Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

Benjamin Mayer

Universität Ulm

15. Mai 2006

– Inhalt

- Motivation
- Anwendungsbeispiele
- Markov-Felder
- Gibbs-Potentiale
- Gibbs-Markov-Äquivalenz
- Inverse Probleme

– Wieso sind zufällige Markov-Felder wichtig in der Bildanalyse?

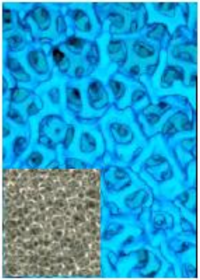
- *Problem*: Gemeinsame Verteilung eines Bildes bestimmen
- Ansatz zur Bestimmung meist unklar
- *Ausweg*: Annäherung der Bildausgabe durch bedingte Verteilungen
- Dadurch lässt sich der Aufwand zur Bearbeitung eines Bildbereiches reduzieren
- Konzentration auf die Nachbarn des zu untersuchenden Datenpunktes (Pixel)

Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

– Beispiele für ein zu untersuchendes Bild

Abbildung: Zeitungsausschnitt in invertierter Darstellung

– Beispiele für ein zu untersuchendes Bild



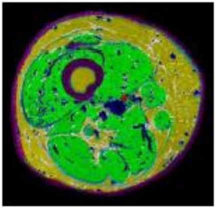


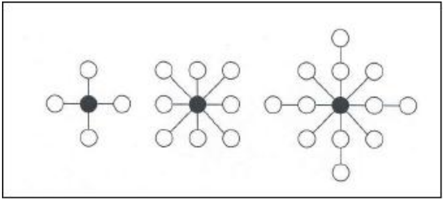
Abbildung: Graustufenbild, offenporiger Schaumstoff, Bild des Gehirns mit CT

– Was ist ein Zufallsfeld?

- Sei S eine endliche Menge mit Elementen s, die als Stellen oder Pixel bezeichnet werden
- Sei Λ eine endliche Menge, die als Phasenraum bezeichnet wird
- Eine Folge $X = \{X(s) : s \in S\}$ von Zufallsvariablen mit Werten im Phasenraum Λ heißt dann ein *Zufallsfeld*

– Was ist ein Nachbarschaftssystem?

- Ein *Nachbarschaftssystem* auf S ist eine Familie $N = \{N_s : s \in S\}$ von Teilmengen von S, so dass für alle $s \in S$ gilt
  1. $s \notin N_s$
  2. $t \in N_s \Rightarrow s \in N_t$
- Sind die Pixel s und t Nachbarn, so schreiben wir $s \sim t$



– Was ist ein Nachbarschaftssystem?

- Eine Teilmenge N_s von S heißt Nachbarschaft des Pixels s
- Das Tupel (S,N) heißt *Topologie*
- In der Interpretation dieses Tupels ist S die Menge der zu untersuchenden Pixel und N die vereinigte Menge der Nachbarschaftssysteme aller Pixel $s \in S$

Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

– Markovsche Eigenschaft

- Sei $X_0, X_1, ... : \Omega \rightarrow E$ eine Folge von Zufallsvariablen, die demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) angehören und ihre Werte in $E = \{1,2,...,l\}$ annehmen
- Dann heißt die Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen eine *Markovkette*, wenn gilt

$$P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$$

für beliebige n = 0,1,2,... und $i_0, i_1, ..., i_n \in E$

– Markovsche Eigenschaft

- Die bedingte Verteilung des (zufälligen) Zustandes X_n der Markovkette $\{X_n\}$ zum „Zeitpunkt“ n wird vollständig durch den Zustand $X_{n-1} = i_{n-1}$ zum vorhergehenden Zeitpunkt n-1 bestimmt
- Eine Verallgemeinerung der Markovschen Kette ins zweidimensionale wird als *Markovsches Feld* bezeichnet
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Pixels oder Datenpunkts in einem Gitter, beispielsweise ein Bild, wird also nur durch die Zustände der unmittelbaren Nachbarn bestimmt

– $Zufaelliges\ Markov - Feld\ (MRF)$

- Ein Zufallsfeld X heißt $zufaelliges\ Markov - Feld\ bezueglich$ eines Nachbarschaftssystems N, wenn für alle Pixel $s \in S$ die Zufallsvariablen X(s) und X(S $\setminus N_s \cup \{s\}$) zu gegebenem X(N_s) unabhängig sind

