Bayessche Tomographie

Seminar: Bayessche Ansätze in der Bildanalyse

Stefan Sugg

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
Universität Ulm

19.Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
2. Transmissionstomographie
   - Modell
   - Rekonstruktion
3. Emissionstomographie
   - Modell
   - Rekonstruktion
4. 3D-Modell
5. Anhang
   - Literaturangaben

Definition

Tomographie

Unter dem Begriff Tomographie (altgriechisch tome - Schnitt, graphi- die Schrift) werden verschiedene bildgebende Verfahren zusammengefasst, mit denen die räumliche Struktur eines Objektes ermittelt werden kann. Meist indem das Objekt in einer Serie paralleler Querschnittbilder abgerastert wird.

Anwendungsgebiete

- Medizin:
  Röntgen, Ultraschall, Computer- und Kernspintomographie
- Qualitätskontrolle:
  Kontrolle von Verbundstoffen, Fehlerdetektion in Volumen
- Seismologie:
  Reflexionstomographie

Vorgehensweise(1)

Die Tomographie besteht aus 2 grundlegenden Schritten.

1. Modellbildung:

- Welche Informationen sollen extrahiert/ verarbeitet werden?
- Wie sieht die dazu nötige Apparatur aus?
- In welcher Weise werden die Projektionen aus dem Objekt erzeugt?

Vorgehensweise(2)

2. Rekonstruktion:

- Projektionen sind nun gegeben
- aus diesen Projektionen soll nun das Ausgangsobjekt geschätzt werden
- Wie werden die Projektionen genutzt um einen guten Schätzer für das Objekt zu bekommen?

Überblick

1. Einleitung
2. Transmissionstomographie
   - Modell
   - Rekonstruktion
3. Emissionstomographie
   - Modell
   - Rekonstruktion
4. 3D-Modell
5. Anhang
   - Literaturangaben

Modell(1)

- betrachtet wird ein Objekt $\{x(s),\ s = (s_1, s_2)\ \epsilon\ \Pi\}$ in einer Ebene Π
- parallele Strahlen gehen mit der Intensität I_0 von einer (Strahlen-)Quelle aus
- hinter dem Objekt befindet sich eine Detektorleiste, die aus n einzelnen Detektoren besteht
- beim Durchqueren des Objektes verlieren die Strahlen an Intensität
- die Grauwerte des Bildes werden dabei als Verlustdichte der Strahlen interpretiert

Modell(2)

- jeder der n Detektoren misst die Strahlenintensität, die bei ihm ankommt
- es werden L solcher Messungen durchgeführt,wobei die Strahlenquelle und die Detektoren um das Objekt rotieren
- jede Messung wird durch den Winkel $\alpha_l, \quad l = 1 \ldots L$ der Detektoren zur s_1-Achse identifiziert
- Intensitätverlust der Strahlen:
  $I_1(s_1) = I_0 * exp(-\int_{T(s_1)} x(s_1, s_2) \; ds_2)$

Modell(3)

- jede dieser Projektionen läßt sich auf den einfachen Fall, dass die Strahlen parallel zur s_2-Achse und die Detektoren sich auf der s_1- Achse befinden, durch folgende Transformation zurückführen:

  $s_1' = s_1 cos\alpha + s_2 sin\alpha$
  bzw.
  $s_2' = -s_1 sin\alpha + s_2 cos\alpha$

- statt der (End-)Intensitäten betrachtet man die Radon-Transformierte
  $R_x(s_1) = -\log \frac{I(s_1)}{I_0} = \int_{T(s_1)} x(s_1, s_2)\ ds_2$

Modell(4)

folgende Bezeichnungen sind üblich:

- $H^l_{d,s} = surface(\ \bar{s} \cap R^l_d\ )$
- $\tilde{y}^l_d = \sum_{s:\bar{s}\cap R^l_d \neq \emptyset} H^l_{d,s} * x_s$
  $l = 1 \ldots L \quad d = 1 \ldots n$
- in Vektorform:
  $\tilde{y}^l = H_l x \quad l = 1 \ldots L$
  noch kürzer:
  $y = Hx$

