

Bildentrauschung und Kantenextraktion

Peter Straka

18. August 2006

Zusammenfassung

Bei der Entrauschung von Bildern versucht man zu helle oder zu dunkle Pixel auszugleichen indem sie einem lokalen Mittelwert von Pixelintensitäten angenähert werden. Wahlloses Glätten solcher Pixelkontraste führt jedoch zu einem verschwimmen des Bildes und zum Informationsverlust.

Um gezielter zu glätten wird die Bayessche Methode benutzt. Dabei wird die Information welche Kontraste zu glätten sind bereits in die a priori Verteilung auf dem Bildraum eingebracht. Solche a priori Verteilungen werden im Hauptteil dieses Textes sukzessive hergeleitet.

1 Die Bayessche Methode

1.1 Wiederholung: diskretes Bildmodell

Gegeben seien eine endliche *Pixelmenge* S und eine endliche Menge von *Intensitätswerten* $I \subset \mathbb{R}^+$. Wir schreiben g_t für die *Intensität des Pixels* $t \in S$ und stellen uns Pixelintensitäten als Graustufen vor, denn in der Tat werden in diesem Vortrag der Einfachheit halber nur Schwarzweißbilder betrachtet. Damit erhalten wir mit $\mathbf{G} = I^S$ alle so darstellbaren Bilder und nennen $g := \{g_t, t \in S\} \in \mathbf{G}$ schlicht ein *Bild*. Schließlich bedeute noch $s \sim t$ dass die Pixel $s, t \in S$ benachbart sind, im Sinne von „oberer“, „linker“, „unterer“ oder „rechter“ Nachbar.

1.2 Gibbssches Potential

Aus der Physik übernimmt den Begriff der „Gibbsschen Energiefunktion“. Für eine (zunächst beliebige) Abbildung $K : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $Z := \sum_{g \in \mathbf{G}} \exp(-K(g))$,

und mit $\Pi(g) = Z^{-1} \exp(-K(g))$ erhält man somit eine Wahrscheinlichkeitsverteilung π auf \mathbf{G} . Verschiebt man die Energiefunktion K erhält man die gleiche Verteilung π , und die Zuordnung von K und π ist eineindeutig bis auf solche Verschiebungen von K . Mit hoher (a priori-) Wahrscheinlichkeit vorkommende Bilder werden bevorzugt, d.h. Bilder mit möglichst niedriger a priori-Energie.

1.3 A priori und a posteriori Verteilung

Wir nehmen nun an dass aus einem Originalbild $g \in \mathbf{G}$ durch stochastisches Rauschen ein (zufälliges) Bild $Y = y \in \mathbf{G}$ entstanden ist. Dabei nehmen wir an dass die Verteilung des Rauschens, i.e. die bedingte Verteilung $P_Y(\cdot|g)$ bekannt

ist, und wir wählen für jedes $g \in \mathbf{G}$ eine entsprechende Energiefunktion (in y) $D(y, g)$. Eine einfache Rechnung zeigt dass dann die a posteriori Verteilung $P(\cdot|y)$ in g auch Gibbssch ist mit Energiefunktion $K(\cdot) + D(y, \cdot)$.

2 Filtermasken

In verrauschten Bildern bei denen pixelweise sowohl zu hohe als auch zu niedrige Intensitäten auftreten, wie etwa bei gaußischem Rauschen, geschieht Entrauschen oft durch Bildung eines lokalen Mittelwertes. Das Paradebeispiel hierfür sind Filtermasken.

Dazu werden Pixelgewichte deren Summe gleich 1 ist in einer Matrix angeordnet und die Matrix wird mit dem mittleren Element auf den zu betrachtenden Pixel gelegt. Es erfolgt die Mittelwertbildung über die gegebenen Gewichte. So wird z.B. bei einer binomialen Filtermaske der Form

$$M = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

die gemittelte neue Pixelintensität über $g_{(k,l)} = \sum_{i,j=-1}^1 M_{ij}g_{(k+i,l+j)}$ berechnet (hierbei laufen die Spalten- und Zeilenindizes von -1 bis +1). Im Falle eines Randpixels werden üblicherweise die in der Matrix fehlenden Pixel durch Spiegelung am Rand erzeugt.

