



Bildentrauschung und Kantenextraktion

Seminar: Bayessche Ansätze in der Bildanalyse

Peter Straka

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Universität Ulm

29.05.06



Outline

- 1 Wiederholung
 - Bildmodell
 - Bayes
- 2 Bildentrauschung mit Masken
 - Masken
 - Beispiele
 - Fazit
- 3 Zum Informationsgehalt von Kanten
 - Beispiel KEK
 - Entrauschung und Kantenerhaltung



Outline

- 4 A priori Verteilungen
 - glättend
 - glättend und kantenerhaltend
 - glättend, kantenerhaltend und kantenorganisierend
 - Glätten höherer Ordnung
 - reine Kantenextraktion

- 5 Weitere Bildmodelle
 - diskretes Bild, stetige Intensitäten
 - stetiges Bild, stetige Intensitäten



diskretes Bildmodell

- S endliche Pixelmenge
- $I \subseteq \mathbb{R}^+$ endliche Menge von Pixelintensitäten (hier: Grauwerte)
- Pixel $t \in S$ habe Grauwert $g_t \in I$
- $\mathbf{G} = I^S$ ist die Menge aller möglichen Bilder
- $g := \{g_t, t \in S\} \in \mathbf{G}$ ist ein Bild
- $t, s \in S, t \sim s$ bedeutet: Pixel s und Pixel t sind benachbart



a priori Verteilung in Gibbsscher Form

- definiere Energiefunktion $K : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbb{R}$
- $Z := \sum_{g \in \mathbf{G}} \exp(-K(g))$
- (a priori) Wahrscheinlichkeitsverteilung
 $\Pi(g) = Z^{-1} \exp(-K(g))$
- K ist so gewählt, dass erwünschte Bilder niedrigere Energie haben als unerwünschte.



a posteriori Verteilung

Problem: Wiederherstellung des Originalbildes g aus dem stochastisch verrauschten Bild $Y = y$. Modellannahmen:

- Verteilung von Y gegeben g , $P_Y(\cdot|g)$ bekannt
- bedingte Verteilung $P_Y(\cdot|g)$ hat Gibbssche Darstellung mit Energiefunktion $D(g, \cdot)$

Nach einer einfachen Rechnung sieht man dass die a posteriori Verteilung $P(\cdot|y)$ auch Gibbssch ist mit Energiefunktion $K(\cdot) + D(\cdot, y)$.



Filtermasken

Entrauschen oder Glätten geschieht oft durch gewichtete Mittelung der Grauwerte mittels Masken.

- z.B. gleichmäßige und binomiale Filtermasken:

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Der Grauwert $g_{(k,l)}$ im Pixel (k, l) des geglätteten Bilds beträgt dann $g_{(k,l)} = \sum_{i,j=-1}^1 M_{ij} g_{(k+i,l+j)}$ Hier sind die Zeilen- und Spaltenindizes aus $\{-1, 0, +1\}$



Beispiele

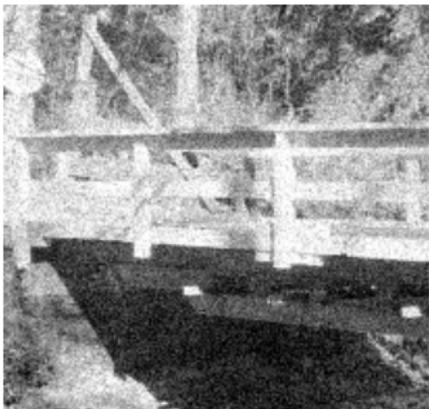


Abbildung: links: gaußsches Rauschen; rechts: nach Binomialfilter



Beispiele

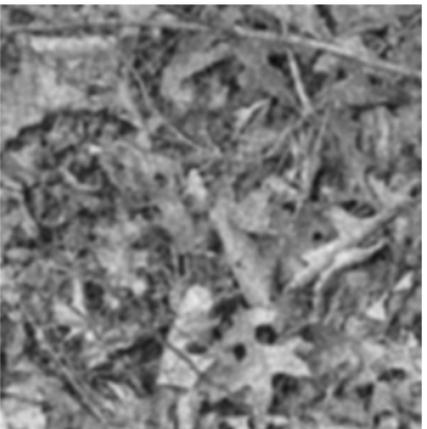


Abbildung: links: gaußsches Rauschen; rechts: nach Binomialfilter



Beispiele



Abbildung: links: gaußsches Rauschen; rechts: nach Binomialfilter



Vor- und Nachteile von Filtermasken

Vorteile:

- relativ geringer Rechenaufwand
- Rauschen wird verringert

Nachteile:

- Kantenkontrast wird verringert
- \Rightarrow Informationsverlust!