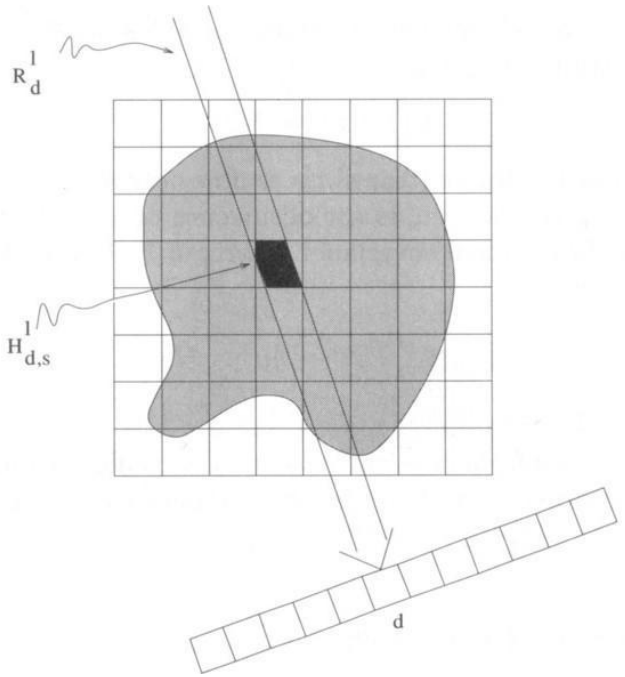


Abbildung: Modell der Transmissionstomographie

Modell(5)

- Jede der Projektionen y_d wird jetzt also Realisierung einer Zufallsvariablen Y_d interpretiert
- mit Rauschen sieht das Modell folgendermaßen aus:
  $Y = Hx + W$,
  wobei w_d unabhängig sind und $E(w_d) = 0$ gefordert wird
- es gilt also $E(Y|x) = Hx$

Modell(6)

- die Kovarianzmatrix von Y wird mit V bezeichnet
- falls ein Gauß´sches Rauschen angenommen wird, dann gilt: $P(y|x) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(y - Hx)^T V^{-1}(y - Hx)\right)$

Überblick

1. Einleitung
2. Transmissionstomographie
   - Modell
   - Rekonstruktion
3. Emissionstomographie
   - Modell
   - Rekonstruktion
4. 3D-Modell
5. Anhang
   - Literaturangaben

Idee

- die Rekonstruktion des Bildes x erfolgt mit dem Bayes´schen Ansatz
- dazu muß eine Energie modelliert werden, die sowohl die Modellbildung der Transmissionstomographie als auch die a-priori Informationen über das Bild x berücksichtigt
- die Lösung des Problems, besteht dann wieder darin, die Energie zum minimieren

Bildmodell(1)

- zusätzlich zum versteckten Feld X^p, betrachtet man noch ein duales Feld X^b
- die Werte von X^p sind aus $E^p = \{1 \dots 255\}$ (Grauwerte)
- die Werte von X^b sind aus $E^b = \{1 \dots m\}$ (Labels)
- durch das Feld X^b soll a-priori Wissen über die Beschaffenheit der Regionen modelliert werden

Bildmodell(2)

- die Bilder sind auf dem gleichen Gitter S definiert
- das Feld $X = (X^p, X^b)$ ist als Markovfeld mit Nachbarschaftssystem $\{N_s,\ s\ \epsilon\ S\}$ modelliert

Bildmodell(3)

- ein bedingtes Feld $(X|Y)$ heißt bed. Markovfeld, falls die Markov´sche Eigenschaft gilt:
  $P(x_s|\check{x}_s, y) = P(x_s|N_s(x), y)$
- $(X|Y = y)$ ist also ein bed. Markovfeld mit der Energie
  $U(x^p, x^b|y) = U_1(x^p, x^b) + U_2(y|x^p)$
- diese Energie $U(x^p, x^b|y)$ soll minimiert werden

Bildmodell(4)

- die Energie $U_2(y|x^p)$ ist aus der Modellbildung der Transmissionstomographie bekannt
- es muß noch eine a-priori Energie $U_1(x^p, x^b)$ bestimmt werden

Konstruktion der a-priori-Energie(1)

- mit der Bayesformel kann die a-priori Energie weiter aufgelöst werden:
  $U_1(x^p, x^b) = U_{1,1}(x^b) + U_{1,2}(x^p, x^b)$

häufig gemachte a-priori Annahmen sind:

1. $P(X_s^b = i | N_s(x)) \propto \exp(-\sum_{t \epsilon N_s} \beta_{i,x_t^b})$
2. $E(X_s^p | N_s(x^p, x^b), x_s^b = i) = \mu_i + \gamma_i \sum_{t \epsilon N_s} (x_t^p - \mu_i) \mathbb{1}[x_s^b = x_t^b]$

   $Var(X_s^p | N_s(x^p, x^b), x_s^b) = \sigma^2$

Konstruktion der a-priori-Energie(2)