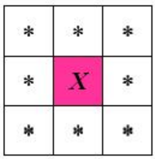
Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

– Zufälliges Markov-Feld

- Ein Zufallsfeld X ist ein Markov-Feld, wenn

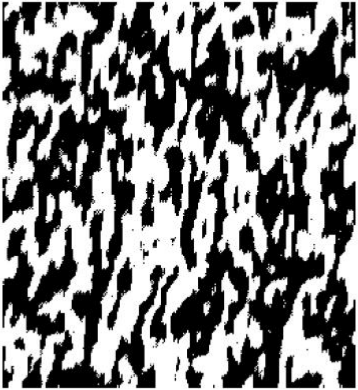
$$P(x_s|\{x_t, t \neq s\}) = P(x_s|\{x_t, t \in N_s\})$$

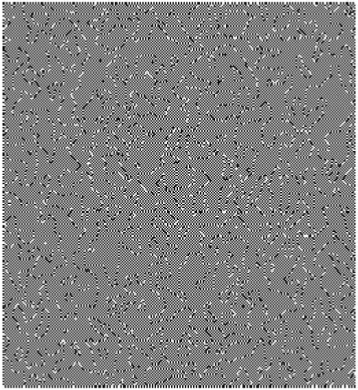
- Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Pixel s einen bestimmten Wert annimmt hängt ausschließlich von den Werten der Nachbarn t ab mit $t \in N_s$



Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

– Beispiele für Markov'sche Felder





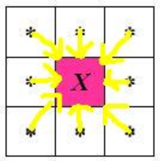
– Lokale Charakteristik von P

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß P sei strikt positiv, d.h. $P(x) > 0$, $x \in X$
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten der Form
$$P(X_A = x_A | X_{S\setminus A} = x_{S\setminus A}),\ A \subset S,$$
heißen lokale Charakteristiken von P
- gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass $x_A = (x_s)_{s\in A}$ eine Struktur in A ist unter der Bedingung, dass $x_{S\setminus A} = (x_s)_{s\in S\setminus A}$ für den Rest der Umgebung gilt

Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

– Zusammenhang Lokale Charakteristik und Markov'sche Eigenschaft

- der Zustand des Pixels s ist abhängig von den Zuständen seiner *unmittelbaren* Nachbarn $t \in N_s$



– Local Specifications (lokale Bestimmtheiten)

- Die lokale Charakteristik auf einem MRF an der Stelle s ist gegeben durch die Funktion

$$\pi^{\mathrm{s}}(x) = P(X(s) = x(s) | X(N_s) = x(N_s))$$

- Die Familie $\{\pi^{\mathrm{s}}\}_{s \in S}$ heißt local specification oder die lokale Bestimmtheit des MRF

– Gibbs-Feld

- Eine spezielle Klasse von Zufallsfeldern sind die *Gibbs – Felder*
- Das Gibbs-Feld ist charakterisiert durch die analytische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung

– *Potential*

- Ein Potential ist eine Familie $\{U_A : A \subset S\}$ von *Funktionen* in X
- Für die Familie $\{U_A : A \subset S\}$ gilt
  1. $U_\emptyset = 0$
  2. $U_A(x) = U_A(y)$, wenn $x_s = y_s \; \forall s \in A$
- Die Energie von U ist gegeben durch

$$H_U(x) = \sum_{A \subset S} U_A(x)$$

- Hierbei sei x der Gitterpunkt eines Bildes, der den Zustand s beschreibt, $A \subset S$ sei eine Teilmenge aller Pixel in S

– *Gibbs – Verteilung*

- Ein Zufallsfeld X ist ein Gibbs-Feld der Energie $H_U(x) = \sum_{A \subset S} U_A(x)$, wenn X von der sogenannten *Gibbs – Verteilung*

$$\Pi(x) = P(X = x) = \frac{1}{Z} * exp(-H_U(x))$$

beherrscht wird

– Gibbs-Verteilung

- Z ist hierbei eine Normierungskonstante, die aus P ein Wahrscheinlichkeitsmaß macht
- Z lässt sich oftmals weder analytisch noch numerisch bestimmen aufgrund der großen Anzahl möglicher Strukturen
- Jede Verteilung eines Zufallsfeldes kann in der Form $\Pi(x)$ dargestellt werden

