,y) &= q(x, y+j) & -l \leq j \leq l \\
W_2(x,y) &= q(x+j, y+j) & -l \leq j \leq l \\
W_3(x,y) &= q(x+j, y) & -l \leq j \leq l \\
W_4(x,y) &= q(x+j, y-j) & -l \leq j \leq l
\end{aligned}
$$

- seien $med_i(x,y)$ für $i = 1,2,3,4$ die Mediane jedes Unterfensters
- dann kann man zwei Variablen med_{max} und med_{min} definieren:

$$med_{max}(x,y) = \max_{i=1,\ldots,4} med_i(x,y)$$

und

$$med_{min}(x,y) = \min_{i=1,\ldots,4} med_i(x,y)$$

- der Output des Filters wäre dann

$$r(x,y) = med[med_{max}(x,y), med_{min}(x,y), q(x,y)]$$

- dieser Median-Filter wird jedoch verbessert, wenn noch zwei weitere Terme aufgenommen werden
- diese wiederum beziehen eine sog. credibility-function C in ihre Berechnung ein
- um diese "Zuverlässigkeit" C zu bestimmen, werden die Differenzen $|med_i - w_{ij}|$ aus den Medianen des i-ten Unterfensters und jedem einzelnen Pixel w_{ij} für $i = 1, \ldots, 4$ und $j = -l, \ldots, l$ dieses betrachteten Unterfensters bestimmt

- nun gelten folgende Kriterien für die Definition der credibility-function C:
  - wenn mindestens eine der Differenzen $|med_i - w_{ij}|$ für ein t "sehr groß" ist ($|med_i - w_{ij}| \geq t$), dann sollte C für dieses Unterfenster sehr klein sein [für $L = 256$: $30 \leq t \leq 40$]
  - wenn mindestens eine der Differenzen $|med_i - w_{ij}|$ "nahe Null" ist, dann sollte C für dieses Unterfenster ebenfalls sehr klein sein [für $L = 256$: $|med_i - w_{ij}| < 5$]
  - wenn alle Differenzen $|med_i - w_{ij}|$ "mittel" sind, dann sollte C für dieses Unterfenster sehr groß sein

  man kann natürlich weitere Vorschriften für die Definition von C finden

Abbildung 3 Credibility functions
von Jui vorgeschlagen zur "Fuzzyfizierung"
der Zuverlässigkeit der Mediane jedes Unterfensters

- hieraus kann für jedes der vier Unterfenster ein $s_i(x, y)$ wie folgt berechnet werden:

$$s_i(x, y) = \sum_{j=l-1}^{l+1} C_{med}(|med_i - w_{ij}|) \text{ für } i = 1, \ldots, 4$$

- betrachtet man nun die beiden größten Werte für $s_i(x, y)$ aus allen Unterfenstern, und bezeichnet für die zugehörigen i die Mediane med_i mit $med_{i_1}(x, y)$ und $med_{i_2}(x, y)$, dann ist der endgültige Output dieses Filters gegeben als

$$\begin{aligned} r(x, y) = med[&med_{max}(x, y), med_{min}(x, y), \\ &q(x, y), med_{i_1}(x, y), med_{i_2}(x, y)] \end{aligned}$$

7 Vergleich der Filter, Maßzahlen

- die Untersuchung wurde darauf beschränkt, wie die Filter auf *impulse noise* reagieren und wie sie diese reduzieren
- *random noise* wurde nicht beachtet, da es nur einen Filter gibt, der diese berücksichtigt und es daher als nicht relevant genug für Untersuchungen galt
- zum Vergleich der einzelnen Filter gibt es verschiedene Maßzahlen

