Prof. Dr. V. Schmidt / Dipl.-Math.oec. H. Schmidt

SS 2003
Blatt 4
24.06.2003

Übungen zu Wirtschaftsstatistik

Abgabe: Dienstag, 08.07.2003, vor den Übungen

1. Ein Medikament steht im Verdacht, als Nebenwirkung das Reaktionsvermögen zu reduzieren. In einer Studie mit 10 zufällig ausgewählten Patienten wurde deshalb das Präparat in verschiedenen Dosierungen verabreicht. Danach musste der Patient einen Knopf drücken, sobald er ein bestimmtes Signal erhielt. Die Zeit zwischen Signal und Knopfdruck wurde als Maß für das Reaktionsvermögen verwendet. In der folgenden Tabelle sind die Dosierung X in mg und die dazugehörige Reaktionszeit Y in Sekunden dargestellt.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	5	3	8	2	2	10	8	7	4
y_i	1	6	1	6	3	2	8	5	6	2

   (a) Was sagt das Streudiagramm über den Zusammenhang von X und Y aus?

   (b) Passen Sie eine Gerade an die beobachteten Datenpunkte an, unter Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Beurteilen Sie die Güte der Anpassung (*Hinweis:* Der empirische Korrelationskoeffizient ist $\rho_{XY} = 0.8934$).

   (c) Ein Patient wird mit einer Dosis von 5,5 mg des Medikaments behandelt. Welche Reaktionszeit prognostizieren Sie?

   (d) Wie lässt sich der in (b) geschätzte Steigungsparameter interpretieren?

(12)

2. Betrachten Sie das in Abschnitt 2.4.1 des Skriptes vorgestellte Beispiel.

   (a) Geben Sie Interpretation des abgebildeten Streudiagramms.

   (b) Bestimmen Sie für die Merkmale *Clusterzahl je Traube* und *Jahresertrag* die Werte $\widehat{\alpha}$ und $\widehat{\beta}$ sowie $\widehat{\alpha}'$ und $\widehat{\beta}'$ und geben Sie jeweils die zugehörige geschätzte Geradengleichung an.

   (c) Prognostizieren Sie mit Hilfe der Regressionsgeraden $\widehat{y} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}x$ den Jahresertrag, der einer mittleren Clusterzahl von 100 Beeren je Traube entsprechen würde.

(12)

3. Bei der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen X und Y ergaben sich folgende Beobachtungen.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
y_i	-0.09	2.37	3.14	4.26	5.48	4.77	7.3	6.45	9.14	11.13	0

Berücksichtigt man nur die ersten 10 Beobachtungen, dann ist der empirische Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = 0.9654$ und der empirische Rangkorrelationskoeffizient $\rho'_{XY} = 0.9758$.

(a) Zeichnen Sie zunächst ein Streudiagramm von X und Y unter Berücksichtigung *aller* Daten (also auch der elften Beobachtung).

(b) Bestimmen Sie nun beide empirische Korrelationskoeffizienten für alle elf Daten. Verwenden Sie dabei folgende Größen , die man bei der Berechnung der Korrelationskoeffizienten mit lediglich den ersten zehn Datenpunkten erhlten hat: $\overline{x} = 5.5$, $\overline{y} = 5.396$, $\sum x_i y_i = 383.46$, $\sum x_i^2 = 385$, $\sum y_i^2 = 388.88$.

(c) Interpretieren Sie die in (a) und (b) erhaltenen Ergebnisse.

(12)

4. In einem Schwellenland wurde eine Studie durchgeführt, die den Zusammenhang zwischen Geburtsgewicht von Kindern und dem monatlichen Einkommen der Eltern untersuchte. Es wurden acht Kinder zufällig ausgewählt und für diese sowohl das Geburtsgewicht Y in Pfund als auch das monatliche Einkommen X der Eltern in 1000 Einheiten der Landeswährung erfaßt. Die Daten sind in folgender Tabelle zusammengefaßt.

Kind i	1	2	3	4	5	6	7	8
Einkommen x_i	2.7	1.9	3.1	3.9	4.0	3.4	2.1	2.9
Geburtsgewicht y_i	5	6	9	8	7	6	7	8

(a) Tragen Sie die Beobachtungen in ein Streudiagramm ein.

(b) Man möchte nun anhand des Einkommens mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$ das Geburtsgewicht vorhersagen. Schätzen Sie die Regressionsgerade und zeichnen Sie diese in das Streudiagramm.

(c) Ein Ehepaar verdient 3×1000 Einheiten der Landeswährung im Monat. Welches Geburtsgewicht prognostizieren Sie?

(d) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß. Geben Sie eine Interpretation seines Wertes und begründen Sie, ob das Einkommen zur Vorhersage des Geburtsgewichts geeignet ist.

(12)

5. (a) Plotten Sie die Dichtefunktion der N(2,3)-Verteilung.

(b) Plotten Sie die Dichtefunktion der t_4-Verteilung.

(c) Lesen Sie aus der Tabelle das 0.95-Quantil $t_{2,0.95}$ der t_2-Verteilung ab.

(d) Lesen Sie aus der Tabelle das 0.90-Quantil $z_{0.9}$ der N(0,1)-Verteilung ab. (8)

6. In einer Studie zur Untersuchung von Herzkreislauferkrankungen wurde bei 6 Männern der BMI (Gewicht in kg/quadrierte Körpergröße in m) und der (systolische) Blutdruck ermittelt. Bezeichne X dem BMI und Y den Blutdruck, wobei die gemessenen Werte folgender Tabelle zu entnehmen sind.

i	1	2	3	4	5	6
x_i	26	23	27	28	24	25
y_i	170	150	160	175	155	150

Nehmen Sie an, daß sich der Zusammenhang zwischen X und Y beschreiben läßt als

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i\,, i = 1, \ldots, 6\,,$$

wobei die ε_i zunächst als Realisierungen von 6 unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen aufgefasst werden mit $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$ und $\mathrm{Var}\varepsilon_i = \sigma^2 > 0$ für alle $i = 1, \ldots, 6$.

(a) Bestimmen Sie die Kleinst-Quadrat-Schätzwerte für α und β.

(b) Schätzen Sie σ^2.

(c) Sei jetzt zusätzlich die Normalverteilungsannahme vorausgesetzt, d.h. $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ für $i = 1, \ldots, 6$. Führen Sie einen Test zum Niveau $1-\gamma = 5\%$ durch für die Hypothesen

$$H_0 : \alpha = 43 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \alpha \neq 43\,,$$

und

$$H_0 : \beta = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \beta \neq 0\,.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis der Tests.

(14)