– Die spezielle Rolle der Gibbs-Felder

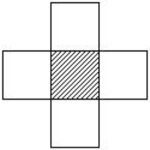
- Sei μ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem Zufallsfeld X
- Die Information, die wir durch die Beobachtung $x \in X$ erhalten, wird gemessen durch die Zahl $-ln\mu(x)$
- Man betrachtet den mittleren Informationsgehalt einer Beobachtung $x \in X$, die sogenannte *Entropie*, durch $\Phi(\mu) = -\sum_x \mu(x) ln\mu(x)$ und die mittlere Energie $E(H;\mu) = \sum_x H(x)\mu(x)$ von μ

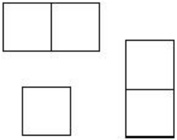
– Die spezielle Rolle der Gibbs-Felder

- Es gilt $E(H;\mu) - \Phi(\mu) \geq lnZ$
- Diese Ungleichung ist in der statistischen Physik bekannt als das *Gibbs variational principle*
- Z ist hierbei die Normierungskonstante der Gibbs-Verteilung
- Das *Gibbs variational principle* bedeutet, dass das Gibbs-Feld Π die größte Entropie $\Phi(\mu)$ hat unter allen Verteilungen

– *Clique*

- Eine Teilmenge $C \subset S$ heißt für $c \in C$, $c \geq 2$, eine Clique der Topologie (S,N) genau dann, wenn zwei beliebige verschiedene Elemente c_1, $c_2 \in C$ gegenseitige Nachbarn sind, d.h. wenn gilt $c_1 \in N_{c_2}$ und $c_2 \in N_{c_1}$
- Beispiel für Cliquen einer Vierer-Nachbarschaft





– *Nachbarschaftspotential*

- U heißt *Nachbarschaftspotential bezueglich* eines Nachbarschaftssystems N, wenn $U_A = 0$ für alle Teilmengen A von S, die *keine* Clique bilden
- Wenn U kein Nachbarschaftspotential ist, so besitzt das zugehörige Gibbs'sche Zufallsfeld keine Markov'sche Eigenschaft

– Beispiele für Energien und Potentiale

- Grundlage sei das diskrete Energiemodell

$$H(g|x) = \alpha H_1(g) + H_2(x|g) =$$
$$\alpha \sum_s (2g(t_s) - g(t_{s-1}) - g(t_{s+1}))^2 + \sum_s (x_s - g(t_s))^2$$

- x sei hierbei das Orginalbild
- t_s sind die benachbarten Stellen des Pixels s
- Das Bild ist hierbei eindimensional, sonst wären $\dots t_{s-1}, t_s, t_{s+1} \dots$ nicht definiert
- g ist eine Annäherung von x, man sagt g ist ein *Spline*
- H_1 misst die lokale Abweichung der diskretisierten Oberfläche g

Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

– Krümmungsenergie

- Wir betrachten den Term H_1 und schreiben ihn etwas um in
$$H_1(g) = \sum_s (2g(t_{s+1}) - g(t_s) - g(t_{s+2}))^2$$
- Es gilt hier $x \equiv g$ mit $S = \{t_1, ..., t_n\}$ und $t \in \mathbb{R}$
- Man erhält $H_1(g) = \sum_s (6g(t_s)^2 - 4g(t_s)g(t_{s+1}) + g(t_s)g(t_{s+2}))$
- H_1 ist ein Nachbarschaftspotential und beschreibt die Glattheit der Annäherung
- α ist ein Kontrollparameter für den Einfluss der Glattheit auf das Modell
- g kann als Realisierung eines Markov-Feldes X aufgefasst werden mit der Gibbs-Verteilung

$$P(X = g) = \frac{1}{Z} * exp(-\alpha H_1(g))$$

– Bernoulli Energie

- X sei ein binäres Markov-Feld mit $S \subset \mathbb{Z}^2$ und Werten in $\Lambda = \{0, 1\}$
- Das Nachbarschaftssystem von s sei das der vier nächsten Nachbarn
- t_s ist genau dann ein Nachbar von s, wenn $||s - t||_2 = 1$
- Die Cliquen sind die Pixel s und die Paare $s \sim t$, so dass $||s - t||_2 = 1$
- X heißt ein Bernoulli Feld mit der folgenden Gibbs-Verteilung

