

# Bayessche Tomographie

Seminar: Bayessche Ansätze in der Bildanalyse



von

**Stefan Sugg**

im

**Sommersemester 2006**

Prof. Dr. V. Schmidt, Jun.-Prof. E. Spodarev

Universität Ulm  
Abteilung Stochastik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Transmissionstomographie</b>	<b>4</b>
2.1	Modellbildung . . . . .	4
2.2	Rekonstruktion . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Emissionstomographie</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>3D-Modell</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>11</b>

# 1 Einführung

Unter dem Begriff Tomographie (altgriechisch: tome - Schnitt, graphi- die Schrift) werden verschiedene bildgebende Verfahren zusammengefasst, mit denen die räumliche Struktur eines Objektes ermittelt werden kann. Die Tomographie hat zur Aufgabe die innere Struktur eines Objektes zu ermitteln. Besonders anschaulich wird dies bei den aus der Medizin bekannten Verfahren, wie Röntgen, Ultraschalluntersuchung, Computer- und Kernspintomographie. Dabei haben sich die Einsatzgebiete der Tomographie längst über die der medizinischen Anwendung ausgeweitet. So werden tomographische Verfahren u.a. in der Qualitätskontrolle zur Kontrolle von Verbundstoffen und zur Fehlerdetektion in Volumen herangezogen. In der Seismologie wird mit Hilfe der sogenannten Reflexionstomographie, die Beschaffenheit des Erdinneren untersucht, um so z.B. Ursachen von Erdbeben erkennen zu können oder auch Gefahreneinstufungen für bestimmte Regionen vornehmen zu können.

Trotz dieser Vielseitigkeit basiert die Tomographie auf recht einfachen Modellen. In dieser Arbeit werden drei verschiedene Modelle der Tomographie vorgestellt.

Zur Rekonstruktion der Projektionen wird der Bayes'sche Ansatz verwendet.

## 2 Transmissionstomographie

### 2.1 Modellbildung

Um die innere Struktur eines Objektes erfassen zu können, wird das zu untersuchende Objekt in der Transmissionstomographie mit Strahlen durchleuchtet. In diesem Abschnitt werden nur zweidimensionale Objekte in einer Ebene  $\Pi$  betrachtet.

Im Folgenden wird das mathematische Modell der Transmissionstomographie näher erläutert.

Das Objekt wird von parallelen Strahlen durchquert. Die Intensität  $I_0$  mit der die Strahlen auf das Objekt treffen sei bekannt. Die Strahlenquelle befindet sich vor dem Objekt. Hinter dem Objekt befindet sich eine Empfängerleiste, die die Intensität der Strahlen nach Durchqueren des Objektes misst. Beim Durchqueren des Objektes verlieren die Strahlen durch Absorption an Intensität. Dieser Intensitätsverlust beruht auf physikalischen Grundlagen und wird mit der folgenden Formel zum Ausdruck gebracht:

$$I_1(s_1) = I_0 * \exp \left( - \int_{T(s_1)} x(s_1, s_2) ds_2 \right) \quad (1)$$

Man kann die Grauwerte  $x(s_1, s_2)$  des Objektes als Verlustdichte der Strahlen interpretieren. Insgesamt werden  $L \in \mathbb{N}$  solcher Messungen durchgeführt. Die verschiedenen Messungen unterscheiden sich dadurch, dass die Strahlenquelle und die Empfängerleiste in gleicher Weise um das Objekt rotieren. Wird der Versuchsaufbau im kartesischen Koordinatensystem dargestellt, so kann jede einzelne Messung durch den Winkel  $\alpha_l$ ,  $l = 1 \dots L$  der Empfängerleiste zur  $s_1$ -Achse eindeutig identifiziert werden. Jede dieser Projektionen läßt sich auf den einfachen Fall, dass die Strahlen parallel zur  $s_2$ -Achse und die Detektoren sich auf der  $s_1$ - Achse befinden, durch folgende Transformation zurückführen:

$$s'_1 = s_1 \cos \alpha + s_2 \sin \alpha \quad (2)$$

$$s'_2 = -s_1 \sin \alpha + s_2 \cos \alpha \quad (3)$$

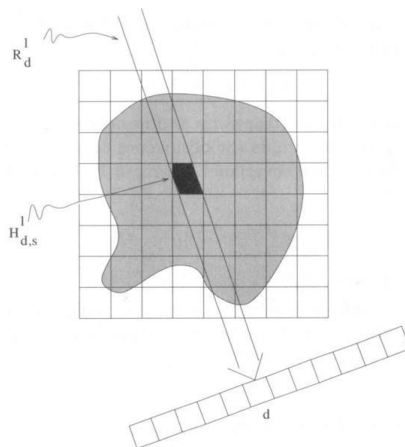


Abbildung 1: Modell der Transmissionstomographie

Im diskreten Modell wird die Empfängerleiste in  $n$  gleich große einzelne Detektoren aufgeteilt. Die Intensität die der  $d$ -te Detektor in der  $l$ -ten Messung misst wird mit  $y_d^l$  bezeichnet. Durch die Diskretisierung des Objektes läßt sich der Gesamtverlust, den ein Strahl beim Durchqueren erfährt, als Summe der Einzelverluste darstellen. Es dürfen nur die Einzelverluste der Pixel betrachtet werden, die der Strahl auch tatsächlich passiert.  $R_d^l$  bezeichnet die Menge der Strahlen, die bei der Messung  $l$  im Empfänger  $d$  ankommen. Die Größe  $H_{d,s}^l$  ist für jedes Pixel  $s = (s_1, s_2)$  des Objektes definiert und hat folgende Eigenschaften:

1.  $H_{d,s}^l \in [0, 1]$   $l = 1 \dots L, d = 1 \dots n,$
2.  $H_{d,s_i}^l$  gibt an welcher Anteil der Pixelfläche von den Strahlen  $R_d^l$  geschnitten wird
3.  $H_{d,s}^l := \text{surface}(s \cap R_d^l)$
4. durch  $(H_{d,s}^l * x(s))$  kann also der Einzelverlust der Strahlen  $R_d^l$  im Pixel  $s$  ausgedrückt werden

Folglich besitzt die Intensitätsgleichung (1) von Seite 4 im diskreten Fall die Form:

$$y_d^l = I_0 * \exp \left( - \sum_{s: \bar{s} \cap R_d^l \neq \emptyset} H_{d,s}^l * x(s) \right) \quad d = 1 \dots n, l = 1 \dots L \quad (4)$$

Statt der gemessenen Endintensitäten betrachtet man die Radontransformierte der Endintensitäten:

$$R_x(s_1) = -\log \frac{I(s_1)}{I_0} = \int_{T(s_1)} x(s_1, s_2) ds_2 \quad (5)$$

Die Radontransformierte steht nun also nicht mehr für die Endintensität der Strahlen, sondern für eine Größe, die proportional zum prozentualen Verlust der Strahlen ist. Berechnet man die Größe  $\tilde{y}_d^l = -\log \frac{I(s_1)}{I_0}$ , so vereinfacht die Radontransformation das Gleichungssystem (4) von Seite 5 zu:

$$\tilde{y}_d^l = \sum_{s: \bar{s} \cap R_d^l \neq \emptyset} (H_{d,s}^l * x(s)) \quad d = 1 \dots n, l = 1 \dots L \quad (6)$$

Mit einer geschickt gewählten Schreibweise erhält man die kompakte Form:

$$\tilde{y}^l = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1^l \\ \cdot \\ \tilde{y}_n^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{1,s_1}^1 & H_{1,s_2}^1 & \cdot & \cdot & H_{1,s_k}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{1,s_1}^L & H_{1,s_2}^L & \cdot & \cdot & H_{1,s_k}^L \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x(s_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(s_k) \end{pmatrix} = H_l x \quad (7)$$

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}^1 \\ \cdot \\ \tilde{y}^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ \cdot \\ H_L \end{pmatrix} * x = H x \quad (8)$$