Das Ergebnis ist ein Bild mit deutlich weniger ausgeprägtem Rauschen, wie in der Gegenüberstellung zu erkennen ist:

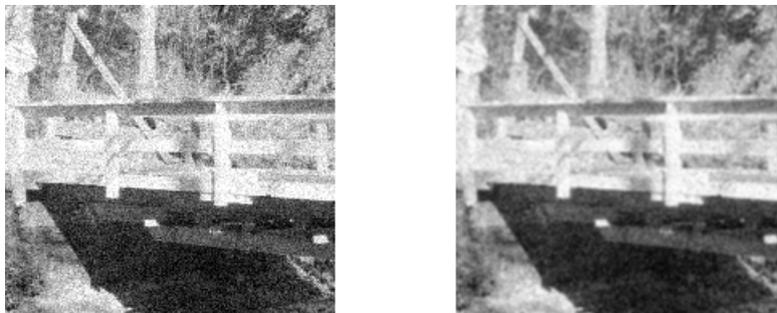


Abbildung 1: links: Bild mit Gaußischem Rauschen; rechts: nach 5maliger Anwendung von obigem Binomialfilter

Filtermasken sind ein effektives Mittel zur Rauschunterdrückung das man mit wenig Rechenaufwand implementieren kann. Jedoch ist der offensichtliche Nachteil dass das ganze Bild verschwimmt und Ränder unklar werden. Dadurch entsteht starker Informationsverlust, denn Ränder, oder „Kanten“ enthalten den Großteil der Informationen eines Bildes!

3 Der Informationsgehalt von Kanten

Kanten sind diejenigen Stellen im Bild an denen benachbarte Pixel stark unterschiedliche Grauwerte haben. Wieviel Information sich tatsächlich in diesen

Kanten verbirgt soll am folgenden Beispiel der Kantenerhaltenden Datenkompression (Boundary Preserving Compression) erläutert werden.

3.1 Beispiel: Bildkompression durch Kantensextraktion

Hier werden zunächst mit einem passenden Algorithmus die Kanten des Bildes extrahiert:



Abbildung 2: links: zu komprimierendes Bild; rechts: Kanten des Bildes

Diese Kanten werden gespeichert, ebenso die Pixelintensitäten aus einem sehr dünnen Teilgitter. Obwohl diese Datenmenge im Vergleich zum Originalbild sehr klein ist (je nach Bild nur ein Bruchteil von etwa 5%) lässt sich aus ihr das Originalbild fast wiederherstellen:



Abbildung 3: links: Originalbild; rechts: wiederhergestelltes Bild

Man interpoliert lediglich die fehlenden Pixelwerte aus den gespeicherten Pixelwerten und berücksichtigt dabei nur solche Pixel die nicht hinter einer Kante liegen.

3.2 Entrauschung und Kantenerhaltung

Da Kanten also derart viele Informationen enthalten, ist es unser Ziel bei der Bildentrauschung Kanten möglichst zu erhalten, wie etwa in folgendem Beispiel:

Im rechten Bild sieht man wie das Bildrauschen unterdrückt wurde während die Kanten erhalten blieben. Es wurde der Algorithmus „selektiver gaußscher



Abbildung 4: links: verrauschtes Bild; mitte: Binomialfilter; rechts: selektiver gaußscher Weichzeichner

“Weichzeichner“ benutzt: Es wird ein Schwellwert Δ vorgegeben, wenn der Pixelkontrast zwischen zwei benachbarten Pixeln $s \sim t$, $|g_s - g_t|$, größer als Δ ist, wird dort eine Kante gesetzt. Anschließend wird per Filtermaske geglättet, jedoch wird die Maskengröße bei Bedarf verkleinert wenn eine Kante in der Nähe ist, so dass Kantenpixel nicht geglättet werden.

4 A priori Verteilungen

Wir wollen nun sogar bessere Ergebnisse bei der Bildentrauschung über die oben beschriebene Bayessche Methode erzielen. Dazu ist es wichtig, eine a priori Verteilung auf dem Bildraum \mathbf{G} zu finden die die folgenden 3 von vornherein bekannten Informationen über Originalbilder enthält:

- Das Original ist i.A. glatt und nicht verrauscht.
- Im Original muss es aber auch bestimmte Stellen mit Intensitätssprüngen, d.h. Kanten geben.
- Diese Kanten sind i.A. nicht wahllos verteilt; sie unterliegen einer gewissen Ordnung.

