Einführung in die statistische Testtheorie

Seminar Simulation und Bildanalyse mit Java

von Benjamin Burr und Philipp Orth

Inhalt

1. Ein erstes Beispiel
2. Einführung in die statistische Testtheorie
3. Die Gütefunktion
4. Gleichmäßig beste Tests (UMP-Tests)

1 Einführendes Beispiel

Problem:

- Supermarkt kauft $n = 1000$ Tomaten beim Großhändler
- Zwei verschiedene Handelsklassen, die sich im Durchschnittsgewicht und im Preis unterscheiden
- Filialleiter möchte prüfen, ob die gelieferten Tomaten der bezahlten Handelsklasse entsprechen

Intuitives Vorgehen:

- Filialleiter bestimmt das Durchschnittsgewicht, indem er das Gesamtgewicht der Tomaten durch ihre Anzahl teilt (arithmetisches Mittel)
- Bei signifikantem Abweichen vom Durchschnittsgewicht der Handelsklasse, wird er die Lieferung reklamieren

Formalisierung:

- Gewicht einer Tomate wird aufgefasst als Realisierung einer Zufallsvariablen X
- Annahme:
  - Gewicht einer Tomate ist normalverteilt
  - Erwartungswert $\mu_0,\ \mu_1$ entspricht dem bekannten Durchschnittsgewicht der entsprechenden Handelsklasse
  - Standardabweichung $\sigma_0,\ \sigma_1$ entspricht der durchschnittlichen Abweichung vom Mittelwert
  - Gewichte sind unabhängig voneinander

2 Einführung in die statische Testtheorie

2.1 Die statistische Hypothese

2.2 Fehlerwahrscheinlichkeiten

2.3 Beispiel: Alternativtest

2.1 Die statistische Hypothese

Definition (Statistische Hypothese):

Eine statistische Hypothese ist eine Annahme über die Verteilung einer Zufallsvariablen:

$$\textit{Annahme:} \qquad F_\vartheta \in \mathcal{D}_0 = \{F_\vartheta : \vartheta \in \Theta_0\}$$

Die Hypothese heißt einfach, falls $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}, \vartheta_0 \in \Theta$ *, ansonsten heißt sie zusammengesetzt. Die Annahme* $\vartheta \in \Theta_0$ *heißt Nullhypothese und* $\vartheta \in \Theta_1$ *Alternativhypothese:*

$$H_0 : \vartheta \in \Theta_0 \qquad \textit{vs.} \qquad H_1 : \vartheta \in \Theta_1$$

Bezug zum Beispiel

- $\mathcal{D} = \{N(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$
- $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$
- $\Theta = \{(\mu_o, \sigma_0^2), (\mu_1, \sigma_1^2)\}$
- $F_\vartheta =$ Verteilungsfunktion von X in Abhängigkeit von $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$
- $\Theta_i = \{(\mu_i, \sigma_i^2)\}$ einfache Hypothesen, $i = 0, 1$

Bei einem Test wird ein kritischer Bereich $K \subset \mathcal{X}(= X^n(\Omega) \subset \mathbb{R}^n)$ festgelegt mit folgender Entscheidungsvorschrift:

- $\mathbf{x} \in \mathbf{K} \Rightarrow$
  - H_0 ablehnen aufgrund des Tests: Entscheidung d_1
  - "$\mathbf{x}$ steht im Widerspruch zu H_0"
- $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \backslash \mathbf{K} \Rightarrow$
  - H_0 nicht verwerfen aufgrund des Tests: Entscheidung d_0
  - "$\mathbf{x}$ steht nicht im Widerspruch zu H_0"

2.2 Fehlerwahrscheinlichkeiten

	H_0	H_1
d_0	richtig	Fehler 2.Art $\beta(\vartheta)$
d_1	Fehler 1.Art $\alpha(\vartheta)$	richtig

Ziel:

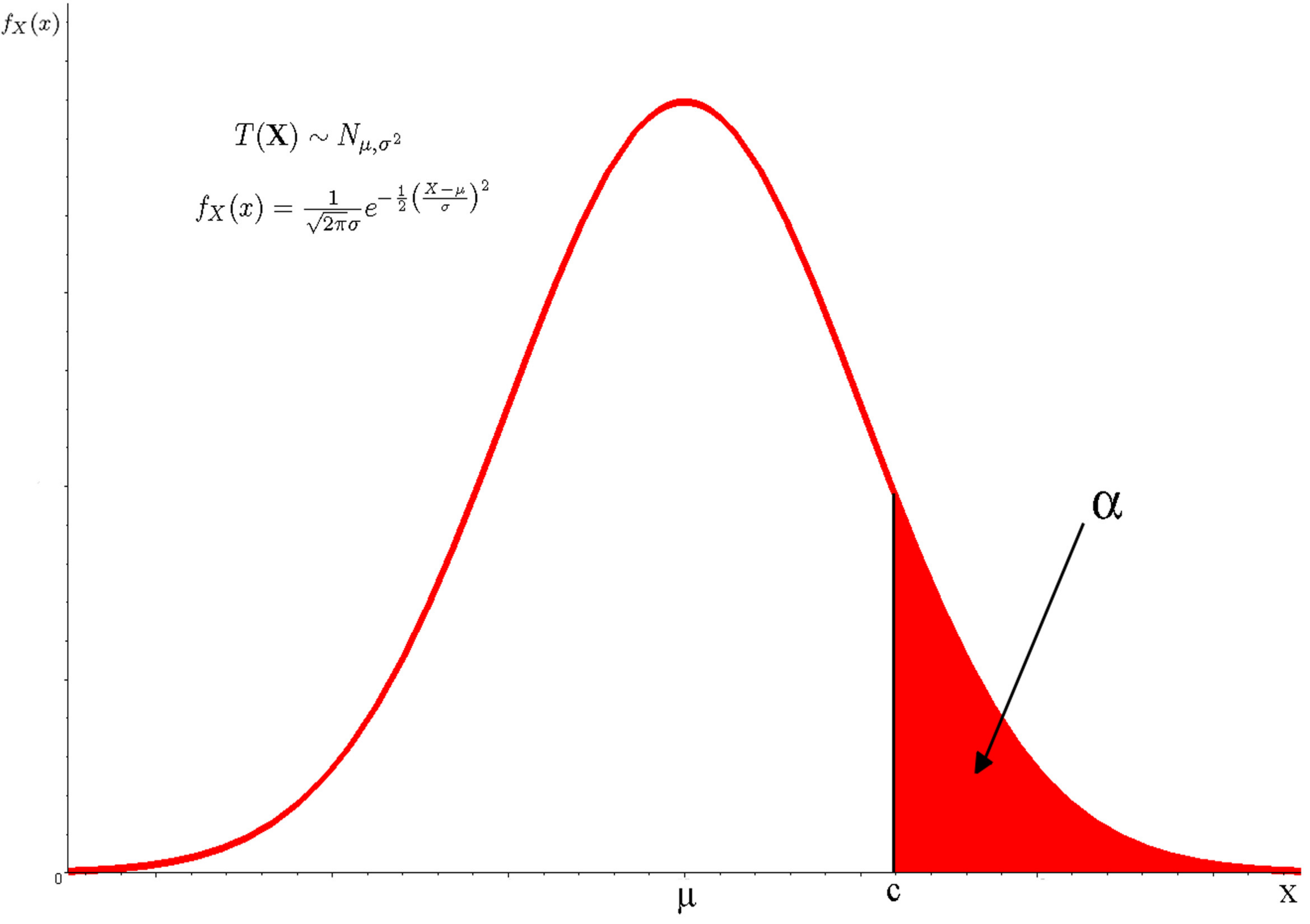
Durch geeignete Wahl von K sollen die Wahrscheinlichkeiten für Fehlentscheidungen minimiert werden:

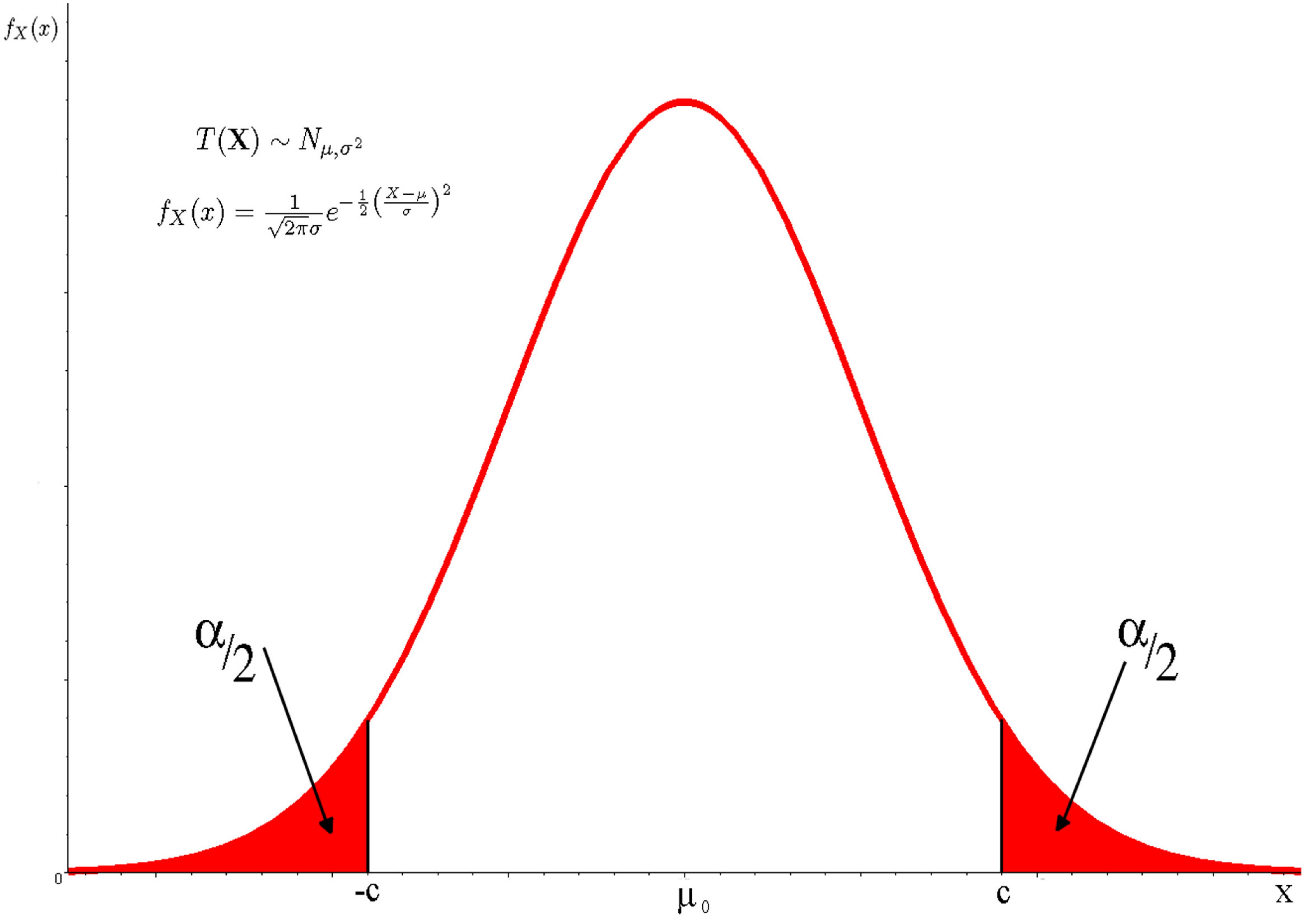
$\alpha(\vartheta) = P_\vartheta(\mathbf{X} \in K), \vartheta \in \Theta_0$ Wahrscheinlichkeit für Fehler 1.Art

$\beta(\vartheta) = P_\vartheta(\mathbf{X} \notin K), \vartheta \in \Theta_1$ Wahrscheinlichkeit für Fehler 2.Art

Stets soll gelten:

$$\alpha(\vartheta) \leq \alpha \ \forall \vartheta \in \Theta_0$$


$f_X(x)$
$T(\mathbf{X}) \sim N_{\mu,\sigma^2}$
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$
α
0
μ
c
X


$f_X(x)$
$T(\mathbf{X}) \sim N_{\mu,\sigma^2}$
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}$
$\alpha/2$
$\alpha/2$
0
-c
μ_0
c
X

Vorgehen:

1. Gemäß einer Vermutung über den Wert von ϑ wird eine Nullhypothese H_0 und eine Alternativhypothese H_1 formuliert.
2. Ein Signifikanzniveau α wird festgelegt (übliche Werte sind: $\alpha = 0,1$; $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$).
3. Eine Teststatistik T und ein Ablehnungsbereich K werden gewählt, so dass $\alpha(\vartheta) \leq \alpha \ \forall \vartheta \in \Theta_0$.
4. Daten werden erhoben und analysiert
5. H_0 wird zugunsten von H_1 verworfen, falls $T(\mathbf{x}) \in K$, sonst nicht.

Bemerkung:

Es besteht eine Asymmetrie in den Hypothesen H_0, H_1:

- Das Risiko einer Entscheidung d_1 wird kontrolliert.
- Das Risiko einer Entscheidung d_0 wird i.a. nicht kontrolliert, oft gilt:

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_1} \beta(\vartheta) = 1 - \alpha$$

Definition (Test):

1. *Ein (randomisierter) Test ist eine meßbare Abbildung* $\varphi : \mathcal{X} \to [0,1]$, *wobei* $\varphi(x)$ *die Wahrscheinlichkeit für die Entscheidung* d_1 *(Ablehnung von* H_0*) angibt.*

2. *Im Falle* $\varphi(\mathcal{X}) = \{0,1\}$ *heißt der Test deterministisch und* $K = \varphi^{-1}(1)$ *Ablehnungsbereich oder kritischer Bereich.*

3. φ *heißt Test der Nullhypothese* $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ *gegen* $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ *zum Niveau* $\alpha, \alpha \in (0,1)$, *falls gilt*

$$E_\vartheta \varphi(\mathbf{X}) \leq \alpha \qquad \forall \vartheta \in \Theta_0$$

Bezeichnung: $\varphi \in \Phi_\alpha$

Bemerkung:

- Für deterministische Tests gilt:

$$\begin{aligned} E_\vartheta \varphi(\mathbf{X}) &= 1 \cdot P_\vartheta(\mathbf{X} \in K) + 0 \cdot P_\vartheta(\mathbf{X} \notin K) \\ &= P_\vartheta(\mathbf{X} \in K) \leq \alpha \quad \forall \vartheta \in \Theta_0 \end{aligned}$$

- Randomisierte Test haben häufig die Gestalt:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r \quad T(\mathbf{x}) > c \\ \gamma & f\ddot{u}r \quad T(\mathbf{x}) = c \\ 0 & f\ddot{u}r \quad T(\mathbf{x}) < c \end{cases}$$

