Seminar stochastische Geometrie und räumliche Statistik

Geometrische Kenngrößen von Binärbildern

19. November 2001

Bezeichnungen und Eigenschaften

1. Bezeichnungen:

- $\mathcal{K}$: Klasse der kompakten konvexen Mengen
  $\mathcal{C}(\mathcal{K})$: Konvexring, endliche Vereinigungen kompakter konvexer Mengen
  $\Re$: reguläre Klasse, kompakte Mengen, für die gilt:
  $X \circ b(o,r) = X = X \bullet b(o,r), für\ ein\ r > 0$
- X: betrachtete Objekt, $X \subset \mathbb{R}^d$
- φ reellwertige Funktion, $\varphi(X)$: geometrische Eigenschaft von X
  z.B.: Volumen, Flächeninhalt, Randlänge,...

2. Wünschenswerte Eigenschaften von φ:

1. **Bewegungsinvarianz**
   φ heißt bewegungsinvariant, falls
   $$\varphi(mX) = \varphi(X)$$
   für jede euklidische Bewegung $m \in\ SO_d \times \mathbb{R}^d$

   Bedeutung: Unabhängigkeit von Lage und Ausrichtung des Objektes.

2. **Monotonie**
   $$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow \varphi(X_1) \leq \varphi(X_2)$$
   Bedeutung: Ordnung bzgl φ

3. **Stetigkeit**

   Kleine Veränderungen am Objekt resultieren in kleinen Abweichungen im Funktionswert.

   Sei $X_1, X_2, ...$ eine Folge von Objekten, die gegen X konvergiert.
   Dann heißt φ stetig, falls $\lim_{n\to\infty} \varphi(X_n) = \varphi(X)$

   Hausdorff Metrik:

   $d(X, Y) = inf\{r : X \subset Y \oplus b(o, r)\, und\, Y \subset\ X \oplus b(o, r)\}$

   X und Y haben Distanz d g.d.w. jeder Punkt der einen Menge im Abstand d zu einem Punkt der anderen Menge liegt.

   $X \oplus b(o, r)$: **Parallelmenge** von X.

   $d(X, X \oplus b(o, r)) = r$.

4. **Additivität**

   $$\varphi(X_1 \cup X_2) + \varphi(X_1 \cap X_2) = \varphi(X_1) + \varphi(X_2)$$

   beliebige Objekte X_1, X_2

5. **Homogenität vom Grad k**

   $$\exists k \in I\!N\ so\ da\ss\ \forall X, c \in I\!R_+ : \varphi(cX) = c^k\varphi(X)$$

   Bedeutung: Vergleichbarkeit von Messungen verschiedener Vergrößerungen.

Kenngrößen

1 Ebene Objekte ($\mathbb{R}^2$)

$A(X)$: Flächeninhalt des Objektes X
$L(X)$: Umfang des Objektes X
$C(X)$: Integral der Krümmung des Objektes X

Krümmung:

$$C(X) = \int_{\partial X} \kappa(s) ds = \int_{\partial X} \frac{1}{r(s)} ds$$

∂X: Rand von X

$\kappa(s)$: Krümmung des Randstücks ds

$\kappa(s) = \frac{1}{r(s)}$, wobei $r(s)$ der Radius des nahesten Kreises an ds ist.

ds konvex $\Rightarrow \kappa(s) \geq 0$
ds konkav $\Rightarrow \kappa(s) \leq 0$

Gilt $X \in \mathcal{K}$, dann $C(X) = 2\pi$

(A,L,C) beschreiben das Objekt X "vollständig":

Satz von Hadwiger

1. Sei $\varphi : \mathcal{C}(\mathcal{K}) \to \mathbb{R}$ bewegungsinvariant, additiv und stetig, dann existieren Konstanten $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, so dass:

$$\varphi(X) = a_0 A(X) + a_1 L(X) + a_2 C(X) \quad \forall X \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$$

2. Sei $\varphi : \mathcal{C}(\mathcal{K}) \to \mathbb{R}_+$ bewegungsinvariant, additiv und monoton, dann existieren nichtnegative Konstanten a_0, a_1, a_2, so dass:

$$\varphi(X) = a_0 A(X) + a_1 L(X) + a_2 C(X) \quad \forall X \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$$

Beispiele

- **mittlere Breite** $\bar{b}(X) = 1/\pi \cdot L(X)$

  $b_\vartheta(X)$: Breite von X zur Richtung ϑ

  Abstand zwischen dem Paar paralleler Stützgeraden, die orhtogonal zur Richtung ϑ sind.

$$\bar{b}(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi b_\vartheta(X)\, d\vartheta$$

  Gleichverteilung auf der Einheitskugel

- **Euler Charakteristik** $\mathcal{X}(X) = 1/2\pi \cdot C(X)$ (Zusammenhangszahl)
  - $\mathcal{X}(\emptyset) = 0$
  - $\mathcal{X}(X) = 1, X \in \mathcal{K}$ (Eikörper)
  - $X \in \mathcal{C}(\mathcal{K}), X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$
    $\mathcal{X}(X) =$ #konvexe Komponenten - #Löcher