Jede der Projektionen  $y_d$  wird als Realisierung einer Zufallsvariablen  $Y_d$  interpretiert. Mit Rauschen sieht das Modell folgendermaßen aus:

$$Y = HX + W \quad (9)$$

Es wird angenommen, dass die Komponenten  $w_d$  des Zufallsvektors  $W$  unabhängig sind. Um systematische Fehler auszuschließen, muss auch  $E(w_d) = 0$  gelten. Für die bedingte Erwartung folgt:

$$E(Y|x) = Hx \quad (10)$$

Oft wird eine Gauß'sche Störgröße mit bekannter Kovarianzmatrix  $V$  angenommen. Dann gilt für die bedingte Verteilung  $P(y|x)$ :

$$P(y|x) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(y - Hx)^T V^{-1}(y - Hx)\right) \quad (11)$$

## 2.2 Rekonstruktion

Aufgrund der Modellbildung erhält man  $n \cdot L$  Gleichungen mit den Grauwerten der einzelnen Pixel als Unbekannte. Dieses Gleichungssystem ist in der Regel jedoch unterbestimmt, da die Anzahl der Gleichungen  $n \cdot L$  viel kleiner als die Anzahl der Pixel ist. Deshalb interpretiert man die Grauwerte des Objektes  $X$  als zufällige Größe und macht eine Verteilungsannahme  $P(x)$  über diese Grauwerte. Durch die zufälligen Messfehler  $W$  werden auch die Messdaten bei gegebenem Objekt ( $Y|x$ ) zur Zufallsgröße. Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Ausprägung des Objektes bei gegebenen Messwerten lässt sich mit der Bayes-Formel darstellen:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x) * P(x)}{P(y)} \propto P(y|x) * P(x) \quad (12)$$

Ziel der Rekonstruktion ist es, eine beste Schätzung  $\hat{X}$  der Grauwerte zu berechnen. Dazu wird der Schätzer verwendet, der das Bayes-Risiko

$$R(\hat{X}) := \sum_{x,y} L(x, \hat{X})(y) P(y|x) P(x) \quad (13)$$

bei gegebener Verlustfunktion  $L : X \times X \rightarrow [0, \infty]$  minimiert.<sup>1</sup>

Wir nehmen an, dass die Zähl-dichte des Objektes eine Gibbs-Darstellung<sup>2</sup> der Form

$$P(X = x) = \frac{1}{Z} \exp(-U(x)) \quad (14)$$

mit einer Energiefunktion  $U(x)$  besitzt. Unter dieser Annahme ist es ausreichend, eine Energie zu modellieren, die sowohl die Modellbildung der Transmissionstomographie, als auch die a-priori Informationen über das Objekt  $X$  berücksichtigt. Die Lösung des Problems besteht dann darin, die Energie zu minimieren.

Die Tatsache, dass in der Anwendung oft bekannt ist, welche Art von Ob-

<sup>1</sup>siehe auch: Einführung in die Bayessche Bildanalyse, Benedikt Kramps

<sup>2</sup>siehe auch: Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale, Benjamin Mayer

jekt untersucht wird, führt dazu, dass man meist a-priori Aussagen über die räumliche Anordnung bzw. über die Beschaffenheit der Regionen im Inneren des Objektes machen kann. Um diese Informationen mathematisch greifbar zu machen, wird das Bildmodell nochmals modifiziert. Anstatt des bisher betrachteten Objektes  $X$  wird nun das Tupel  $(X^p, X^b)$  betrachtet. Die Werte von  $X^p$  sind aus  $E^p = \{1 \dots 255\}$  und stehen wiederum für die Grauwerte.  $X^p$  wird auch als verstecktes Feld bezeichnet, da diese Werte nicht direkt beobachtbar sind und gesucht werden. Die Werte des dualen Feldes  $X^b$  sind aus  $E^b = \{1 \dots m\}$  und sind als Labels zu verstehen, die das Objekt in Regionen aufteilen. Im Folgenden bezeichnet  $X$  das Tupel  $(X^p, X^b)$ .