Im folgenden soll nach und nach eine a priori Verteilung bestimmt werden die schließlich alle diese Informationen enthält.

4.1 Glättung

Wir betrachten nun zunächst den ersten Punkt: Gegeben sei ein verrauschtes Graustufenbild $y \in \mathbf{G}$. Um das Original wiederherzustellen suchen wir nun ein Bild $g \in \mathbf{G}$ das y möglichst ähnlich ist und dennoch glatt ist. Dazu definiert man die beiden Energieterme

$$D(g, y) = \sum_{s \in S} (g_s - y_s)^2 \quad \text{und} \quad K(g) = \sum_{s \sim t} (g_s - g_t)^2,$$

wo der erste Term den Unterschied zwischen g und y beschreibt und der zweite Term klein ist wenn benachbarte Pixelintensitäten nur wenig voneinander abweichen, d.h. wenn g glatt ist.

Nun minimiert man die Gesamtenergie (die a posteriori Energie) ¹

$$H(g, y) = \beta K(g) + D(g, y)$$

in g . g ist nun ein glatteres Bild als y , jedoch wurde global geglättet und ohne Rücksicht auf gewollte Pixelkontraste (Kanten), daher verschwimmt das ganze Bild und die Ergebnisse sind ähnlich schlecht wie bei der Glättung mit Filtermasken.

4.2 Glättung und Kantenerhaltung

Wir wollen nun eine a priori Verteilung konstruieren die Kanten erhält. Dazu erweitern wir das bisherige Bildmodell und führen sog. „Mikrokanten“ ein:

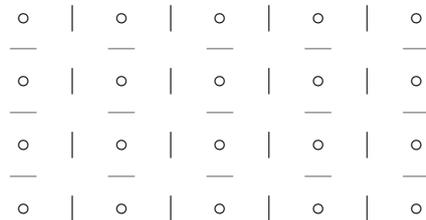


Abbildung 5: Modell mit Pixeln (○) und Mikrokanten (| und —)

Zusätzlich zu den Pixelintensitäten hat man nun noch Mikrokanten als Modellvariablen. Man schreibt e_{st} für die Mikrokante zwischen den benachbarten Pixeln $s \sim t$, und setzt

$$e_{st} = \begin{cases} 1, & \text{Mikrokante ein} \\ 0, & \text{Mikrokante aus} \end{cases}$$

Den Glattheitsterm $K(g)$ definiert man nun als ²

$$K^{\alpha, \lambda}(g, e) = \sum_{s \sim t} (\lambda^2 (g_s - g_t)^2 (1 - e_{st}) + \alpha e_{st})$$

Bei gegebenem verrauschten Bild y minimiert man nun wie im Fall ohne Mikrokanten den a posteriori Energieterm

$$H(g, e, y) = K^{\alpha, \lambda}(g, e) + D(g, y)$$

in g und e . Hierbei wird im Falle eines sehr großen Pixelkontrasts zwischen s und t die Mikrokante e_{st} eingeschaltet, wodurch zwar die Energie um α erhöht wird, aber der Term $\lambda^2 (g_s - g_t)^2$ wegfällt und dadurch g_s und g_t nicht angenähert werden. Also wird bei bereits hohem Kantenkontrast keine Glättung mehr durchgeführt und die Kante im Bild bleibt erhalten.

¹ β ist hierbei ein Hyperparameter der die Gewichtung der Glattheit von g gegenüber der Nähe zu y bestimmt.

