Seminar
Stochastische Geometrie
und räumliche Statistik

4. Algorithmen zur Vermessung von zweidimensionalen Bildern

Hubert Mantz

Ulm, 03.12.2001

Flächenmethode

Untersuchung von Ξ im ebenen Fenster W.

Größen:

- A_A Flächenanteil / Flächendichte
- L_A spezifische Randlänge
- C_A spezifisches Krümmungsintegral
- χ_A spezifische Eulerzahl

mit Schätzern

- $\widehat{A_A} = \dfrac{A(\Xi \cap W)}{A(W)}$
- $\widehat{L_A} = \dfrac{L(\Xi \cap W)}{A(W)}$
- $\widehat{C_A} = \dfrac{C(\Xi \cap W)}{A(W)}$
- $\widehat{\chi_A} = \dfrac{\chi(\Xi \cap W)}{A(W)}$

Absolute Häufigkeiten

Ziel:
Größe, welche die ganze Information des Bildes enthält und aus der sich Eigenschaften leicht ermitteln lassen.

Diskretisierung
Rechteckgitter von Punkten

$$x_{ij}, \quad i = 0, \ldots, m,\ j = 0, \ldots, n$$

rechteckiges Sampling-Fenster

$$W_s = [0, n\Delta_x] \times [0, m\Delta_y]$$

Diskretisierung von Ξ auf W_s ergibt ein Binärbild

$$B = (b_{ij}) \text{ mit } b_{ij} = \mathcal{I}_\Xi(x_{ij}), \quad i = 0, \ldots, m,\ j = 0, \ldots, n$$

$\mathcal{I}$: Indikatorfunktion.

Filtermaske
Filtermaske $F_\nu = (f_{kl})$ der Größe $\nu = 0, 1, \ldots$ mit Koeffizienten als Zweierpotenzen

$$f_{kl} = 2^{l+(\nu+1)k}, \quad k, l = 0, \ldots, \nu$$

$$F_0 = (1) \quad F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 64 \\ 2 & 16 & 128 \\ 4 & 32 & 256 \end{pmatrix}$$

Betrachte jetzt Fall $\nu = 1$, d.h. $F := F_1$.

Lineare Filterung

Lineare Filterung (in der Bildverarbeitung):
Faltung eines Binärbildes B mit Filtermaske F

$$G = B * F$$

Man erhält ein Graustufenbild $G = (g_{ij})$ mit

$$g_{i,j} = b_{i,j} + 2\,b_{i,j+1} + 4\,b_{i+1,j} + 8\,b_{i+1,j+1}$$

mit 16 Farbtönen, also 4 Bit pro Pixel.

ohne Randeffekte nur bei

$$W = [0,(n-1)\Delta_x] \times [0,(m-1)\Delta_y]$$

Für Filtergröße ν ist die Faltung durch

$$g_{i,j} = \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} b_{i+k,j+l} f_{kl}$$

definiert, man erhält

$$2^{(\nu+1)(\nu+1)}$$

Farbtöne.

Vektor der absoluten Häufigkeiten

Bestimmung des Vektors h der absoluten Häufigkeiten h_k der Nachbarschaftskonfigurationen in B.

- *Faltungsformel:*
  g_{ij} **eineindeutige** Codierung der 2×2-Nachbarschaftskonfiguration von b_{ij}
- Anzahl der Nachbarschaftskonfigurationen von B durch einfaches Abzählen der Häufigkeit bestimmter Grautöne in G erhalten.
- Aus diesen Häufigkeiten $h_k,\ k = 0, \ldots, 15$ bildet man den Vektor h

$h = (h_k)$ dient als Grundlage zur Ermittlung weiterer Größen.