Kanten

- Kanten sind Stellen im Bild an denen benachbarte Pixel stark unterschiedliche Grauwerte haben.
- An diesen Stellen enthält das Bild die meisten Informationen!
- Beispiel KEK:



Kantenerhaltende Kompression

Verfahren bei KEK:

- 1 Kanten extrahieren und separat abspeichern



- 2 Speichere Pixelwerte aus einem dünnen Teilgitter des Originalbildes

Die gespeicherte Datenmenge aus Kanten und Teilgitter kann je nach Komplexität des Bildes weniger als 3% betragen.



Wiederherstellung des Bildes

Aus dieser kleinen Datenmenge wird das Bild nun wiederhergestellt:

- Man interpoliert alle nichtgespeicherten Grauwerte mit den gespeicherten Grauwerten
- Dabei verwendet man aber für jeden Pixel nur diejenigen gespeicherten Pixelwerte die nicht von einer Kante verdeckt und „sichtbar“ sind

Man erzielt ansehnliche Ergebnisse trotz hoher Kompressionsrate:



Beispiel KEK



Abbildung: links: Original; rechts: Nachbildung von KEK



Bsp: selektiver Gaußscher Weichzeichner

Der „selektive Gaußsche Weichzeichner“ ist ein Algorithmus der Filtermasken variabler Größe verwendet. Als Parameter übergibt man

- ① die maximale Maskengröße R und
- ② einen Schwellenwert Δ der die Kanten im Bild definiert.

Nun wird auf jeden einzelnen Pixel eine Filtermaske angewendet. Die Größe r der Maske wird dabei so gewählt dass

- $r \leq R$ und
- die Maske gerade noch keinen Kantenpixel überdeckt.



Entrauschung und Kantenerhaltung



Abbildung: Binomialfilter vs. selektiver Gaußscher Weichzeichner
(implementiert im Open Source Programm GIMP 2.2)

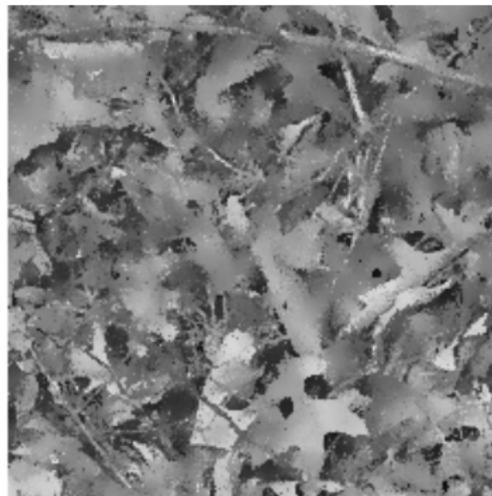
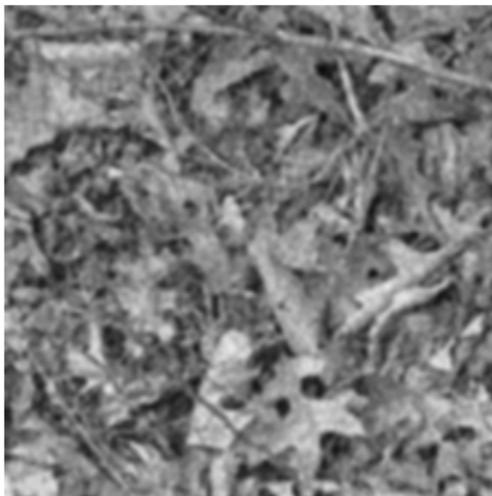


Abbildung: Binomialfilter vs. selektiver Gaußscher Weichzeichner
(implementiert im Open Source Programm GIMP 2.2)



Entrauschung und Kantenerhaltung



Abbildung: Binomialfilter vs. selektiver Gaußscher Weichzeichner
(implementiert im Open Source Programm GIMP 2.2)



zurück zu Bayesschem Ansatz

- Ziel: Bayessches Modell das verrauschte Bilder glättet und möglichst viel Informationen aus den Kanten in die a posteriori Verteilung übernimmt
- Dabei ist die Wahl der a priori Verteilung entscheidend.



glättend

glättende a priori Verteilung

Situation: verrauschtes Graustufenbild. Von allen Bildern $g \in G$ suchen wir eines das

- möglichst glatt ist und
- dennoch dem verrauschten Bild y möglichst ähnlich ist.