Die Felder sind auf dem gleichen Gitter  $S$  definiert. Das Feld  $X = (X^p, X^b)$  ist als Markovfeld mit Nachbarschaftssystem  $\{N_s, s \in S\}$  modelliert, d.h. dass die Werte  $(x_s^p, x_s^b)$  im Pixel  $s$  nur von den direkten Nachbarn  $N_s$  abhängen.

Ein bedingtes Feld  $(X|Y)$  heißt bedingtes Markovfeld, falls die Markov'sche Eigenschaft gilt:

$$P(x_s | \check{x}_s, y) = P(x_s | N_s(x), y) (X|Y = y)^3 \quad (15)$$

$(X^p, X^b|Y)$  ist also ein bedingtes Markovfeld und mit Hilfe der Bayes-Formel kann die Gibbs-Energie dargestellt werden als:

$$U(x^p, x^b | y) = U_1(x^p, x^b) + U_2(y | x^p) \quad (16)$$

Diese Energie  $U(x^p, x^b | y)$  soll minimiert werden.

Die Energie  $U_2(y | x^p)$  ist aus der Modellbildung der Transmissionstomographie bekannt ( Gleichung (11) auf Seite 6).

Mit Hilfe der Bayesformel kann die a-priori Energie  $U_1(x^p, x^b)$  weiter aufgelöst werden:

$$U_1(x^p, x^b) = U_{1,1}(x^b) + U_{1,2}(x^p, x^b) \quad (17)$$

Zur Bestimmung der a-priori Energie werden häufig zwei Annahmen gemacht:

1. Man versucht das Vorwissen über die Beschaffenheit der Regionen mit Hilfe der Parameter  $\beta_{i,i'} \in \mathbb{R}$  zu berücksichtigen. Die erste a-priori Annahme betrifft nur die Labels; über die Grauwerte wird keine Aussage gemacht. Wird die Nachbarschaft der Materialien  $i$  und  $i'$  als sehr unwahrscheinlich eingeschätzt, dann wählt man für  $\beta_{i,i'}$  einen großen Wert. Bei gegebener Nachbarschaft ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Labels dann auf folgende Weise:

$$P(X_s^b = i | N_s(x)) \propto \exp \left( - \sum_{t \in N_s} \beta_{i, x_t^b} \right) \quad (18)$$

Für große  $\beta_{i,i'}$  geht die Wahrscheinlichkeit  $P(X_s^b = i | N_s(x))$  gegen null. Meist setzt man  $\beta_{i,i} = 0$ . Falls alle Nachbarn des Pixels  $s$  das gleiche Label  $i$  besitzen, so gehört dieses Pixel also auch fast sicher zu diesem Label. In der Gibbs-Darstellung ergibt sich daraus die Energie:

$$U_{1,1}(x^b) = \sum_{\langle s, s' \rangle} \sum_{i, i'} \beta_{i, i'} \mathbf{1}[x_s^b = i, x_{s'}^b = i'] = \sum_{i, i'} \nu_{i, i'}(x^b) \beta_{i, i'} \quad (19)$$

---

<sup>3</sup> $\check{x}_s$  bezeichnet alle Pixel außer  $s$

mit  $\nu_{i,i'}(x^b) = \sum_{\langle s,s' \rangle} \mathbb{1}[x_s^b = i, x_{s'}^b = i']$

Die Energie  $U_{1,1}(x^b)$  kann als Segmentierungsenergie verstanden werden.

- Die zweite a-priori Information betrifft nun die Grauwerte des Objektes. In der Anwendung wird mit einem Label ein Materialtyp assoziiert. Deshalb kann ohne große Einschränkung angenommen werden, dass der erwartete Grauwert  $\mu_i$  und die Varianz  $\sigma^2$  des i-ten Labels bekannt sind. Diese Größen können durch Probetomographien bestimmt werden. Eine weitere Annahme ist, dass der erwartete Grauwert eines Pixels  $s$  auch von den Grauwerten der Nachbarn mit dem gleichen Label abhängen. Die Stärke dieser Abhängigkeit wird mit dem Korrelationsfaktor  $\gamma_i$  ausgedrückt. Die folgenden Formeln beinhalten diese Annahmen:

$$E(X_s^p | N_s(x^p, x^b), x_s^b = i) = \mu_i + \gamma_i \sum_{t \in N_s} (x_t^p - \mu_i) \mathbb{1}[x_s^b = x_t^b] \quad (20)$$

$$\text{Var}(X_s^p | N_s(x^p, x^b), x_s^b) = \sigma^2 \quad (21)$$

Die Gibbs-Verteilung  $P(x^p | x^b)$  besitzt dann folgende Energie:

$$U_{1,2}(x^p, x^b) = \sum_s \frac{1}{2\sigma^2} (x_s^p - \mu_{x_s^b})^2 - \sum_{\langle s,t \rangle} \frac{\gamma_{x_s^b}}{\sigma^2} (x_s^p - \mu_{x_s^b})(x_t^p - \mu_{x_t^b}) \mathbb{1}[x_s^b = x_t^b] \quad (22)$$

Die Gesamtenergie des Feldes  $(X|Y)$  ist nun bekannt:

$$\begin{aligned} U(x^p, x^b | y) &= U_{1,1}(x^b) + U_{1,2}(x^p, x^b) + U_2(y | x^p) \\ &= \sum_{i,i'} \nu_{i,i'}(x^b) \beta_{i,i'} + \sum_s \frac{1}{2\sigma^2} (x_s^p - \mu_{x_s^b})^2 \\ &\quad - \sum_{\langle s,t \rangle} \frac{\gamma_{x_s^b}}{\sigma^2} (x_s^p - \mu_{x_s^b})(x_t^p - \mu_{x_t^b}) \mathbb{1}[x_s^b = x_t^b] \\ &\quad + (y - Hx)^T V^{-1} (y - Hx) \end{aligned} \quad (23)$$

Diese Energie kann nun mit einem geeigneten Algorithmus minimiert werden.



### 3 Emissionstomographie

Die Emissionstomographie unterscheidet sich von der Transmissionstomographie im Wesentlichen darin, dass das Objekt selbst die Strahlenquelle ist. Dieser Unterschied schränkt die Anwendungsgebiete der Emissionstomographie stark ein. So kann der Grauwert  $x_s$  des Objektes beispielsweise die Konzentration eines radioaktiven Isotops darstellen. Die Größe  $y_d^l$  steht dann für die Anzahl der Teilchen, die an der  $d$ -ten Detektorposition in der  $l$ -ten Messung ankommen.

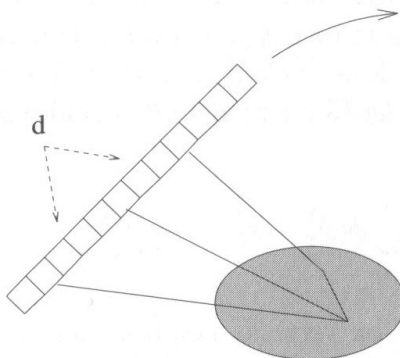


Abbildung 2: Modell der Emissionstomographie

Auf Grund des Zerfallsgesetzes wird  $y_d$  als Realisierung einer poissonverteilten Zufallsvariable  $Y_d$  angenommen.  $H_{d,s}^l$  gibt nun die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Teilchen, das in der  $l$ -ten Messung vom Pixel  $s$  ausgeht, in der  $d$ -ten Detektorposition ankommt. Mit dieser Interpretation gilt wieder:

$$E(Y_d|x) = \sum_s H_{d,s} x_s \quad (24)$$

Die bedingte Verteilung ist gegeben durch:

$$P(y|x) = \prod_{d=1}^{nL} \frac{(\sum_s H_{d,s} x_s)^{y_d}}{(y_d)!} \exp(-\sum_s H_{d,s} x_s) \quad (25)$$

Die externe Energie  $U(y|x)$  ist nun wieder durch  $P(y|x)$  bekannt. Unter der Annahme, dass die Isotopenkonzentration annähernd konstant innerhalb einzelner Regionen und der Übergang zwischen zwei Regionen scharf ist, kann man die Energie

$$U_1(x) = \theta \sum_{[s,t]} \phi(x_s - x_t) + \frac{\theta}{\sqrt{2}} \sum_{\langle s,t \rangle} \phi(x_s - x_t) \quad (26)$$

mit der Potentialfunktion

$$\phi(u) = \frac{-1}{1 + (u/\beta)^2} \quad (27)$$

verwenden.