Beispiel: Der Nachbarschaftskonfiguration

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wird der Wert $k = 13$ zugeordnet. Also ist h_{13} die Anzahl dieser Konfigurationen im Binarbild B,

$$h_{13} = \# \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt (mit Kronecker-Delta $\delta_k(g)$):

$$h_k = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_k(g_{ij}), \quad k = 0, \ldots, 15$$

Damit gilt natürlich:

- Anzahl der Pixel im reduzierten Fenster W_r

$$n_0 = \sum_{k=0}^{15} h_k = m \cdot n$$

- Inhalt des Fensters W:

$$A(W) = \Delta_x \Delta_y n_0 = \Delta_x \Delta_y \sum_{k=0}^{15} h_k$$

Fläche und Flächenanteil

Idee:
Schätzung der Fläche von Ξ, die im Fenster W liegt, durch die Anzahl der Nachbarschaftskonfigurationen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Deren Wert g_{ij} ist ungerade.
Es gilt also

$$\begin{aligned} \hat{A}(\Xi \cap W) = \Delta_x \Delta_y \# \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} &= \Delta_x \Delta_y \sum_{k=0}^{7} h_{2k+1} \\ &= \Delta_x \Delta_y \sum_{k=0}^{15} h_k \delta_k (k \vee 1) \end{aligned}$$

Man sagt, daß das Flächenmessen *digitalisierbar* ist, weil

$$\hat{A}(\Xi \cap W) \to A(\Xi \cap W) \text{ für } \Delta_x, \Delta_y \to 0$$

gilt.
Damit ist

$$\hat{A}_A = \frac{A(\Xi \cap W)}{A(W)} = \frac{1}{n_0} \sum_{k=0}^{15} h_k \delta_k (k \vee 1)$$

ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für A_A.

Länge der totalen Projektion

Bekanntlich gilt für die Länge der totalen Projektion

$$\wp^{\vartheta}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} \chi(X \cap e_{r,\vartheta})\, dr$$

Idee:
Die spezifische Länge der totalen Projektion

$$\wp_A(\vartheta) = \frac{\wp^{\vartheta}(\Xi \cap W)}{A(W)}$$

läßt sich durch die Wahrscheinlichkeit schätzen, daß

- $x \in \Xi$, $x \in W$ **und**
- $y = x + (r, \vartheta) \in \Xi^C$

Für eine feste Richtung ϑ ist die Wahrscheinlichkeit also eine Funktion vom Abstand r, die gegen $\wp_A(\vartheta)$ konvergiert für $r \downarrow 0$.
Mit

- ϑ_l: Richtung eines Gitterpunktpaares von F und
- r_l: zugehöriger Abstand

kann die spezifische Länge der totalen Projektion auf Ξ mit h durch

$$\hat{\wp}_A(\vartheta_l) = \frac{\hat{\wp}^{\vartheta_l}(\Xi \cap W)}{A(W)}$$

geschätzt werden.

Beispiel:
Für

- $\Delta_x = \Delta_y$ (quadratisches Gitter)
- $l = 1$ (also $r_1 = \sqrt{2}, \vartheta_1 = \pi/4$)

erhält man also

$$\begin{aligned}
\hat{\wp}_A(\vartheta_1) &= \frac{1}{n_0\sqrt{2}} \# \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n_0\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{15} h_k \, \delta_k(k \vee 1)\delta_k(k \wedge \neg 8) \\
&= \frac{1}{n_0\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{15} h_k \, \delta_k(k \vee 1)\delta_0(k \wedge 8)
\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall erhält man

$$\hat{\wp}_A(\vartheta_l) = \frac{1}{n_0 r_l} \sum_{k=0}^{15} h_k \delta_k(k \vee \alpha)\delta_0(k \wedge \beta), \quad l = 0, \ldots, 7$$

mit den folgenden Parametern: ($\zeta = \Delta_x/\Delta_y$):

l	ϑ_l	r_l	α	β
0	0	Δ_y	1	4
1	$\operatorname{arccot} \zeta$	$\Delta_y\sqrt{1+\zeta^2}$	1	8
2	$\pi/2$	Δ_y	4	8
3	$\pi - \operatorname{arccot} \zeta$	$\Delta_y\sqrt{1+\zeta^2}$	4	2
4	π	Δ_y	8	2
5	$\pi + \operatorname{arccot} \zeta$	$\Delta_y\sqrt{1+\zeta^2}$	8	1
6	$3\pi/2$	Δ_y	2	1
7	$2\pi - \operatorname{arccot} \zeta$	$\Delta_y\sqrt{1+\zeta^2}$	2	4

Spezifische Randlänge

Zusammenhang der spezifische Randlänge mit der Länge der totalen Projektion über die *Cauchy-Formel*:

$$L_A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \wp_A(\vartheta)\, d\vartheta$$