$$P(X = x) = \frac{1}{Z} * exp(-H(x))$$

und es gilt

$$H(x) = \alpha_1 \sum_s x_s + \alpha_2 \sum_{<s,t>} x_s x_t$$

Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

– Gauß Energie

- Das Nachbarschaftssystem von s sei wiederum das der vier nächsten Nachbarn
- Wir benutzen Λ, um ein diskretes symmetrisches Intervall anzugeben
- Ein Markov-Feld mit diesem Nachbarschaftssystem heißt ein zentriertes Gauß-Feld und ist gegeben durch die folgende Gibbs-Verteilung

$$P(X = x) = \frac{1}{Z} * exp(-H(x))$$

mit

$$H(x) = \alpha_1 \sum_s x_s^2 + \alpha_2 \sum_{<s,t>} x_s x_t$$

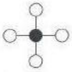
– Ising Modell

- Modell für binäre Bilder (schwarz - weiß)
- Testmodell für grundlegende Fragen über Markov-Felder
- Beschreibt verschiedene fundamentale und typische Phänomene, die in vielen komplexen Systemen vorkommen (z. B. Ferromagnetismus, Metalllegierungen)

Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

– Ising Modell

- $S = \mathbb{Z}^2$, $\Lambda = \{+1,-1\}$ im endlichen Modell
- Das Nachbarschaftssystem N ist das der vier nächsten Nachbarn



- Die vollständig bedingte Dichte ist gegeben durch

$$P(x_s = 1 | x(N_s)) = \frac{exp(\beta n_s^b)}{exp(\beta n_s^b) + exp(\beta n_s^w)}$$

– Ising Modell

- β ist ein positiver Parameter
- $n_s^b = \sum_{t \sim s} 1_{[x_t=1]}$: Anzahl der schwarzen Nachbarn von s
- $n_s^w = \sum_{t \sim s} 1_{[x_t=-1]}$: Anzahl der weißen Nachbarn von s
- Die Energiefunktion ist hier im einfachsten Fall gegeben durch

$$\mathrm{H(x)} = \text{-}\beta \sum_{s \sim t} x_s x_t$$

– Potts Modell

- Verallgemeinerung des Ising Modells auf mehr als zwei Farben
- $x_s \in \{0, 1, 2, ..., n_c - 1\}$, Anzahl der Farben $n_c > 2$
- Die Farben sind nicht geordnet
- Die Energiefunktion ist gegeben durch

$$\mathrm{H(x)} = \text{-}\gamma \sum_{s \sim t} \delta_{x_s, x_t}$$

  mit

$$\delta_{a,b} = 1, \text{ wenn a} = \text{b und } \delta_{a,b} = 0 \text{ sonst}$$

- Das Ising Modell ist also ein Spezialfall des Potts Modells für zweifarbige Bilder

– Ising Modell und Potts Modell

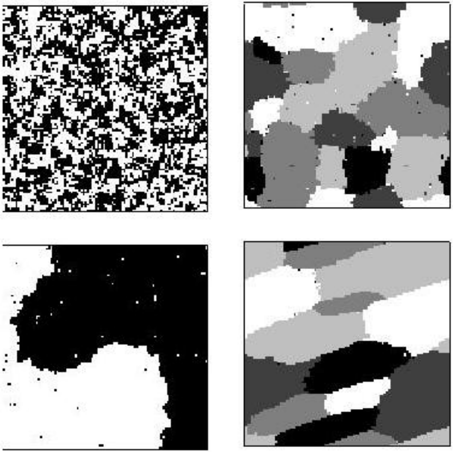


Abbildung: oben links: kleines β, unten links: großes β

– Binäre auto-logistik Modelle

- Jeder Term im Ising Modell kann individuell gewichtet werden, so dass
$$H(x) = \sum_{s \sim t} \vartheta_{st} x_s x_t + \sum_s \vartheta_s x_s$$
mit $x_s = \pm 1$
- Wenn $\vartheta_{st} < 0$ gilt ist $x_s = x_t$ zu favorisieren
- Umgekehrt unterstützt $\vartheta_{st} > 0$ die These $x_s = -x_t$

– Gibbs-Markov-Äquivalenz

- Die Gibbs-Markov-Äquivalenz besteht aus zwei Teilen
- Der direkte Teil liefert die Aussage: Gibbs-Felder sind Markov-Felder
- Der andere (theoretische) Teil ist durch den Satz von Hammersley-Clifford gegeben
- Zusammen mit dem direkten Teil kann man aus Hammersley-Clifford folgern, dass Gibbs-Verteilungen und MRFs im Wesentlichen dieselben Objekte sind