2.3 Beispiel: Alternativtest

- Sei $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ eine einfache Stichprobe zu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($n = 1000$ Tomaten als Stichprobe)
- Parameterbereich: $\Theta = \{\mu_0, \mu_1\}$
  - $\vartheta = \mu \quad \vartheta_0 = \mu_0 \quad \vartheta_1 = \mu_1$
  - $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}, \quad \mu_0 < \mu_1$
  - $0 < \sigma_0^2, \sigma_1^2 < \infty$ bekannt
- $\Theta_0 = \{\mu_0\} \qquad \Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0 = \{\mu_1\}$
- Teststatistik: $T(\mathbf{X}) = T(X_1, ..., X_n) = \bar{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu$
- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1$

Entscheidungsvorschrift:

H_0 ablehnen, falls $\bar{X} > c$ ($c =$ gesuchter kritischer Wert)

Wahl von c:

- Der kritische Wert c wird nun so gewählt, dass die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese H_0 fälschlicherweise zu verwerfen, maximal α sein kann.
- Man kann sich also mit $1 - \alpha$ Wahrscheinlichkeit sicher sein, dass bei Verwerfung von H_0 die Entscheidung richtig ist

$$K = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > c\}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, ..., x_n) = I_{\{\mathbf{x} \in K\}}$$

Berechnung von c:

$$\begin{aligned} P_{\vartheta_0}(\bar{X} > c) &= P_{\vartheta_0}(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} > \frac{c - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}) \\ &\overset{\mathrm{N}(0,1)}{=} 1 - \Phi(\frac{c - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}) \overset{!}{=} \alpha \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow z_{1-\alpha} = \frac{c - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$$

$$\Longrightarrow c = \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

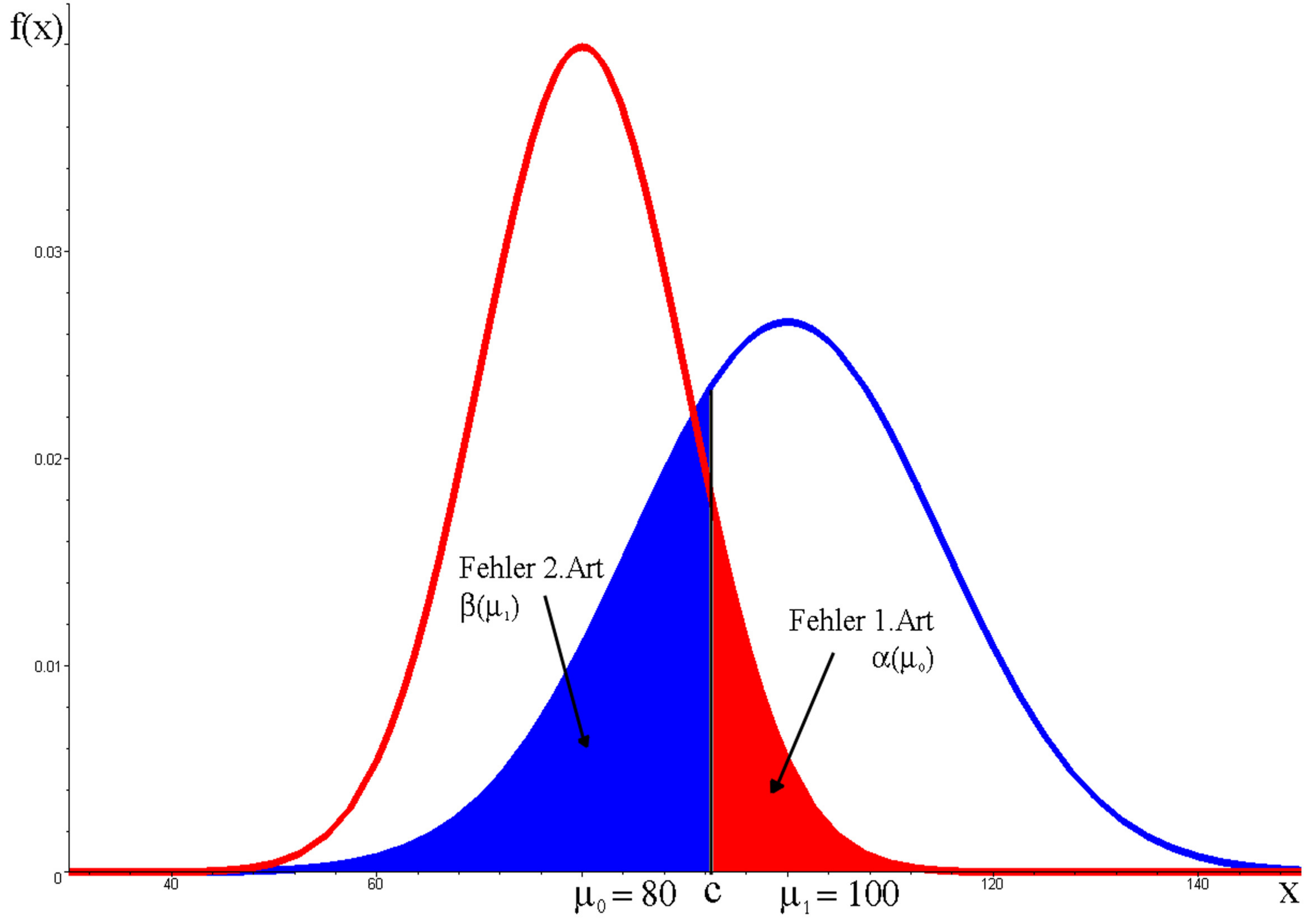
Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art:

$$\beta(\vartheta_1) = P_{\vartheta_1}(\mathbf{X} \notin K) = P_{\vartheta_1}(\bar{X} \leq c) = \Phi(\frac{c - \mu_1}{\sigma_1}\sqrt{n})$$

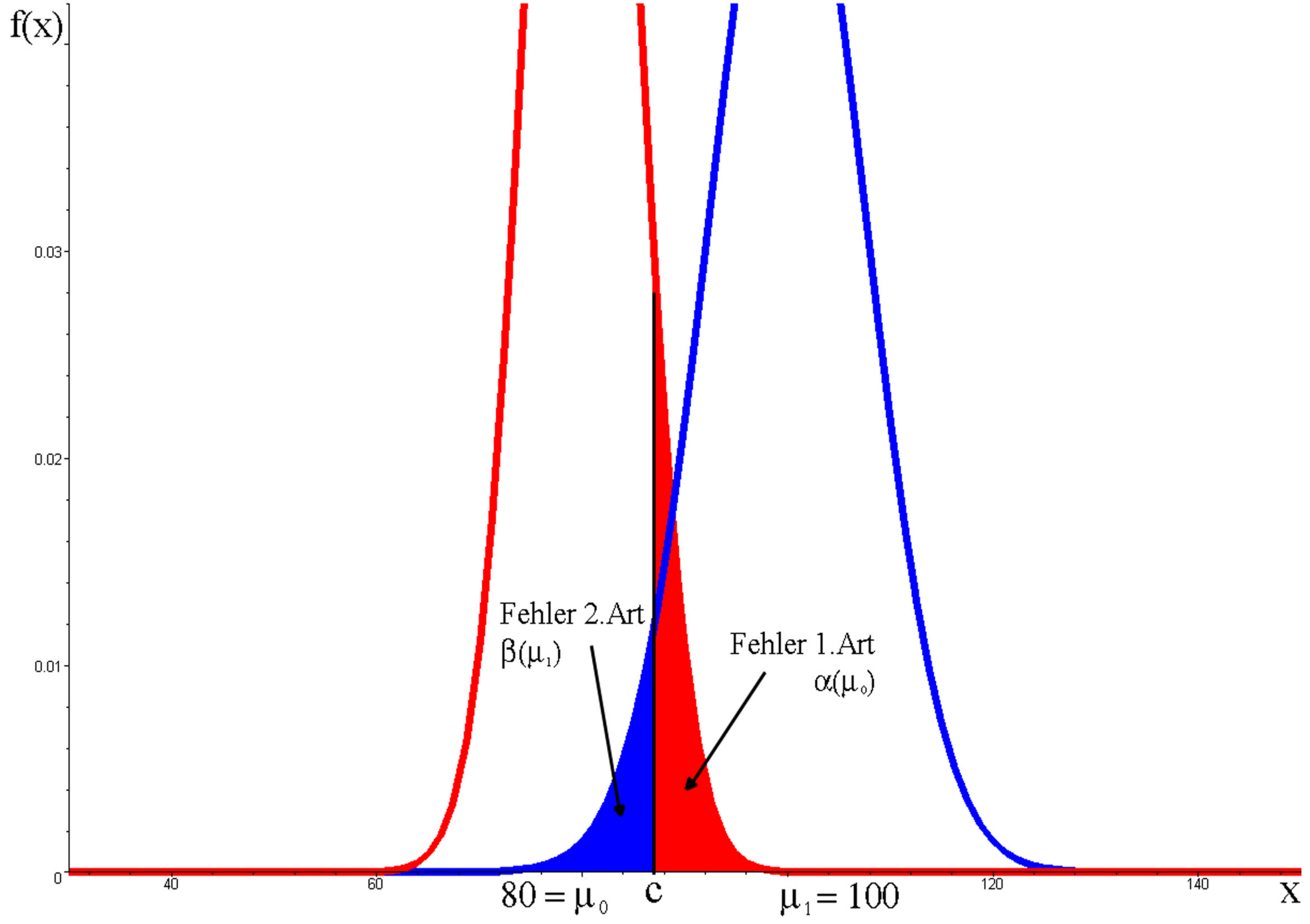
Verhalten der Fehlerwahrscheinlichkeiten:

- α klein $\rightarrow c,\ \beta(\vartheta_1)$ groß
- n groß $\rightarrow \alpha(\vartheta_0),\ \beta(\vartheta_1)$ beide klein

Wie ändert sich die Dichte von $\bar{X}$ bei wachsendem n ?



f(x)
0.03
0.02
0.01
0
40
60
120
140
Fehler 2.Art
$\beta(\mu_1)$
Fehler 1.Art
$\alpha(\mu_0)$
$\mu_0 = 80$
c
$\mu_1 = 100$
X



f(x)
0.03
0.02
0.01
0
40
60
120
140
x
Fehler 2.Art
β(μ1)
Fehler 1.Art
α(μ0)
80 = μ0
c
μ1 = 100

3 Die Gütefunktion

3.1 Definition

3.2 Beispiel: Gaußtest

3.1 Definition

Definition (Gütefunktion):

1. *Die Funktion* $G_\varphi : \Theta \to [0,1],\ \mathcal{G}_\varphi(\vartheta) = E_\vartheta \varphi(\mathbf{X})$ *heißt Gütefunktion des Tests. Die Einschränkung auf* Θ_1 *heißt auch Macht (power) des Tests.*

2. *Ein Test* $\varphi \in \Phi_\alpha$ *heißt unverfälscht, falls*

$$\inf_{\vartheta \in \Theta_1} \mathcal{G}_\varphi(\vartheta) \geq \alpha$$

3. *Die Testfolge* (φ_n) *zum Niveau* α *heißt konsistent, falls*

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{G}_{\varphi_n}(\vartheta) = 1 \quad \forall \vartheta \in \Theta_1 .$$

Bemerkung:

1. $\mathcal{G}_{\varphi}(\vartheta)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, H_0 bei Vorliegen des Parameters $\vartheta \in \Theta$ abzulehnen.
2. Ein Test ist unverfälscht, wenn die Wahrscheinlichkeit für d_1 (Entscheidung gegen H_0) bei vorliegendem $\vartheta \in \Theta_1$ immer mindestens so groß ist wie bei vorliegendem $\vartheta \in \Theta_0$.
3. Die Eigenschaft der Konsistenz ist eine Minimalanforderung an eine Testfolge:
   - Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2.Art konvergiert für jedes feste $\vartheta \in \Theta_1$ gegen 0.
   - Mit wachsendem n soll die Entscheidung besser werden.

3.2 Beispiel Gauß-Test

- Test des Erwartungswertes ; $\sigma^2 = \sigma_0^2$ bekannt
- Parameterbereich: $\Theta = \mathbb{R}$; $\vartheta = \mu \in \Theta$
- Teststatistik: $T(\mathbf{X}) = T(X_1, ..., X_n) = \bar{X}$

Verschiedene Fälle:

- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$
- $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$

Vorstellung zu:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Entscheidungsvorschrift:

$$H_0 \text{ ablehnen, falls } |\bar{X} - \mu_0| > c$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P_{\mu_0}(|\bar{X}-\mu_0| > c) \\
&= 1 - P_{\mu_0}(-c \leq \bar{X}-\mu_0 \leq c) \\
&= 1 - P_{\mu_0}\left(-\frac{c}{\sigma_0}\sqrt{n} \leq \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n} \leq \frac{c}{\sigma_0}\sqrt{n}\right) \\
&\overset{\mathrm{N}(0,1)}{=} 1 - \left[\Phi\left(\frac{c}{\sigma_0}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma_0}\sqrt{n}\right)\right] \\
&= 1 - \left[\Phi\left(\frac{c}{\sigma_0}\sqrt{n}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma_0}\sqrt{n}\right)\right)\right] \\
&= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma_0}\sqrt{n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

... und somit bekommt man den kritischen Wert c:

$$\Phi(\frac{c}{\sigma_0}\sqrt{n}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Für den kritischen Bereich K gilt:

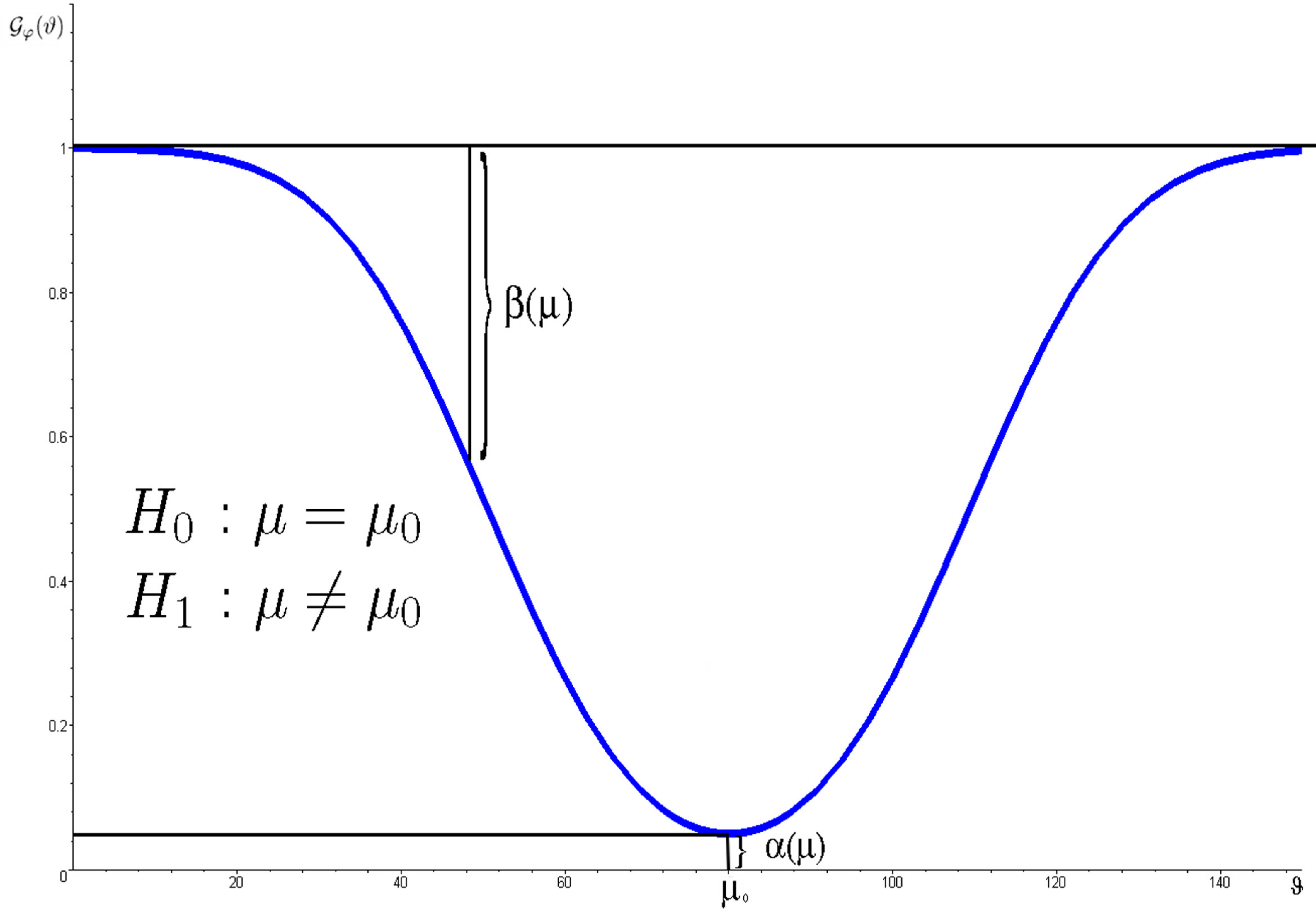
$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} : |\bar{\mathbf{x}} - \mu_{\mathbf{0}}| > \mathbf{c}\}$$

Testfunktion:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, ..., x_n) = I_{\{\mathbf{x} \in K\}}$$

Gütefunktion:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\varphi}(\mu) &\overset{\text{Def}}{=} E_{\mu}\varphi(\mathbf{X}) = E_{\mu}\varphi(X_1, ..., X_n) \\
&\overset{\text{det.Test}}{=} 1 \cdot P_{\mu}(\varphi(\mathbf{X}) = 1) + 0 \cdot P_{\mu}(\varphi(\mathbf{X}) = 0) \\
&= P_{\mu}(\mathbf{X} \in K) = 1 - P_{\mu}(-c \leq \bar{X} - \mu_0 \leq c) \\
&= ..... \\
&= 1 - \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma_0}\sqrt{n}) + \Phi(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma_0}\sqrt{n})
\end{aligned}
$$



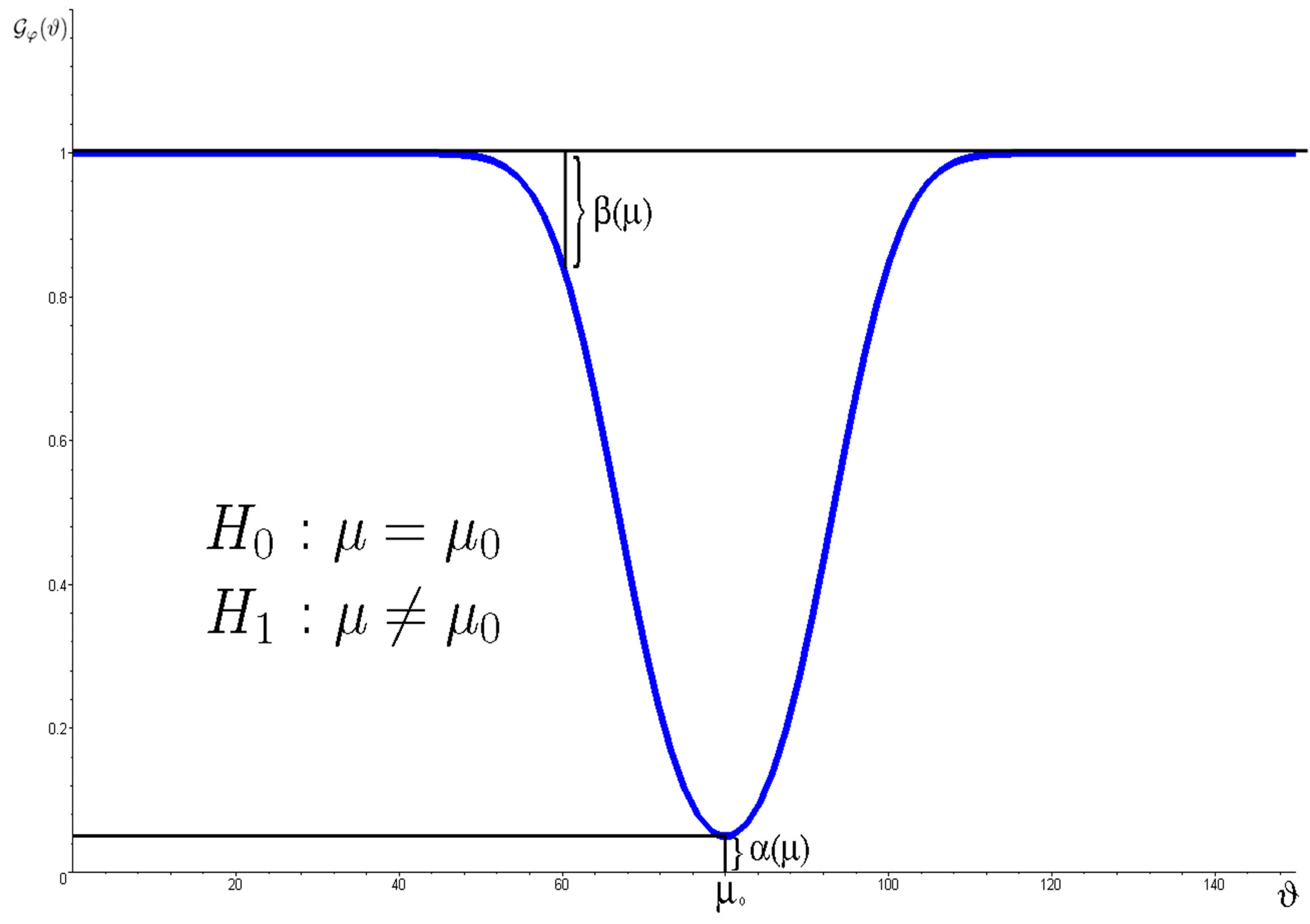
$\mathcal{G}_\varphi(\vartheta)$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
20
40
60
100
120
140
ϑ
μ_0
$\beta(\mu)$
$\alpha(\mu)$
$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$

Der Test ist unverfälscht:

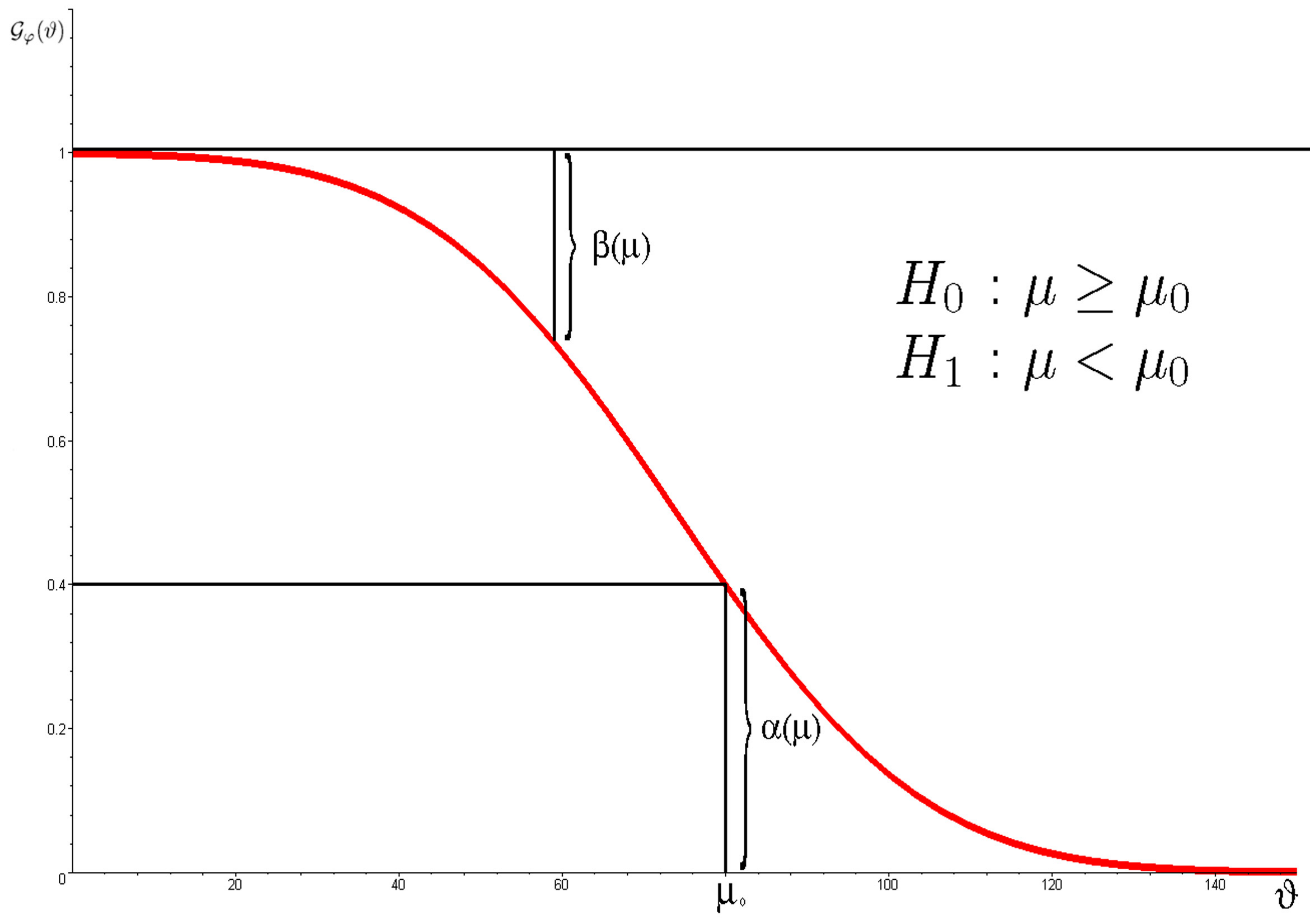
$$\mathcal{G}_\varphi(\mu) \geq \alpha \qquad \forall \mu \neq \mu_0$$

Der Test ist außerdem konsistent, da für $\mu \neq \mu_0$ gilt:

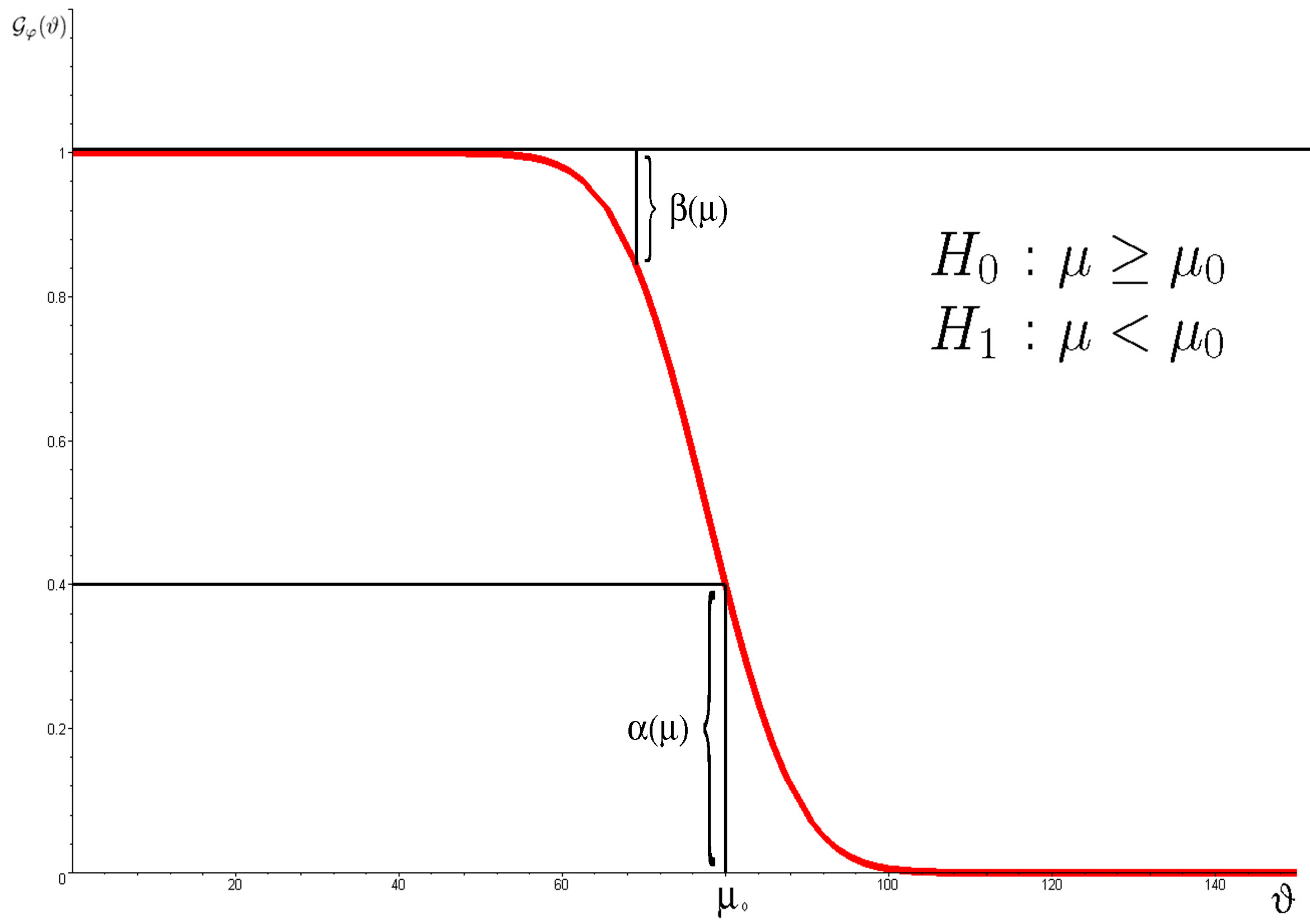
$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\varphi(\mu) \quad &= \quad 1 - \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma_0}\sqrt{n}) + \Phi(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma_0}\sqrt{n}) \\
&\stackrel{\mathrm{n}\to\infty}{\longrightarrow} \quad 1
\end{aligned}$$



$\mathcal{G}_\varphi(\vartheta)$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
20
40
60
100
120
140
μ_0
ϑ
$\beta(\mu)$
$\alpha(\mu)$
$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$



$\mathcal{G}_\varphi(\vartheta)$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
20
40
60
100
120
140
μ_0
ϑ
$\beta(\mu)$
$\alpha(\mu)$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$



$\mathcal{G}_\varphi(\vartheta)$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
20
40
60
100
120
140
$\beta(\mu)$
$\alpha(\mu)$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$
μ_0
ϑ

4 Gleichmäßig beste Tests (UMP-Tests)

4.1 Motivation

4.2 Das Lemma von Neyman und Pearson

4.1 Motivation

Ziel:

Unter allen Niveau-α-Tests $\varphi \in \Phi_\alpha$ suchen wir den gleichmäßig Mächtigsten.