² $e := \{e_{st} | s, t \in S, s \sim t\}$

4.3 Glättung, Kantenerhaltung und Anordnung der Kanten

Nun wollen wir die dritte Information, nämlich die Tatsache dass die Kanten im Bild einer gewissen Ordnung unterliegen, in die a priori Verteilung übernehmen. Dazu bemerke zunächst dass in unserem bisherigen Modell die Kanten unabhängig voneinander gesetzt werden, und dass es durch Bildrauschen passieren kann dass Kanten unterbrochen werden oder dass unnötig Kanten gesetzt werden. Diesen unerwünschten Effekt kann man einschränken indem man unerwünschte Kantenkonfigurationen bestraft. Dazu betrachte zunächst die in einer quadratischen 4-er Clique vorkommenden Kantenkonfigurationen (nach eventueller Rotation um 90° sind dies alle möglichen Kombinationen):

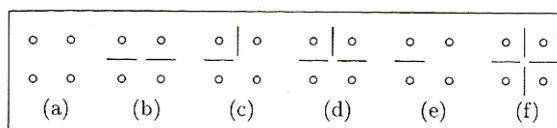


Abbildung 6: lokale Kantenkonfigurationen in absteigender Erwünschtheit

Man versieht nun jede dieser Konfigurationen (a) bis (f) mit einem Strafgewicht. Addiert man bei gegebener Kantenkonfiguration e die Gewichte über alle quadratischen 4-er Cliques des Bildes auf, erhält man so den allein von der Kantenkonfiguration e abhängenden Energieterm $K_E(e)$. Die neue Gesamtenergiefunktion ist dann ³

$$H(g, e, y) = D(g, y) + K^{\alpha, \lambda}(g, e) + \gamma K_E(e)$$

mit „Datenterm“ $D(g, y)$, kantenerhaltendem Glättungsterm $K^{\alpha, \lambda}(g, e)$ und kantenorganisierendem Term $K_E(e)$. Minimiert man $H(g, e, y)$ bei gegebenem y in g und e , so wird nicht nur kantenerhaltend geglättet, die Kanten im Bild werden auch noch sinnvoll angeordnet.

4.4 Glätten höherer Ordnung

Der Glättungsterm $K^{\alpha, \lambda}(g, e) = \sum_{s \sim t} (\lambda^2 (g_s - g_t)^2 (1 - e_{st}) + \alpha e_{st})$ bevorzugt Bilder mit nur kleinen Pixelkontrasten $|g_s - g_t|$, d.h. stückweise konstante Bilder. Hat das Bild y sehr weiche, fließende Übergänge von hohen zu niedrigen Pixelintensitäten, so können bei der Minimierung von $K^{\alpha, \lambda}(g, e)$ durch das Setzen von Kanten einzelne konstante Bereiche im Bild entstehen, die aussehen wie Schuppen einer Schlange. Man kann aber $K^{\alpha, \lambda}(g, e)$ so verändern dass auch fließende, lineare Übergänge (2.Ableitung = 0!) mit einer niedrigeren Energie belohnt werden.

Dazu benutzt man die Diskretisierung der 2. Ableitung der Pixelintensitäten: Um Richtungen beschreiben zu können schreiben wir nun den Pixel $s \in S$ in Koordinatenschreibweise (s_1, s_2) . $D^{j, k} g_{s_1, s_2}$ bedeute dann die Diskretisierung der Ableitung von g_{s_1, s_2} j-ter Ordnung nach rechts und k-ter Ordnung nach oben. Speziell ist

³ γ ist ein Hyperparameter der die Wichtigkeit der Kantenorganisation ausdrückt

$$D^{2,0}g_{s_1,s_2} = g_{s_1+1,s_2} - 2g_{s_1,s_2} + g_{s_1-1,s_2} \quad (1)$$

$$D^{1,1}g_{s_1,s_2} = 2g_{s_1+1,s_2+1} - 2g_{s_1+1,s_2} - 2g_{s_1,s_2+1} + 2g_{s_1,s_2} \quad (2)$$

$$D^{0,2}g_{s_1,s_2} = g_{s_1,s_2+1} - 2g_{s_1,s_2} + g_{s_1,s_2-1} \quad (3)$$

Offenbar kommen bei der Berechnung dieser 2.Ableitungen nur Pixelwerte aus den Cliquen $\circ \circ \circ$ bzw. $\begin{smallmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{smallmatrix}$ bzw. $\begin{smallmatrix} \circ \\ \circ & \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ vor. Bildet man nun alle möglichen 2.Ableitungen über alle im Bild g vorkommenden Cliquen dieser Art und summiert diese auf, erhält man den Glättungsterm 2.Ordnung $K_2(g)$. Dieser ist niedrig bei annähernd linearen Intensitätsänderungen, begünstigt also fließende Übergänge.