– Gibbs-Felder sind Markov-Felder

- Sei X ein Gibbs-Feld des Potentials U. Wenn U ein Nachbarschaftspotential bezüglich eines Nachbarschaftssystems N ist, so ist X ein Markov-Feld bezüglich desselben Nachbarschaftssystems

– Satz von Hammersley-Clifford

- Sei P die Verteilung eines zufälligen Markov-Feldes bezüglich einer Topologie (S,N), wobei P strikt positiv sei. Dann gilt

$$P(x) = \frac{1}{Z} * exp(-H_U(x))$$

in Verbindung mit der Topologie (S,N) für eine Energiefunktion H(x), die von einem Gibbs-Potential $\{\mathrm{U}_A : \mathrm{A} \subset \mathrm{S}\}$ abstammt

– Inverse Probleme

- direktes Problem: man ermittelt aus bekannten Ursachen die unbekannten Wirkungen, d.h. beispielsweise wie verändert sich ein Bild, das aufgrund bekannter Ursachen bei der Übertragung gestört wird
- inverse Problemstellung: gegeben sind Beobachtungen der Wirkungen (ein übertragenes Bild) und gesucht sind die Ursachen
- Die gesuchten Größen lassen sich meist nicht direkt messen
- Vereinfacht gilt im inversen Problem: Wirkung $\Longrightarrow$ Ursache

– Inverse Probleme

- Bisher verstanden wir das Zufallsfeld X als direkt beobachtbar
- Tatsächlich ist X jedoch in den meisten Situationen der Bildanalyse nicht direkt beobachtbar
- Man nennt ein Zufallsfeld X versteckt, wenn es nicht „physisch" beobachtbar ist

Zufällige Markov-Felder und Gibbs-Potentiale

– Inverse Probleme

- Die Definition eines inversen Problems ist bei *Bernard Chálmond* zusammengefasst durch die geordnete Dreiergruppe (y^o,X,H($x|y,\theta$))
    1. Das erste Element ist ein beobachtetes Feld y^o auf einem Gitter $\tilde{S}$
    2. Das zweite Element X ist die Definition eines versteckten Zufallsfeldes auf einem Gitter S, wobei S nicht notwendigerweise identisch mit $\tilde{S}$ sein muss
    3. Das dritte Element ist die Definition einer Energiefunktion, dargestellt durch

    $$H(x|y,\theta) = H_1(x,\theta_1) + H_2(y,\theta_2)$$

    Die Energiefunktionen H_1 und H_2 sind Energien eines Nachbarschaftspotentials und $\theta_{i,j}$ sind Parameter zur Gewichtung
- Die Zerlegung der Energiefunktion H ist additiv, dies folgt aus der a-posteriori-Wahrscheinlichkeit
- Die Lösung dieses inversen Problems bringt die Berechnung des Minimums einer definierten Kostenfunktion mit sich gemäß $H(x|y^o,\theta)$

– Beispiel eines inversen Problems

- In der numerischen Differentiation wird die Ableitung einer Funktion f im Punkt x_0 gesucht, bekannt sind die Funktionswerte
- Die Ableitung lässt sich bestimmen mittels Differenzenquotient

$$f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Ersetzung des Grenzwertes durch die Wahl eines geeigneten Punktes x

– Zusammenfassung und Ausblick

- Problemstellung der Bildanalyse (Bestimmung einer gemeinsamen Verteilung eines Bildes) wird vereinfacht durch MRF's
- Aufwand zur Bearbeitung eines Bildes wird reduziert
- Anwendung in vielen Bereichen (Medizin, Technik, Kommunikation)
- Anwendungen stochastischer Bildmodelle als nächstes Thema

– Literatur

- Gerhard Winkler „Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods“
- Bernard Chálmond „Modeling and Inverse Problems in Image Analysis“
- Jesper Møller „Spatial Statistics and Computational Methods“
- Pierre Brémaud „Markov Chains, Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues“
- Volker Schmidt „Markov Ketten und Monte Carlo Simulation“
- Arnd Rösch „Inverse Probleme“, TU Berlin
- http://www.google.de, http://www.wikipedia.org