2. Berechnung von Erosionen und Dilatationen

2.1 Grobe(naive) Algorithmus

- betrachte für jeden Bildpunkt alle Nachbarn, die durch SE definiert sind,

- berechne den Min-Wert(für die Erosion) bzw. den Max-Wert(für die Dilatation).

$\Longrightarrow$ (k-1) Min/Max-Vergleiche pro Bildpunkt für ein SE mit k Pixeln.

2.2 Techniken zur Reduzierung der Anzahl der Operationen

a) Rekursive Algorithmus von van Herk(1992) für den Fall linienförmiger SE

- f 1-dim-Eingangsarray der Länge n, $f : D_f \longrightarrow \{0, 1\}$
- SE der Länge k
- g, h temporäre Puffer der Länge n
- r Ergebnisarray der Länge n

– teile f in m Blöcke der Länge k ein
(Ann.: n durch k teilbar mit $m = n/k$)
– indiziere die Elemente von f mit 0 bis $n - 1$

– Dilatationsalgorithmus(für Erosion analog)

1. $$g(x) = \begin{cases} f(x) & : \quad x = dk \\ \max\{g(x-1), f(x)\} & : \quad sonst \end{cases},$$
   wobei $d \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

2. $$h(x) = \begin{cases} f(x) & : \quad x = dk - 1 \\ \max\{h(x+1), f(x)\} & : \quad sonst \end{cases},$$
   wobei $d \in \{m, \ldots, 1\}$

3. $r(x) = \max\{g(x+k-1-o), h(x+o)\}$,

   $\forall x \in \{0, \ldots, n\}$, o Position des Bezugspunktes des SE.

$\Longrightarrow$ 3 Min/Max-Vergleiche pro Bildpunkt, unabh. von der Länge des SE.

b) Erweiterung des Algorithmus auf Linien mit willkürlichen Winkeln von Breen & Soille(1993)

- wende die rekursive Prozedur direkt auf die Bildpunkte, die an der Linie mit gegebenem Winkel fallen,

- dann verschiebe die Linie und wiederhole die ganze Prozedur, bis das komplete Bild abgedeckt ist.

Bemerkung:

- Die Richtung der Verschiebung hängt von der Steigung der Linie ab, jeder Bildpunkt wird genau einmal abgearbeitet.
- Effiziente Aktualisierung der Anzahl der Bildpunkte nach jeder Verschiebung ist durch die Anwendung der Lauflängencodierung möglich.
- Der Algorithmus ist für Linienerosionen/-dilatationen in 3-dim-Bildern geeignet, benötigt jedoch eine sorgfältige Analyse der Randeffekte.

c) Periodische Linien

- periodische SE
- entsprechende 8-benachbarte diskrete Bresenham Linie, diese besitzt gleiche Orientierung wie das SE

– verarbeite die Bildpunkte, die entlang der Linie innerhalb der Bildebene fallen

– verschiebe die Linie, wiederhole die Prozedur, bis die ganze Bildebene abgearbeitet ist.

d) Zerlegung von SE

- Z.B. ist das Dilatieren bzw. Erodieren eines Bildes mit einem Sechseck der Seitenlänge n äquivalent zum sukzessiven Dilatieren bzw. Erodieren mit 3 Liniensegmenten der Länge n.
  $\Longrightarrow$ Reduzierung der Anzahl der Vergleiche pro Bildpunkt von $3(n^2 - n)$ auf $3(n-1)$ bzw. auf 9, wenn die rekursive Prozedur aus 2.2 a) angewandt wird.
- Logarithmische Zerlegung von konvexen Mengen, basierend auf der Definition von äußeren Mengen, s. van Boomgaard & van Balen(1992).
- Radiale(sternförmige) Zerlegung von kreisförmigen SE.
  $D_r \approx L_{\alpha_1 k_{\alpha_1}} \oplus, \ldots, \oplus L_{\alpha_N k_{\alpha_N}}$, wobei D_r eine Scheibe mit Radius r ist und $L_{\alpha_1 k_{\alpha_1}}, \ldots, L_{\alpha_N k_{\alpha_N}}$ eine Folge von $N \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$ linienförmiger SE mit $\alpha_i = \frac{i\pi}{N}$ Winkel und k_{α_i} Länge der jeweiligen Linie.