Zu diesem Zweck bildet man den Gesamtenergieterm

$H(g, y) = \beta K(g) + D(g, y)$, wobei

- $K(g) = \sum_{s \sim t} (g_s - g_t)^2$ die Glattheit des Bildes beschreibt und
- $D(g, y) = \sum_{s \in S} (g_s - y_s)^2$ die Ähnlichkeit zum verrauschten Bild y beschreibt



glättend

glättende a priori Verteilung (2)

Bestimme nun ein Bild g das die Gesamtenergie

$$H^\beta(g, y) = \beta K(g) + D(g, y)$$

möglichst minimiert.

Ergebnis: Kanten gehen nicht ins Modell ein und werden geglättet, daher starker Informationsverlust etwa wie bei Filtermasken.

Für die Glättung mit Kantenerhaltung erweitert man Bildmodell:



glättend und kantenerhaltend

Modell mit Mikrokannten

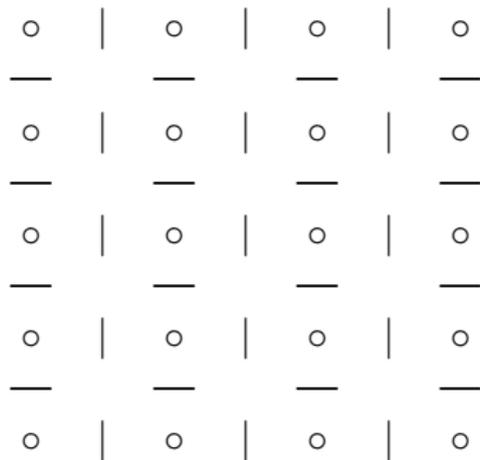


Abbildung: Modell mit Pixeln (○) und Mikrokannten (| und —)



glättend und kantenerhaltend

Mikrokanten

Mikrokanten dienen als Schaltvariablen:

- $e_{st} :=$ Mikrokante zwischen den benachbarten Pixeln $s \sim t$.
- $e_{st} = \begin{cases} 1, & \text{Mikrokante ein} \\ 0, & \text{Mikrokante aus} \end{cases}$

In diesem Bildmodell sind die Variablen einerseits die Grauwerte g_t , $t \in S$ der einzelnen Pixel und andererseits die Mikrokanten e_{st} , $s, t \in S$, $s \sim t$. Ein Bild wird nun beschrieben durch (g, e) , wobei $g := \{g_t, t \in S\}$ und $e := \{e_{st}, s \sim t\}$.



a priori Energieterm

Mikrokanten lassen sich nun wie folgt in den a priori Energieterm einbeziehen:

- ohne Mikrokanten: $K^\beta(g) = \beta \sum_{s \sim t} (g_s - g_t)^2$
- jetzt: $K^{\alpha, \lambda}(g, e) = \sum_{s \sim t} (\lambda^2 (g_s - g_t)^2 (1 - e_{st}) + \alpha e_{st})$

Lässt man zunächst g außer Acht und minimiert $K^{\alpha, \lambda}(g, e)$ nur in e , so wird $e_{st} = 1$ wenn $\lambda^2 (g_s - g_t)^2 > \alpha$, d.h. bei großem Pixelkontrast.



Gesamtenergie

In der Praxis versucht man, den Gesamtenergieterm

$$\begin{aligned}
 & K((g, e), y) \\
 &= K^{\alpha, \lambda}(g, e) + D(g, y) \\
 &= \sum_{s \sim t} (\lambda^2 (g_s - g_t)^2 (1 - e_{st}) + \alpha e_{st}) + \sum_{s \in S} (g_s - y_s)^2
 \end{aligned}$$

in g und e zu minimieren.