- in der Anwendung ist Gruppierung der Materialen oft bekannt
- man versucht dieses Wissen mit Hilfe der Parameter $\beta_{i,i'}$ zu berücksichtigen
- wird die Nachbarschaft der Materialien i und i' als sehr unwahrscheinlich eingeschätzt, dann wählt man für $\beta_{i,i'}$ einen großen Wert
- meist setzt man $\beta_{i,i} = 0$

Konstruktion der a-priori-Energie(3)

- $P(X_s^b = i | N_s(x)) \propto \exp(-\sum_{t \epsilon N_s} \beta_{i,x_t^b})$ wird durch die Gibbs-Verteilung mit der Energie
  $U_{1,1}(x^b) = \sum_{<s,s'>} \sum_{i,i'} \beta_{i,i'} \mathbb{1}[x_s^b = i, x_{s'}^b = i'] \quad = \sum_{i,i'} \nu_{i,i'}(x^b) \beta_{i,i'}$
  mit $\nu_{i,i'}(x^b) = \sum_{<s,s'>} \mathbb{1}[x_s^b = i, x_{s'}^b = i']$ beschrieben
- die Energie $U_{1,1}(x^b)$ kann als Segmentierungsenergie verstanden werden

Konstruktion der a-priori-Energie(4)

- die zweite a-priori Information
  $E(X_s^p | N_s(x^p, x^b), x_s^b = i) = \mu_i + \gamma_i \sum_{t \epsilon N_s} (x_t^p - \mu_i) \mathbb{1}[x_s^b = x_t^b]$
  $Var(X_s^p | N_s(x^p, x^b), x_s^b) = \sigma^2$
- μ_i ist der Erwartungswert des i-ten Label und
  γ_i die isotrope Autokorrelation
- der Erwartungswert zieht die Nachbarn hinter einer Kante nicht mit in Betracht

Konstruktion der a-priori-Energie(5)

- die Gibbs- Verteilung $P(x^p|x^b)$ besitzt folgende Energie:
  $U_{1,2}(x^p, x^b) =$
  $\sum_s \frac{1}{2\sigma^2}(x_s^p - \mu_{x_s^b})^2 - \sum_{<s,t>} \frac{\gamma_{x_s^b}}{\sigma^2}(x_s^p - \mu_{x_s^b})(x_t^p - \mu_{x_t^b})\mathbb{1}[x_s^b = x_t^b]$
- dieser Ausdruck ist die direkte Folgerung aus der Gauß´schen Energie;
  μ_i und σ^2 quantifizieren die Regularität der i-ten homogenen Region

Zusammenfassung

- die Gesamtenergie des Feldes $(X|Y)$ ist nun bekannt:
$$\begin{aligned} U(x^p, x^b|y) &= U_{1,1}(x^b) + U_{1,2}(x^p, x^b) + U_2(y|x^p) \\ &= \sum_{i,i'} \nu_{i,i'}(x^b)\beta_{i,i'} \\ &+ \sum_s \frac{1}{2\sigma^2}(x_s^p - \mu_{x_s^b})^2 - \sum_{<s,t>} \frac{\gamma_{x_s^b}}{\sigma^2}(x_s^p - \mu_{x_s^b})(x_t^p - \mu_{x_t^b})\mathbb{1}[x_s^b = x_t^b] \\ &+ (y - Hx)^T V^{-1}(y - Hx) \end{aligned}$$
- diese Energie kann nun mit einem geeigneten Algorithmus minimiert werden

Überblick

1 Einleitung

2 Transmissionstomographie

3 Emissionstomographie
- Modell
- Rekonstruktion

4 3D-Modell

5 Anhang

Modell(1)

- die Strahlenquellen befinden sich im Gegensatz zur Transmissionstomographie im Inneren des Objektes
- die Detektoren messen also die vom Objekt verursachte Strahlung
- der Grauwert x_s kann beispielsweise die Konzentration eines radioaktiven Isotops darstellen
- y_d steht jetzt für die Anzahl der Teilchen, die an der d-ten Detektorposition gemessen werden

Modell(2)

- y_d wird als Realisierung einer Poissonverteilten Zufallsvariable Y_d verstanden
- es gilt wieder: $E(Y_d|x) = \sum_s H_{d,s}x_s$ bzw. $E(Y|x) = Hx$
- die bedingte Verteilung ist gegeben durch:

$$P(y|x) = \prod_{d=1}^{nL} \frac{(\sum_s H_{d,s}x_s)^{y_d}}{(y_d)!} \exp(-\sum_s H_{d,s}x_s)$$