e) Distanzfunktion

Definition 4

i) Die *diskrete Distanz* d_G zwischen zwei Bildpunkten p und q in dem Graphen oder Gitter G ist die kleinste Länge der Wege(Pfade) P, die $p = (x_1, y_1)$ mit $q = (x_2, y_2)$ verbinden:

$$d_G(p, q) := \min\{L(P)\}. \tag{3}$$

ii) Im Falle eines 4-Nachbarschaftsgraphes wird die Metrik *Cityblock(Taxifahrer)-Metrik* genannt und es gilt:

$$d_4[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] := |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|. \tag{4}$$

iii) Im Falle eines 8-Nachbarschaftsgraphes wird die Metrik *Schachbrett-Metrik* genannt und es gilt:

$$d_8[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] := \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}. \tag{5}$$

iv) Für die *Euklidische-Metrik* im $\mathbb{R}^2$ gilt:

$$d_\varepsilon[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{6}$$

Bemerkung

- Kürzeste Wege sind bei diskreten Distanzen i.d.R. nicht eindeutig.
- Diskrete Distanzen sind ganzzahlig.
- Die auf ihren nächsten ganzzahligen Wert gerundete euklidische Funktion $d_{\varepsilon'}$ ist eine Halbmetrik.

Definition 5

Die *Distanzfunktion(Distanztransformation)* $\mathcal{D}$, angewendet auf ein Binärbild f, verbindet jeden Bildpunkt p des Definitionsbereichs D_f von f mit dem Abstand(Distanz) zum nächsten nullwertigen Bildpunkt:

$$[\mathcal{D}(f)](p) := \min\{d(p,q) \mid f(q) = 0\}. \tag{7}$$

Berechnung

i) Diskrete Distanzfunktion, sequentielle Algorithmus von Rosenfeld & Pfaltz(1966)

1. Vorwärtsabtasten aller Bildpunkte $p \in D_f$
2. wenn $f(p) = 1$

   $[\mathcal{D}(f)](p) \longleftarrow 1 + \min\{[\mathcal{D}[f]](q) |\, q \in N_G^-(p)\}$,

   mit $N_G^-(p)$ Rückwärtsnachbarn von p
3. Rückwärtsabtasten aller Bildpunkte $p \in D_f$
4. wenn $[\mathcal{D}(f)](p) \neq 0$

   $$[\mathcal{D}(f)](p) \longleftarrow \min[[\mathcal{D}(f)](p), \\ 1 + \min\{[\mathcal{D}(f)](q) |\, q \in N_G^+(p)\}],$$

   mit $N_G^+(p)$ Vorwärtsnachbarn von p

Bemerkung

- Kann zur Erzeugung von 4- sowie 8-Nachbarschaftsdistanzfunktionen genutzt werden ($\mathcal{D}_4$ bzw. $\mathcal{D}_8$).

- $\Longrightarrow$ 3 bzw. 7 Min-Vergleiche pro Bildpunkt. Aber 6- bzw. 10-malige Punktbetrachtung.

ii) Euklidische Distanzfunktion, sequentielle Algorithmus von Danielsson(1980)

Grundidee:

Gegeben sei ein 2-dim-Array $M \times N$.
Die euklidische Distanzfunktion von jedem Bildpunkt wird durch einen 2-elementigen Vektor $\bar{L}$ dargestellt.
$\bar{L}(x,y) = (L_x(x,y), L_y(x,y)),\ L_x, L_y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
$|L(x,y)| := \sqrt{L_x^2 + L_y^2}$ und

$$\min\{\bar{L}, \bar{L'}\} := \begin{cases} \bar{L} & : \quad L_x^2 + L_y^2 \leq {L'}_x^2 + {L'}_y^2 \\ \bar{L'} & : \quad sonst. \end{cases}$$

Der erste Wert repräsentiert die Anzahl der horizontalen Schritte zwischen dem Bildpunkt und dem nächsten Bildpunkt der „Null-Phase“ (=: S^c mit S :=„Einser-Phase“), der zweite ist die Anzahl der vertikalen Schritte.