Dabei erhält man ein Bild (g, e) das dem verrauschten Bild y ähnlich ist und das geglättet wurde wo keine zu hohen Kantenkontraste auftreten.



glättend und kantenerhaltend

„physikalische“ Veranschaulichung

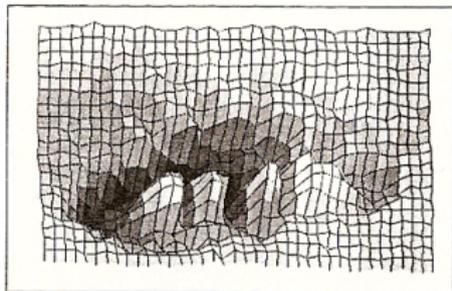


Abbildung: 2D-Intensitätsdiagramm („Graustufengebirge“)

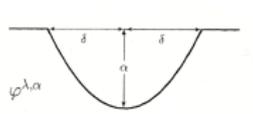
Die a priori Verteilung ist wie eine Membran die auf das Diagramm gelegt wird. Sie kann sich zwischen zwei Pixeln bis zu einer bestimmten potentiellen Energie dehnen, oder sie reißt und es entsteht eine Mikrokante.



glättend und kantenerhaltend

Robustheit

Vergleiche nun $K^{\alpha,\lambda}(g, e) = \sum_{s \sim t} (\lambda^2 (g_s - g_t)^2 (1 - e_{st}) + \alpha e_{st})$ mit
 $H^{\alpha,\lambda}(g) := \sum_{s \sim t} \phi^{\alpha,\lambda}(g_s - g_t)$, $\phi^{\lambda,\alpha}(x) := \min\{\lambda^2 x^2, \alpha\}$



Eine einfache Rechnung zeigt: $\min_{g,e} K^{\alpha,\lambda}(g, e) = \min_g H^{\alpha,\lambda}(g)$, und die minimierenden Argumente g stimmen überein.

ϕ ist beschränkt durch $\alpha \Rightarrow$ einzelne Ausreisser g_t erzeugen einen Energieanstieg von höchstens 4α („Robustheit“).



glättend und kantenerhaltend

Nachteile

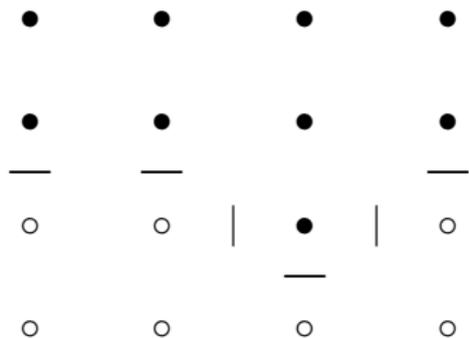


Abbildung: Ausreisser in Position (3,3) wird nicht erkannt. Kante wird unnötigerweise verschnörkelt.



glättend und kantenerhaltend

Nachteile

10	5	9	13
12	15	63	17
—	—	—	—
117	114	109	111
120	121	111	125

Abbildung: z.B. bei Schwellenhöhe 70: Kante wird wegen Ausreißer (nach oben) „63“ unterbrochen.



glättend, kantenerhaltend und kantenorganisierend

lokale Konfiguration der Kanten

In einer quadratischen 4-er Clique können (nach Rotation um 90 Grad) folgende Kantenkonfigurationen vorkommen:

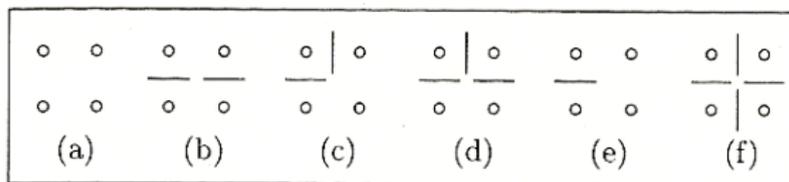


Abbildung: Kantenkonfigurationen in absteigender Erwünschtheit



glättend, kantenerhaltend und kantenorganisierend

lokale Konfiguration der Kanten

Unerwünschte Kantenkonfigurationen wie (f) können mit einer höheren Energie bestraft werden:

- Versehe Konfigurationen (a) bis (f) mit aufsteigenden Gewichten
- $\mathfrak{N} :=$ System aller quadratischen 4-er Cliques
- Bei gegebener Kantenkonfiguration e sei $W(N, e)$ das Gewicht der 4-er Clique $N \in \mathfrak{N}$
- Definiere nun den Energieterm $K_E(e) := \sum_{N \in \mathfrak{N}} W(N, e)$, der die Kantenkonfiguration e bewertet.