4.5 reine Kantenextraktion

Die Bayessche Methode lässt sich auch anwenden falls man lediglich an der Extraktion der Kanten interessiert ist und nicht etwa an der Entrauschung eines Bildes. Man benutzt das Bildmodell

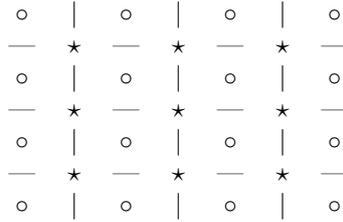


Abbildung 7: Modell mit Pixeln \circ , Mikrokannten $|$ — und Mikroecken \star

in dem nun *Mikroecken* als neue Modellvariablen vorkommen. Man indiziert die Menge dieser Mikroecken mit B , schreibt wieder $u \sim v$ für benachbarte Mikroecken $u, v \in B$ und definiert Schaltervariablen

$$b_u := \begin{cases} 1, & u \in B \text{ aktiv} \\ 0, & u \in B \text{ inaktiv} \end{cases}$$

Die *Mikrokannten* hängen nun direkt von den *Mikroecken* ab, da man sie als aktiv definiert genau dann wenn die *Mikroecken* an ihren Enden beide aktiv sind, und daher betrachtet man sie nicht als Modellvariablen.

Man kann nun die folgende a priori Energie definieren:

$$K(g, b) = K_S(g, b) + K_B(b)$$

Dabei „sät“

$$K_S(g, b) = \vartheta_1 \sum_{u \sim v} \phi(\delta_{u,v})(1 - b_u b_v) + \vartheta_2 \sum_{u \in B} (b_u - \zeta_u(g))^2,$$

die *Mikroecken*. Der erste Summand ist seit dem kantenerhaltenden Glätten bekannt ($\delta_{u,v}$ ist der Kantenkontrast zwischen den von u und v separierten

Pixel); der zweite berücksichtigt den Kantenfluss im Bild: $\zeta_u(g) = 1$ wenn $u \in B$ in einem String von z.B. mindestens 4 Mikrokanten liegt.

$K_B(b)$ hingegen ordnet die Mikrokanten an. Dabei werden wieder wie in Abschnitt 4.3 auf Seite 6 bestimmte Kantenkonfigurationen bestraft. Weiter gehen in diesen Term sogenannte Doppelkanten bestraft, d.h. Konfigurationen wie etwa in Abbildung 8 und deren Rotationen um 90° .

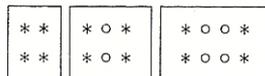


Abbildung 8: \star bedeutet Mikroecke an, \circ bedeutet Mikroecke aus

5 stetige Bildmodelle

Abschließend sei noch erwähnt dass die besprochenen diskreten Bildmodelle *Diskretisierungen* des folgenden stetigen Bildmodells sind:

Anstelle von einer endlichen Pixelmenge sei ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^d$ gegeben. Die Intensitäten seien ebenfalls nicht aus einer endlichen Menge gewählt, sondern aus einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Pixelintensitäten seien Abbildungen $g, y : D \rightarrow I$, die bis auf einer Ausnahmemenge, nämlich auf einer Kurve K_g bzw. $K_y \subset D$, hinreichend glatt sein sollen. In K_g und K_y sind Sprünge von g bzw. y erlaubt, die den Kanten in den jeweiligen Bildern entsprechen.

Das stetige Äquivalent der bisherigen a posteriori Gesamtenergie ist das Mumford-Shah Funktional:

$$\mathbf{E}(g, K, y) = \lambda^2 \int_{D \setminus K_g} \|\nabla g(u)\|_2^2 du + \alpha \cdot L(K_g) + \int_D |g(u) - y(u)|^2 du$$

Hierbei entspricht der erste Term dem Energieterm für die Glattheit des Bildes g . Der zweite Term bestraft lange, verschnörkelte Kanten K_g , und der dritte Term beschreibt die Abweichung des Bildes g von dem verrauschten Bild y .