Schätzer durch Diskretisierung:

$$\hat{L_A} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{7} c_l \hat{\wp}_A(\vartheta_l)$$

mit geeigneten Gewichten $c_l > 0$ und $\sum c_l = 1$.
Man kann c_l wie folgt wählen:

$$c_l = \frac{\vartheta_{l+1} - \vartheta_{l-1}}{2}, \quad l = 1, \ldots, 6$$

(für Berücksichtigung von Randeffekten:

$$c_0 = \frac{2\pi - \vartheta_7 + \vartheta_1}{2}, \quad c_7 = \frac{2\pi - \vartheta_6 + \vartheta_0}{2}$$

- Schätzer ist nicht erwartungstreu, die Randlänge läßt sich nicht *digitalisieren*.

Euler-Zahl

Diskrete Version der Eulerzahl χ von Ξ innerhalb von W durch die *Euler-Beziehung*:

$$\chi = v - e + f$$

mit

- v : Anzahl der Ecken
- e : Anzahl der Kanten (reguläre Bögen)
- f : Anzahl der elementaren Flächen (Quadrate, Dreiecke)

Abhängig vom verwendeten Gitter kann man χ jetzt auch aus h bestimmen.

1. **4-fach zusammenhängendes Gitter**
   $v = \# \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
   $e = \# \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \# \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$
   $f = \# \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. **6-fach zusammenhängendes Gitter**
Vorteile:

- Euler-Zahl unabhängig von Versetzungen des Graphen
- $\chi(\Xi) = -\chi(\Xi^C)$

Die Einheitszelle ist hier ein Dreieck (3 Ecken, 3 Kanten, 1 Fläche).
Man erhält:

$$
\begin{aligned}
v &= \# \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\
e &= \# \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \# \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} + \# \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \\
f &= \# \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \# \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
v &= h_1 + h_3 + h_5 + h_7 + h_9 + h_{11} + h_{13} + h_{15} \\
e &= (h_5 + h_7 + h_{13} + h_{15}) \\
&+ (h_3 + h_7 + h_{11} + h_{15}) \\
&+ (h_9 + h_{11} + h_{13} + h_{15}) \\
f &= (h_{11} + h_{15}) + (h_{13} + h_{15})
\end{aligned}
$$

Mit der Euler-Beziehung:

- $\widehat{\chi}^0(\Xi \cap W) = h_1 - h_7$

was (mit der integralgeometrischen Methode) dem Winkel $\vartheta_0 = 0$ zugeordnet wird.

Für die Richungen $\vartheta_2 = \pi/2,\ \vartheta_4 = \pi,\ \vartheta_6 = 3\pi/2$ erhält man

- $\widehat{\chi^2}(\Xi \cap W) = h_2 - h_{11}$
- $\widehat{\chi^4}(\Xi \cap W) = h_8 - h_{14}$
- $\widehat{\chi^6}(\Xi \cap W) = h_4 - h_{13}$

Mit

$$C_A = 2\pi\chi_A$$

erhält man den erwartungstreuen Schätzer

$$\widehat{C_A} = \frac{\pi}{2}\sum_{l=0}^{3}\widehat{\chi^{2l}}(\Xi \cap W)$$

3. **8-fach zusammenhängendes Gitter**

   Einfügen eines *Hilfspunktes* in der Mitte.

   Beispiel:

$$v = \#\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \#\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} + \#\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} - \#\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Digitale Auflösung, fraktale Dimension

Ziel: verbesserte Schätzer für L_A und $\wp_A(\vartheta)$ mit hoher lateraler und richtungsabhängiger Auflösung.