$[s, t]$  bezeichnet die horizontale und vertikale Nachbarschaft,  $\langle s, t \rangle$  die diagonale Nachbarschaft von  $s$  und  $t$ . Die niederen Energiekonfigurationen dieser Energiefunktion entstehen bei glatten Regionen und klaren Grenzen zwischen den Regionen.

## 4 3D-Modell

Auch im 3D-Modell soll die interne Struktur eines Objektes rekonstruiert werden. Auf diese Weise können Defekte und Einschließungen entdeckt werden. Dazu liegen radiographische 2D- Projektionen  $D_l$   $l = 1 \dots L$  vor. Die Ausprägung des Objektes auf dem dreidimensionalen Gitter  $S$  wird mit  $\{x_s, s \in S\}$  bezeichnet.  $H_{d,s}^l = volume(\bar{s} \cap R_d^l)$  beschreibt den Anteil, den das Pixel  $\bar{s}$  an der Projektion  $y_d^l$  hat.

$y_d^l$  ist die Realisierung der Zufallsvariablen:

$$Y_d^l = \sum_{s: \bar{s} \cap R_d^l \neq \emptyset} H_{d,s}^l x_s + W_d^l, \quad l = 1 \dots L \quad (28)$$

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass eine Einschließung durch eine homogene Region auf einem anderen Grauwertlevel als das restliche Objekt erkennbar ist. Sowohl die Anzahl und die Form der Defekte sollen bei der Rekonstruktion zum Vorschein kommen. Das Transmissionsmodell wird modifiziert, indem wir nun kegelförmige Strahlen annehmen.

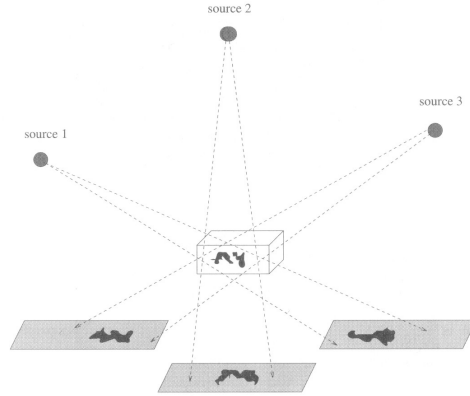


Abbildung 3: 3D-Transmissionstomographie

Eine naheliegende Energie, würde die Terme  $\sum_l \|y^l - H^l x\|^2$  und  $\|x - \bar{x}\|^2$  enthalten, wobei  $\bar{x}_s$  für den mittleren Grauwert der 26 Nachbarpixel steht. Die beiden Terme besitzen jedoch nicht die gleiche Größenordnung, wodurch sie schwierig zu vergleichen sind, deshalb werden sie normiert:

$$U_1(x) = \frac{\langle x, \bar{x} \rangle^2}{\|x\|^2 \|\bar{x}\|^2} \quad (29)$$

und

$$U_{2,l}(y^l|x) = \frac{\langle y^l, H^l x \rangle^2}{\|y^l\|^2 \|H^l x\|^2} \quad l = 1 \dots L \quad (30)$$

mit dem Regularisierungsparameter  $\alpha$  gilt dann:

$$U(x|y) = \alpha U_1(x) + \frac{1}{L} \sum_l U_{2,l}(y^l|x) \quad (31)$$

Diese Energie muß nun wieder minimiert werden.

## 5 Literaturverzeichnis

- B. Chalmond. *Modelling and Inverse Problems in Image Analysis*. Springer, 2003
- J. Bayer, F. Puente Leon. *Die Radontransformation in der digitalen Bildbearbeitung*. at 10/2002
- <http://de.wikipedia.org>