Die Maßzahlen für zusammengesetzte Filter

1. mean average error (MAE) ist definiert als
$$MAE = \frac{\sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{M}|q_f(x,y)-q_o(x,y)|}{N\cdot M}$$
2. mean square error (MSE) ist definiert als
$$MSE = \frac{\sqrt{\sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{M}|q_f(x,y)-q_o(x,y)|^2}}{N\cdot M}$$
3. normalized mean square error (NMSE) ist definiert als
$$NMSE = \frac{\sqrt{\sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{M}|q_f(x,y)-q_o(x,y)|^2}}{\sqrt{\sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{M}q_o(x,y)^2}}$$
4. signal to noise error ratio (SNR) ist definiert als
$$SNR = \frac{\sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{M}|q_f(x,y)-q_o(x,y)|^2}{\sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{M}|q_n(x,y)-q_o(x,y)|^2}$$

mit: Q_f gefiltertes, Q_o originales und Q_n gestörtes Bild

Tabellen

die verwendeten Parameter waren für den multipass fuzzy filter (MFF):

$a_1 = 100$, $a_2 = 70$, $b = 60$ und $c = 30$

(optimale Werte wurden jeweils experimentell bestimmt)

Filter	MAE	MSE	NMSE	SNR
Störung	4.5	449	0.024	
MFF	3.9	75	0.004	0.17
FMMF	2.6	63	0.003	0.14

Tabelle 1 Statistische Ergebnisse für das Graustufen-Bild "Lena"

Filter	MAE	MSE	NMSE	SNR
Störung	64.52	12222	1.19	
MFF nach 1 Iter.	28.05	4846	0.47	0.250
MFF nach 6 Iter.	6.82	317	0.03	0.026

Tabelle 2 Statistische Ergebnisse
für das Graustufen-Bild "Bear"

Die Maßzahl für die einfachen Filter

- in allen Simulationen wurden Bilder der Dimension $M1 \times M2$ $(= 256 \times 256)$ Pixel verwendet
- in jedem Bild wurden die Pixel $s(i,j)$ für $1 \leq i \leq M1$ und $1 \leq j \leq M2$ von *impulse noise* oder *random noise* gestört
- für die Filterung wurden quadratische Fenster der Größe $N \times N$ mit $N = 3, 5, 7$ verwendet
- der mean squared error (MSE) zwischen dem gefilterten Output-Bild $y(i,j)$ und dem Originalbild $s(i,j)$ der Dimension $M1 \times M2$ ist definiert als $MSE = \frac{\sum_i^{M1} \sum_j^{M2} [y(i,j) - s(i,j)]^2}{M1 \cdot M2}$

Abschließende Bemerkungen

- jeder der vorgestellten einfachen Fuzzy-Filter wendet eine gewichtete *membership function* auf einen Bildausschnitt an, um den Wert für das zentrierte Pixel zu berechnen
- sie sind schnell und einfach zu implementieren und filtern leichten, mittleren und starken *impulse noise* mit unterschiedlichem Erfolg
- abhängig von den Merkmalen des Bildes sind die Outputs der Filter leicht unterschiedlich
- generell sind die Ergebnisse für Bilder mit ähnlichen Charakteristiken von vergleichbarer Qualität
- in der Praxis bleiben die Schärfe und die Details am besten für kleine Fenstergrößen ($N = 3$) erhalten

- mit zunehmender Fenstergröße werden die Bilder unscharf; sind sie jedoch stark gestört, nimmt die Tauglichkeit der Filter zu
- daher die Faustregel:
  auf schwach gestörte Bilder sind kleine Fenster anzuwenden
  und auf stark gestörte Bilder eher die großen Fenster

Literaturverzeichnis

1. James F. Brule' "Fuzzy Systems - a tutorial" ©James F. Brule' 1985
   www.austinlinks.com/Fuzzy/tutorial.html

2. Brigette Krantz "A crisp Introduction to Fuzzy Logic"
   www −
   ugrad.cs.colorado.edu/~cs3202/papers/Brigette_Krantz.html

3. Mike Nachtegael, Dietrich Van der Weken, Dimitri Van De Ville, Etienne E. Kerre (Eds.)
   "Fuzzy Filters for Image Processing",
   Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, part 1,2

4. S. Haack "Do we need fuzzy logic?", Int. Jrnl. of Man-Mach. Stud., Vol. 11. 1979