Schätzer für $\wp_A(\vartheta)$ am Punkt (r, ϑ): $\widehat{\wp_A}(r, \vartheta)$
(r, Δ): $\widehat{\wp_A}(\Delta, \vartheta)$

1. **Einfluß der lateralen Auflösung gering**

   $\widehat{\wp_A}(r, \vartheta) \approx \widehat{\wp_A}(\Delta, \vartheta)$, also

   $$\begin{aligned} \log\left(r\widehat{\wp_A}\left(r, \vartheta\right)\right) &\approx \log\left(r\widehat{\wp_A}\left(\Delta, \vartheta\right)\right) \\ &= \log\left(\Delta\widehat{\wp_A}\left(\Delta, \vartheta\right)\right) + \log\frac{r}{\Delta} \end{aligned}$$

2. **Einfluß der lateralen Auflösung nicht zu vernachlässigen**
   Ansatz:

   $$\log\left(r\widehat{\wp_A}\left(r, \vartheta\right)\right) \approx \log\left(\Delta\widehat{p_A}\left(\Delta, \vartheta\right)\right) + (1+d)\log\frac{r}{\Delta}$$

   dabei:

   - $d \geq 0$, unabhängig von ϑ
   - $\widehat{p_A}\left(\Delta, \vartheta\right)$ unabhängig von lateraler Auflösung $1/r$

   Betrachte 2 Gleichungen:

   $$\log\left(\widehat{\wp_A}\left(r, \vartheta\right)\right) \approx \log\left(\widehat{p_A}\left(\Delta, \vartheta\right)\right) + d\log\frac{r}{\Delta} \tag{1}$$

   $$\log\left(\widehat{\wp_A}\left(2r, \vartheta\right)\right) \approx \log\left(\widehat{p_A}\left(\Delta, \vartheta\right)\right) + d\log\frac{2r}{\Delta} \tag{2}$$

(2) - (1) ergibt

$$\log\left(\widehat{\wp_A}(2r,\vartheta)\right) - \log\left(\widehat{\wp_A}(r,\vartheta)\right) = d\left(\log\frac{2r}{\Delta}\frac{\Delta}{r}\right)$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{\log 2}\left(\log\widehat{\wp_A}(2r,\vartheta) - \log\widehat{\wp_A}(r,\vartheta)\right)$$

allgemein:

$$d = \frac{1}{8\log 2}\sum_{i=0}^{7}\log\widehat{\wp_A}(2r_i,\vartheta_i) - \log\widehat{\wp_A}(r_i,\vartheta_i)$$

aus Gleichung (1):

$$\begin{aligned}\log\left(\widehat{\wp_A}(r,\vartheta)\right) &= \log\left(\widehat{p_A}(\Delta,\vartheta)\right) + d\log\frac{r}{\Delta}\\ \Rightarrow \widehat{\wp_A}(r,\vartheta) &= \widehat{\wp_A}(\Delta,\vartheta)\cdot\exp\left(-d\log\frac{r}{\Delta}\right)\\ &= \left(\frac{\Delta}{r}\right)^d\widehat{\wp_A}(\Delta,\vartheta)\end{aligned}$$

$$\tilde{D} = 1 + d$$

- d beschreibt also den Einfluß der lateralen Auflösung auf die Schätzer $\widehat{\wp_A(\vartheta)}$ und damit auch auf $\widehat{L_A}$.

- Kann Ξ als fraktale Menge modelliert werden, dann kann als Schätzer für die fraktale Dimension D der Wert $\tilde{D} = 1 + d$ verwendet werden.

Das Boolesche Modell

- Approximation komplizierter Strukturen

Einfachster Fall: **isometrisches B.M.**
Dazu:

- Punkte $x_1, x_2, \ldots$ sind mach einer zufällig im Raum verteilt (Poisson-Punktfeld)
- um jeden liegt Kugel mit Radius $r_1, r_2, \ldots$, die unabhängig und gleichverteilt sind.

Damit

$$\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} b(x_i, r_i)$$

Verallgemeinerung durch Ersetzen der Kugeln durch Mengen zufälliger Größe und Form $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$ unabhängig und gleichverteilt. Damit

$$\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\Xi_i + x_i)$$

Ist λ die Intensität des Poisson-Prozesses, dann erhält man für den ebenen Fall

$$\begin{aligned}
A_A &= 1 - \exp\left(-\lambda \bar{A}\right) \\
L_A &= \lambda \bar{L} \exp\left(-\lambda \bar{A}\right) \\
C_A &= 2\pi\lambda \left[1 - \frac{\lambda \bar{L}^2}{4\pi}\right] \exp\left(-\lambda_2 \bar{A}\right)
\end{aligned}$$

mit

- $\bar{A}$: mittlere Fläche
- $\bar{L}$: mittlerer Umfang