Definition (Gleichmäßig bester Test):

Ein Test $\varphi^* \in \Phi_\alpha$ heißt gleichmäßig bester Test zum Niveau α, falls

$$G_{\varphi^*}(\vartheta) \geq G_\varphi(\vartheta) \qquad \forall \vartheta \in \Theta_1, \forall \varphi \in \Phi_\alpha$$

Annahmen:

- Einfache Hypothesen:
  $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}, \qquad \Theta_0 = \{\vartheta_0\}, \qquad \Theta_1 = \{\vartheta_1\}$
- Betrachtete Dichten:
  - $f_0(\mathbf{x}) = f_0(x_1, ..., x_n) = f_{\vartheta_0}(x_1, ..., x_n)$ Dichte unter H_0
  - $f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1, ..., x_n) = f_{\vartheta_1}(x_1, ..., x_n)$ Dichte unter H_1
- Ferner sei:
  $f_0(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x}) > 0 \qquad \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{X}$

Definition (Neyman-Pearson-Test):

Ein Test φ^* heißt *N*eyman-Pearson-Test (NP-Test), falls:

$$\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & falls \quad \dfrac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} > c \\ \gamma, & falls \quad \dfrac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} = c \\ 0, & falls \quad \dfrac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} < c \end{cases} \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{X}$$

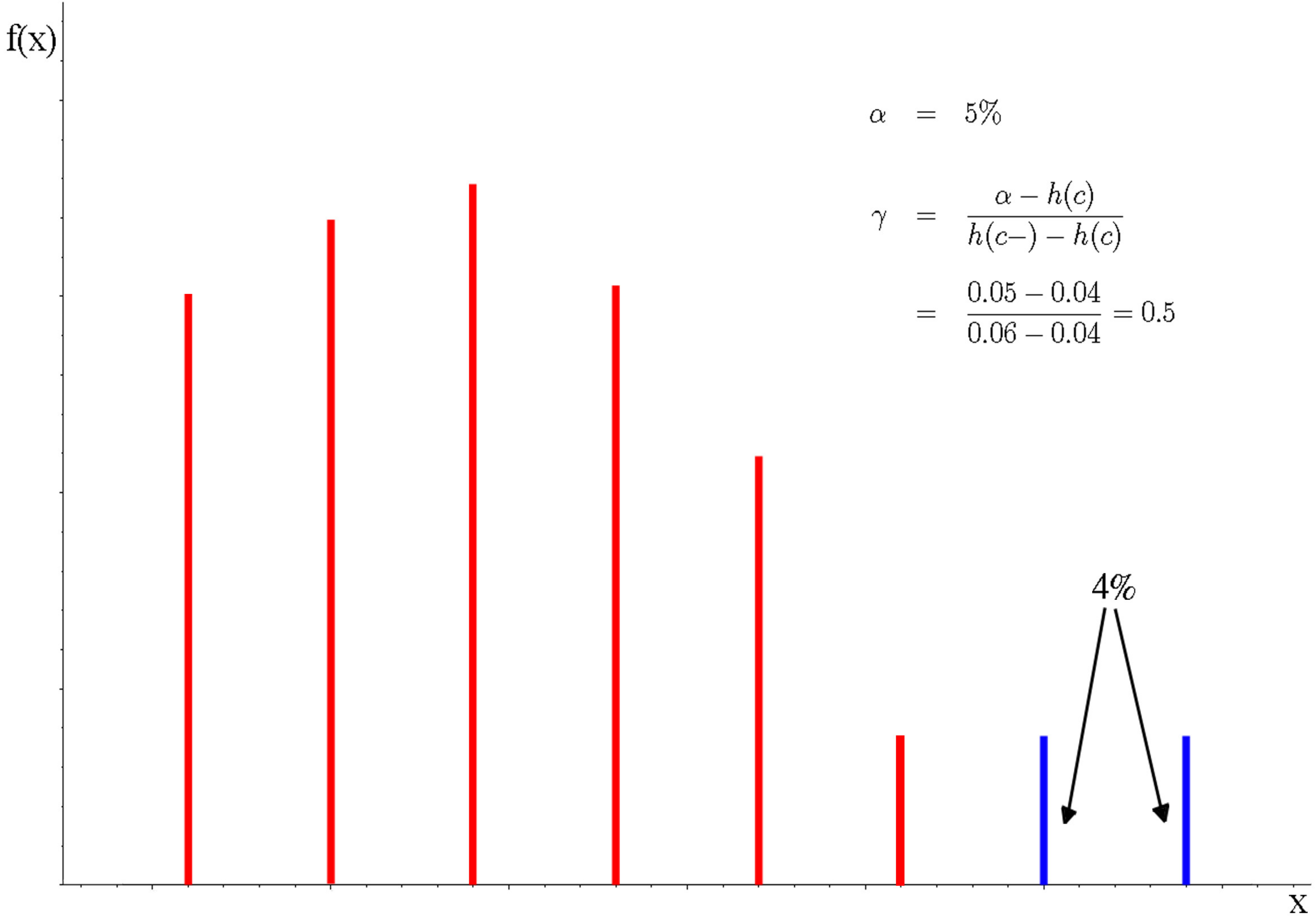
mit $0 \leq c < \infty$, $0 \leq \gamma \leq 1$.

Im Fall $f_0(\mathbf{x}) = 0$ ist hier $\dfrac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} = \infty$ zu setzen.

4.2 Das Lemma von Neyman und Pearson

Satz (Das Lemma von Neyman und Pearson):

1. Zu jedem $\alpha \in (0,1)$ existiert ein NP-Test φ^* mit:
$$\alpha(\varphi^*) := E_{\vartheta_0}\varphi^*(\mathbf{X}) = \alpha$$
2. Jeder NP-Test φ^* ist (gleichmäßig) bester Test zum Niveau $\alpha(\varphi^*)$:
$$\mathcal{G}_{\varphi^*}(\vartheta_1) \geq \mathcal{G}_{\varphi}(\vartheta_1) \qquad \forall \varphi \in \Phi_{\alpha(\varphi^*)}$$


f(x)
$\alpha = 5\%$
$\gamma = \dfrac{\alpha - h(c)}{h(c-) - h(c)}$
$= \dfrac{0.05 - 0.04}{0.06 - 0.04} = 0.5$
4%
x

Beweis (Teil 1):

Bezeichnungen:

$q(\mathbf{x}) = \dfrac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})}$ Dichtequotient