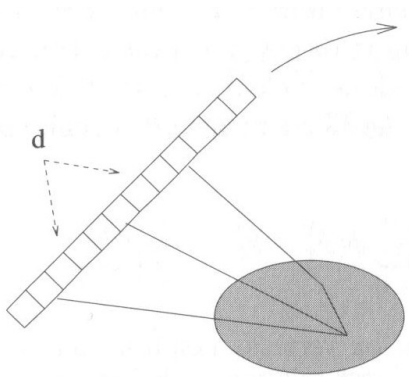


Abbildung: Modell der Emissionstomographie

Überblick

1. Einleitung
2. Transmissionstomographie
   - Modell
   - Rekonstruktion
3. Emissionstomographie
   - Modell
   - Rekonstruktion
4. 3D-Modell
5. Anhang
   - Literaturangaben

Rekonstruktion(1)

- die externe Energie $U(y|x)$ ist nun wieder durch $P(y|x)$ bekannt
- wenn wir annehmen, dass die Isotopenkonzentration annähernd konstant innerhalb einer Region ist und dass der Übergang zwischen zwei Regionen scharf ist, kann man folgende Energie verwenden:
  $U_1(x) = \theta \sum_{[s,t]} \phi(x_s - x_t) + \frac{\theta}{\sqrt{2}} \sum_{<s,t>} \phi(x_s - x_t)$
- wobei [s,t] horizontale bzw. vertikale und $< s, t >$ diagonale Nachbarn bezeichnet

Rekonstruktion(2)

- die Potentialfunktion hat folgende Gestalt:
  $\phi(u) = \frac{-1}{1+(u/\beta)^2}$
- die niederen Energiekonfigurationen dieser Energiefunktion entstehen bei glatten Regionen und klaren Grenzen zwischen den Regionen

Überblick

1. Einleitung
2. Transmissionstomographie
   - Modell
   - Rekonstruktion
3. Emissionstomographie
   - Modell
   - Rekonstruktion
4. 3D-Modell
5. Anhang
   - Literaturangaben

3D-Modell(1)

- Ziel: 3D-Bild der internen Struktur eines Objektes rekonstruieren, um auf diese Weise Defekte und Einschließungen zu entdecken
- dazu liegen radiographische 2D- Bilder vor
- S ist ein diskretes 3D-Gitter
- $\{x_s, s \epsilon S\}$ die Ausprägung des Objektes

3D-Modell(2)

- die L Messungen erzeugen die Projektionen $D_l \quad l = 1 \ldots L$
- wir nehmen an, dass die Einschließung durch eine homogene Region auf einem anderen Grauwertlevel als das Objekt erkennbar ist
- sowohl die Anzahl und die Form der Defekte sollen bei der Rekonstruktion zum Vorschein kommen
- das Transmissionsmodell wird modifiziert indem wir nun kegelförmige Strahlen annehmen

3D-Modell(3)