glättend, kantenerhaltend und kantenorganisierend

a priori Energie

Benutzt man im Gesamtenergieterm $K^{\alpha,\lambda}(g, e) + D(g, y)$ die a priori Energie

$$K^{\alpha,\lambda}(g, e) = \sum_{s \sim t} (\lambda^2 (g_s - g_t)^2 (1 - e_{st}) + \alpha e_{st}) + \gamma K_E(e)$$

so werden nun bei der Minimierung der Gesamtenergie

- verrauschte Bilder geglättet
- Kanten erhalten
- Kanten räumlich konfiguriert

Mit dieser Methode erzielt man nun sehr gute Ergebnisse bei der Bildentrauschung.



unerwünschte Stufenbildung

- A priori Term $\sum_{s \sim t} \phi(g_s - g_t)$ bevorzugt möglichst konstante Bilder
- Bei fließendem Übergang von weiß nach Schwarz können nach Minimierung der Gesamtenergie unerwünschte Stufen auftreten:

- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | könnte zu |
| 8 | 8 | 8 | 5 | 5 | 5 | 2 | 2 | 2 | werden |



Diskrete Ableitungen

Diskretisierung der 1.Ableitung:

- $D^{1,0} g_{s_1, s_2} \approx g_{s_1+1, s_2} - g_{s_1, s_2}$
- $D^{0,1} g_{s_1, s_2} \approx g_{s_1, s_2+1} - g_{s_1, s_2}$

Diskretisierung der 2.Ableitung:

- $D^{2,0} g_{s_1, s_2} \approx g_{s_1+1, s_2} - 2g_{s_1, s_2} + g_{s_1-1, s_2}$
- $D^{1,1} g_{s_1, s_2} \approx g_{s_1+1, s_2+1} - g_{s_1+1, s_2} - g_{s_1, s_2+1} + g_{s_1, s_2}$
- $D^{0,2} g_{s_1, s_2} \approx g_{s_1, s_2+1} - 2g_{s_1, s_2} + g_{s_1, s_2-1}$



a priori Energieterm für Glättung 2. Ordnung

- In der Diskretisierung der 2.Ableitung kommen Pixelwerte aus den 3er-Cliquen    und  sowie aus der 4er-Clique  vor.
- Fasse alle diese Cliques zusammen unter C_2 .
- Für alle 3er-Cliquen $c \in C_2$ sei weiter $D^2(c)$ diejenige diskrete 2.Ableitung die sich aus c berechnen lässt. Für 4er-Cliquen sei $D^2(c)$ das doppelte dieser Ableitung.



a priori Energieterm für Glättung 2. Ordnung

Dann definiert man den a priori Energieterm der Glättung 2.Ordnung durch

$$\sum_{c \in \mathcal{C}_2} D^2(c)$$

Bringt man diesen Term noch mit einem bestimmten Gewicht in die a priori Verteilung ein so lassen sich bei der Minimierung der Gesamtenergie unerwünschte Stufen vermeiden.



reine Kantenextraktion

Kantenextraktion nach Geman und Geman (1987)

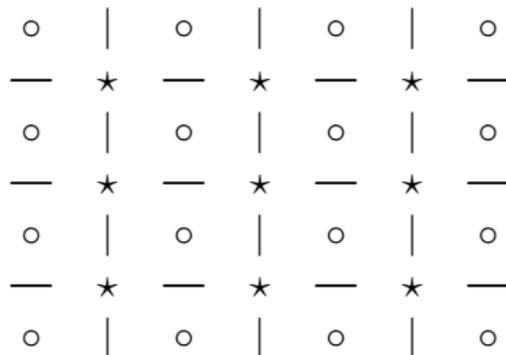


Abbildung: Modell mit Pixeln (\circ), Mikrokannten ($|$ und $—$) und Mikroecken (\star)



Mikroecken

Definitionen:

- $B :=$ Menge aller Mikroecken \star
- Für $u \in B$ sei $b_u := \begin{cases} 1, & u \text{ aktiv} \\ 0, & u \text{ inaktiv} \end{cases}$
- Zustandsraum: $\mathbf{X} = \mathbf{G} \times \{0, 1\}^B$
- $u, v \in B, u \sim v$ heißt: Die Mikroecken u und v sind benachbart

Mikrokanten liegen nun zwischen 2 benachbarten Mikroecken und sind aktiv genau dann wenn die beiden Mikroecken aktiv sind.



a priori Verteilung

Definiere nun die gemeinsame a priori Verteilung der Intensitäten:

$$\Pi(g, b) \propto \exp(-K(g, b)), \quad K(g, b) = K_S(g, b) + K_B(b)$$

$K_S(g, b)$ „sät“ Mikroecken, $K_B(b)$ ordnet sie an.