8SED-Algorithmus

1. $$\bar{L}(x,y) = \begin{cases} (0,0) & : \quad (x,y) \in S^c \\ (\infty,\infty) & : \quad sonst. \end{cases}$$

2. Vorwärtsabtasten:

Für $y = 1, \ldots, N-1$,

für $x = 0, 1, \ldots, M-1$,

$$\bar{L}(x,y) = \min \begin{cases} \bar{L}(x,y) \\ \bar{L}(x-1,y-1) + (1,1), x > 0 \\ \bar{L}(x,y-1) + (0,1) \\ \bar{L}(x+1,y-1) + (1,1), x < m-1; \end{cases}$$

für $x = 1, 2, \ldots, M-1$,

$$\bar{L}(x,y) = \min \begin{cases} \bar{L}(x,y) \\ \bar{L}(x-1,y) + (1,0); \end{cases}$$

für $x = M-2, M-3, \ldots, 1, 0$,

$$\bar{L}(x,y) = \min \begin{cases} \bar{L}(x,y) \\ \bar{L}(x+1,y) + (1,0). \end{cases}$$

3. Rückwärtsabtasten:

Für $y = N-2, N-3, \ldots, 1, 0,$

für $x = 0, 1, \ldots, M-1,$

$$\bar{L}(i,j) = \min \begin{cases} \bar{L}(x,y) \\ \bar{L}(x-1,y+1) + (1,1), x > 0 \\ \bar{L}(x,y+1) + (0,1) \\ \bar{L}(x+1,y+1) + (1,1), x < m-1; \end{cases}$$

für $x = 1, 2, \ldots, M-1,$

$$\bar{L}(x,y) = \min \begin{cases} \bar{L}(x,y) \\ \bar{L}(x-1,y) + (1,0); \end{cases}$$

für $x = M-2, M-3, \ldots, 1, 0,$

$$\bar{L}(x,y) = \min \begin{cases} \bar{L}(x,y) \\ \bar{L}(x+1,y) + (1,0). \end{cases}$$

Bemerkung

$\Longrightarrow$ 10 Min-Vergleiche pro Bildpunkt.

Erosion bzw. Minkowski-Subtraktion und Distanzfunktion

Gegeben seien eine Menge $X = \{x|f(x) = 1\}$ und ein SE $b(0,r)$, dann gilt
$\varepsilon_{b(0,r)}(X) = \{x|[\mathcal{D}_\varepsilon(f)](x) > r\}$.

Analog für Erosionen mit Rauten bzw.
Quadraten der Größe n:
$\varepsilon_{\Diamond}(X) = \{x \in X \,|\, \mathcal{D}_4 > n\}$,
$\varepsilon_{\Box}(X) = \{x \in X \,|\, \mathcal{D}_8 > n\}$.

Dilatation bzw. Minkowski-Addition und Fourier-Transformierte

Gegeben seien eine Menge X, ein SE B der Größe O(n), sowie Funktionen f, g und h mit
$f(x) = \mathbf{1}_X(x)$, $g(x) = \mathbf{1}_B(x)$, $h(x) = \mathbf{1}_{X \oplus B}(x)$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
& h(x) = \mathbf{1}_{X \oplus B} = 1 \\
\Longleftrightarrow\; & x \in \{y + b \,|\, \mathbf{1}_X(y) = 1,\ \mathbf{1}_B(b) = 1\} \\
\Longleftrightarrow\; & \exists\, b \in B :\ \mathbf{1}_X(x - b) = 1 \\
\Longleftrightarrow\; & \textstyle\sum_{b \in B} \mathbf{1}_X(x - b) > 0 \\
\Longleftrightarrow\; & \textstyle\sum_{b \in \mathbf{R}^d} \mathbf{1}_B(b) \mathbf{1}_X(x - b) > 0 \\
\Longleftrightarrow\; & \mathbf{1}_B * \mathbf{1}_X(x') \,|_{x'=x} > 0
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe des FFT-Algorithmus können wir die Größenordnung der Operationen von $\mathrm{O}(n^2)$ auf $\mathrm{O}(n \log n)$ reduzieren.

Bemerkung

- Morphologische Öffnungen und Schließungen erhalten wir definitionsgemäß aus den Primitiven Erosion und Dilatation. $\Longrightarrow$ Algorithmen zur Berechnung von diesen s.o.
- Analog zur Distanzfunktion bei Erosionen gibt es bei den Öffnungen die Öffnungsfunktion, die zu schnelleren Berechnungen von Granulometrien beiträgt.

Literatur

(1) P.Soille (1999) Morphological Image Analysis: Principles and Applications.
Springer, Berlin.

(2) P.-E.Danielson (1980) Euclidean Distance Mapping.
Computer Graphics and Image-Processing.

(3) Laÿ (1987) (zur Berechnung von Granulometrien und Öffnungsfunktionen).