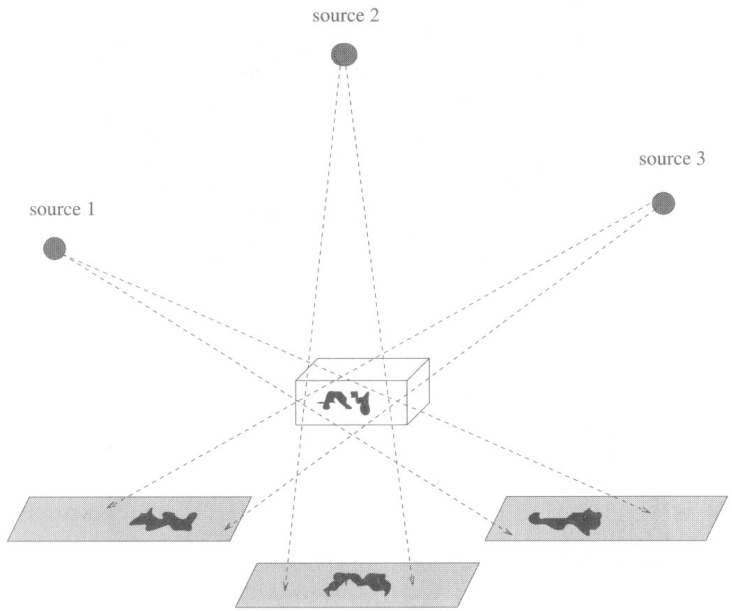


Abbildung: 3D-Transmissionstomographie

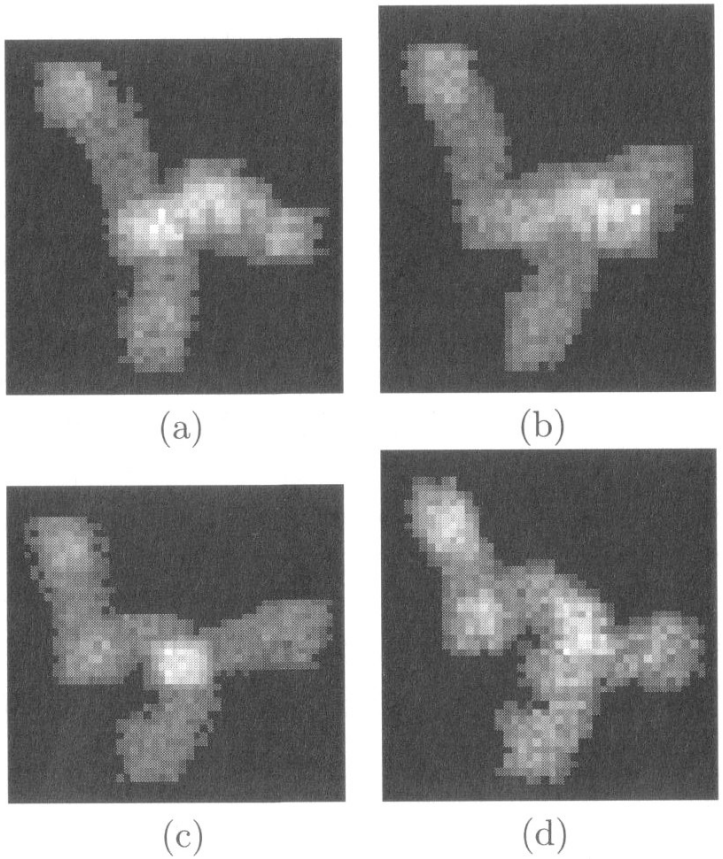
3D-Modell(4)

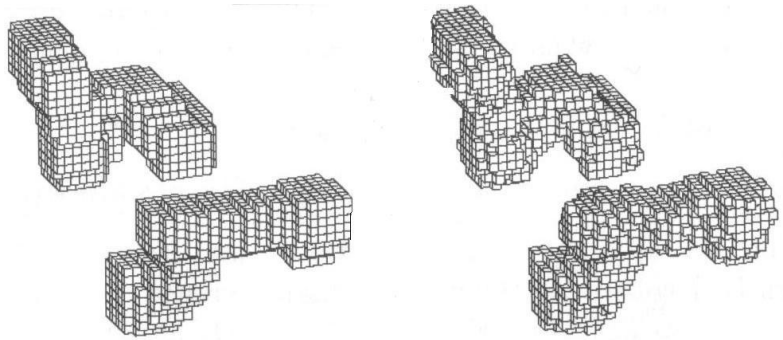
- $H^l_{d,s} = volume(\bar{s} \cap R^l_d)$ beschreibt den Anteil, den $\bar{s}$ an der Projektion y^l_d hat
- y^l_d ist die Realisierung der Zufallsvariablen $Y^l_d = \sum_{s:\bar{s}\cap R^l_d \neq \emptyset} H^l_{d,s} x_s + W^l_d, \quad l = 1 \dots L$
- eine naheliegende Energie, würde die Terme $\sum_l \|y^l - H^l x\|^2$ und $\|x - \bar{x}\|^2$ enthalten, wobei $\bar{x_s}$ für den mittleren Grauwert der 26 Nachbarpixel steht

3D-Modell(5)

- die beiden Terme besitzen jedoch nicht die gleiche Größenordnung, wodurch sie schwierig zu vergleichen sind
- deshalb werden folgende Terme benutzt: $U_1(x) = \frac{<x,\bar{x}>^2}{\|x\|^2\|\bar{x}\|^2}$ und $U_{2,l}(y^l|x) = \frac{<y^l,H^lx>^2}{\|y^l\|^2\|H^lx\|^2} \quad l = 1 \dots L$
- mit Regularisierungsparameter α gilt dann: $U(x|y) = \alpha U_1(x) + \frac{1}{L}\sum_l U_{2,l}(y^l|x)$

3D- Modell(6)





Literaturangaben

- B. Chalmond. *Modelling and Inverse Problems in Image Analysis.* Springer,2003
- J. Bayer, F. Puente Leon. *Die Radontransformation in der digitalen Bildbearbeitung.* at 10/2002
- `http://de.wikipedia.org`

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!