Säen der Mikroecken

Säen der Mikroecken basiert auf *Pixelkontrast* und *Kantenfluss*:

$$K_S(g, b) = \vartheta_1 \sum_{u \sim v} \phi(\delta_{u,v})(1 - b_u b_v) + \vartheta_2 \sum_{u \in B} (b_u - \zeta_u(g))^2,$$

- Für $u, v \in B$, $u \sim v$ ist $\delta_{u,v}$ der Pixelkontrast der von u und v separierten Pixel
- abgeschnittene Parabelfunktion ϕ
- $\zeta_u(g) = 1$ wenn $u \in B$ in einem String von z.B. mindestens 4 Mikrokanten liegt (Kantenfluss).



Anordnung der Kanten

Zusätzlich zu den bereits erwähnten lokalen Kantenkonfigurationen sollen noch folgende „Doppelkanten“ gemieden werden:

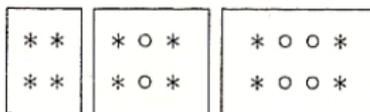


Abbildung: \star bedeutet Mikrokannte an, \circ bedeutet Mikrokannte aus

Der Energieterm $K_B(b)$ bestraft nun die oben genannten lokalen Kantenkonfigurationen in quadratischen 4-er Cliquen und auch diese Konfigurationen mit doppelten Kanten.



diskretes Bild, stetige Intensitäten

Bildmodell mit stetigen Intensitäten

- Endliche Pixelmenge S
- *Offenes Intervall* $I \subset \mathbb{R}$ für Intensitäten
- (Überabzählbarer) Zustandsraum $\mathbf{G} = I^S$
- Gibbssche Darstellung einer a priori Verteilung existiert im vorher definierten Sinne nicht, da man nun keine endlichen Summen mehr hat.



diskretes Bild, stetige Intensitäten

pseudo-a posteriori Verteilung

Obwohl die Gibbssche a priori Verteilung möglicherweise nicht existiert lässt sich eine pseudo-a posteriori Verteilung definieren:

- $D(g, y) = \sum_{s \in S} (g_s - y_s)^2$ üblicher Datenterm
- $K(g) = \sum_{s \sim t} (g_s - g_t)^2$ üblicher Glattheitsterm

$$\Pi(dg|y) \propto \exp(-K(g) - D(g, y)) dg$$

Satz: In diesem Modell sind pseudo-MAP-Schätzer *konvexe Filter*.



stetiges Bild, stetige Intensitäten

stetige Bilder

Das bisherige diskrete Bildmodell ist eigentlich eine Diskretisierung des folgenden stetigen Bildmodells:

- Gebiet $D \subset \mathbb{R}^d$
- Intensitäten $I \subset \mathbb{R}$ (offenes Intervall)
- Intensitätsfunktionen $g, y : D \rightarrow I$
- $K \subset D$ Kurve in D , stellt Kanten dar
- g, y sind hinreichend glatt auf $D \setminus K$



stetiges Bild, stetige Intensitäten

Mumford-Shah Energiefunktional

Die stetige Version der bisherigen a posteriori- Gesamtenergie ist das folgende Funktional:

$$\mathbf{E}(g, K) = \lambda^2 \int_{D \setminus K} \|\nabla g(u)\|_2^2 du + \alpha \cdot L(K) + \int_D |g(u) - y(u)|^2 du$$

- Der erste Term entspricht dem Energieterm für Glattheit,
- der zweite Term bevorzugt kurze, nicht verschnörkelte Kanten,
- der dritte Term bewertet die Ähnlichkeit des Bildes g mit dem verzerrten Bild y



Schlusswort

- Bislang existieren keine effizienten Algorithmen die einen MAP(maximum a posteriori)-Schätzer für komplexe Bilder finden.
- Aber: „Computational Power develops faster than mathematical theories!“



Literaturverzeichnis

- B. Chalmond. *Modelling and Inverse Problems in Image Analysis* Springer, 2003
- G. Winkler. *Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods*. Springer, 2nd ed., 2003
- Der Open Source Bildeditor GIMP



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!