$A_t = \{q(\mathbf{X}) > \mathbf{t}\}$ Ablehnungsbereich in Abhängigkeit von t

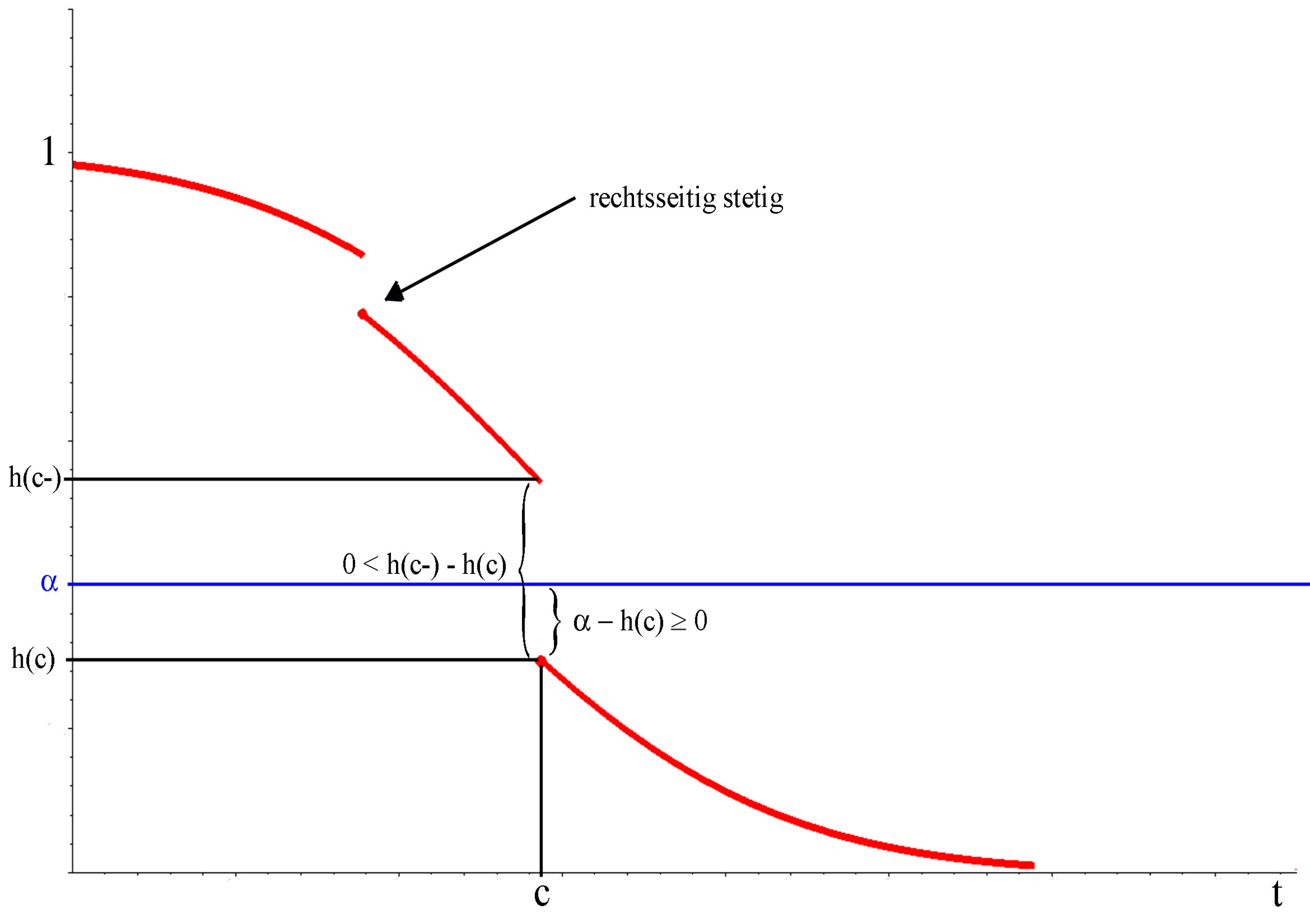
$h(t) := P_{\vartheta_0}(A_t) = P_{\vartheta_0}(q(\mathbf{X}) > t)$ W. für Fehler 1.Art

Eigenschaften von h:

- h ist monoton nicht wachsend
- h ist rechtsseitig stetig

Setze:

$$c := \inf\{t \geq 0 : h(t) \leq \alpha\}, \qquad 0 \leq c < \infty$$


1
rechtsseitig stetig
h(c-)
0 < h(c-) - h(c)
α
α − h(c) ≥ 0
h(c)
c
t

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

1. $h(c) = h(c-) \Longrightarrow$ setze $\gamma = 0$
2. $h(c) < h(c-) \Longrightarrow$ setze $\gamma = \dfrac{\alpha - h(c)}{h(c-) - h(c)}$

Dann gilt $0 \leq \gamma \leq 1$ und

$$\begin{aligned}
\alpha(\gamma) &\overset{\text{Def}}{=} E_{\vartheta_0}\varphi^*(\mathbf{X}) = E_{\vartheta}\varphi^*(X_1, ..., X_n) \\
&\overset{\text{rand.Test}}{=} 1 \cdot P_{\vartheta_0}(q(\mathbf{X}) > c) + \gamma \cdot P_{\vartheta_0}(q(\mathbf{X}) = c) \\
&= h(c) + \gamma(h(c-) - h(c)) = \alpha
\end{aligned}$$

Beweis (Teil 2):

Z.z.: $\mathcal{G}_{\varphi^*}(\vartheta_1) \geq \mathcal{G}_{\varphi}(\vartheta_1) \qquad \forall \varphi \in \Phi_\alpha(\varphi^*)$

Sei dazu φ ein beliebiger Test zum Niveau α, d.h.: $\alpha(\varphi) \leq \alpha(\varphi^*)$

Wir bilden eine Partition des Stichprobenraumes $\mathcal{X}$:

$$M^- = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{X} : \varphi(x_1, .., x_n) > \varphi^*(x_1, .., x_n)\}$$

$$M^+ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{X} : \varphi(x_1, .., x_n) < \varphi^*(x_1, .., x_n)\}$$

$$M^= = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{X} : \varphi(x_1, .., x_n) = \varphi^*(x_1, .., x_n)\}$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \in M^- \quad &\Longrightarrow \quad \varphi^*(\mathbf{x}) < 1 \\
&\overset{\varphi^*(\mathbf{x}) \neq 1}{\Longrightarrow} \quad f_1(\mathbf{x}) \leq c f_0(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \in M^+ \quad &\Longrightarrow \quad \varphi^*(\mathbf{x}) > 0 \\
&\overset{\varphi^*(\mathbf{x}) \neq 0}{\Longrightarrow} \quad f_1(\mathbf{x}) \geq c f_0(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\varphi^*}(\vartheta_1) - \mathcal{G}_{\varphi}(\vartheta_1) &= E_{\vartheta_1}[\varphi^*(\mathbf{X}) - \varphi(\mathbf{X})] \\
&= \int_{\mathcal{X}} [\varphi^*(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})] f_1(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{M^-} \ldots + \int_{M^+} \ldots + \underbrace{\int_{M^=} \ldots}_{=\,0} \\
&\geq \int_{M^-} [\varphi^*(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})] c f_0(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \\
&\quad + \int_{M^+} [\varphi^*(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})] c f_0(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \\
&= c E_{\vartheta_0}[\varphi^*(\mathbf{X}) - \varphi(\mathbf{X})] = c[\alpha(\varphi^*) - \alpha(\varphi)] \geq 0
\end{aligned}
$$

Literatur

- Bosch, K.: *Grosses Lehrbuch der Statistik*, Oldenbourg Verlag, 1996.
- Cassella G., Berger R.: *Statistical Inference*, Duxbury Press, 1990.
- Heiler: *Statistische Schätz- und Testtheorie*, Vorlesungsskript WS 2003/2004, Universität Konstanz. `http://www.uni-konstanz.de/FuF/wiwi/heiler/Lehre.html`
- Jensen, U.: *Skript zur Vorlesung Statistik I*, Vorlesungsskript SS 2003, Universität Ulm.
- Pruscha, H.: *Vorlesung über Mathematische Statistik*, Teubner Verlag, 2000.