2 Räumliche Objekte ($I\!R^3$)

$V(X)$: Volumen des Objektes X
$S(X)$: Oberfläche des Objektes X
$M(X)$: Integral der mittleren Krümmung des Objektes X
$K(X)$: Integral der totalen Krümmung des Objektes X

Mittlere Krümmung:

$$M(X) = \int_{\partial X} \kappa_1(s) ds = \int_{\partial X} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1(s)} + \frac{1}{r_2(s)} \right) ds$$

$\frac{1}{r_1(s)}, \frac{1}{r_2(s)}$: Hauptkrümmunges der Oberflächensegments ds
$\frac{1}{r_1(s)}$: minimale Krümmung, $\frac{1}{r_2(s)}$: maximale Krümmung

$\kappa_1(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1(s)} + \frac{1}{r_2(s)} \right)$: mittlere Krümmung

M(X) zunächst definiert für reguläre X, $X \in \Re$, d.h. die Oberfläche ist glatt genug, so daß die Hauptkrümmungen endlich sind.

Anderfalls: $M(X) := \lim_{r \to 0} M(X \circ b(o, r))$

(V,S,M,K) beschreiben das Objekt X im Sinne des Hadwiger Theorems "vollständig"

Beispiele

- **mittlere Breite** $\bar{b}(X) = 1/2\pi \cdot M(X)$

  $b_\omega(X)$: Breite von X zur Richtung ω

  Abstand zwischen dem Paar paralleler Stützebenen, die orhtogonal zur Richtung ω sind.

  $$\bar{b}(X) = \int_\Omega b_\omega(X)\ \mu(d\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} b_{\vartheta\varphi}(X)\ \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi$$

  Gleichverteilung auf der Einheitskugel (Halbkugel)

- **Euler Charakteristik** $\mathcal{X}(X) = 1/4\pi \cdot K(X)$
  (Zusammenhangszahl) $X \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$

  $$\mathcal{X}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}(X_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathcal{X}(X_i \cap X_j) + \ldots - (-1)^n \mathcal{X}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Weitere Begründung zur Verwendung des Tupels (V,S,M,K):

Steiner Formel zur Berechnung des Volumens von Parallelmengen

$$V(X \oplus b(o,r)) = V(X) + S(X)r + M(X)r^2 + \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Steiner Formel für $X \subset I\!R^d$:
Für jedes $X \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$ und für $r \geq 0$ ist $V(X \oplus b(o,r))$ ein Polynom in r:

$$V(X \oplus b(o,r)) = \sum_{i=0}^{d} r^{d-i} \kappa_{d-i} V_i(X)$$

mit Koeffizienten $V_i(X)$, die nur von X abhängen.

Wobei:

- κ_{d-i} Volumen der $(d-i)$-dimensionalen Einheitskugel
  $\kappa_j = \frac{\pi^{j/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}$
- $V_i(X)$ **„i-tes inneres Volumen von X“**

3 Innere Volumina und Minkowski Funktionale

$\mathbf{V}_i(X)$ „i-tes inneres Volumen von X"

- **Dimensionsunabhängigkeit**:
  $X \in \mathcal{K}$ k-dimensional mit $k \leq d-1$, so gilt

  $V_i(X) = 0$ für $i \geq k+1$.

  $V_i^d(X) = V_i^k(X)$ für $i \leq k$.

- $\mathbf{V}_d(X)$ *Volumen* von X

- $\mathbf{V}_{d-1}(X)$ $1/2\cdot$*Oberfläche* von X

  $$\kappa_1 V_{d-1}(X) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{r}\left(V_d(X \oplus b(o,r)) - V_d(X)\right)$$

  mit $\kappa_1 = 2$

- $\mathbf{V}_1(X)$ $\propto$ *mittlere Breite*

  $$V_1(X) = \frac{d\kappa_d}{2\kappa_{d-1}}\bar{b}(X)$$

- $\mathbf{V}_0(X)$ *Eulersche Charakteristik* von X

  $$V_0(\emptyset) = 0, \quad V_0(K) = 1, \; K \in \mathcal{K}$$

Eigenschaften:

1. Die Funktionale V_i sind bewegungsinvariant, homogen vom Grad i, additiv, stetig und monoton.
2. $i \in \{0,..d\}$: $V_i(X \oplus b(o,r)) = \sum_{k=0}^{i} r^{i-k}\binom{d-k}{d-i}\frac{\kappa_{d-k}}{\kappa_{d-i}}V_k(X)$

Satz von Hadwiger

1. Sei $\varphi : \mathcal{C}(\mathcal{K}) \to \mathbb{R}$ bewegungsinvariant, additiv und stetig, so gibt es reelle Konstanten $a_0, ..., a_d$ mit:

$$\varphi(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i V_i \quad \forall X \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$$

2. Sei $\varphi : \mathcal{C}(\mathcal{K})) \to \mathbb{R}_+$ bewegungsinvariant, additiv und monoton, so existieren nichtnegative Konstanten $a_0, ..., a_d$ mit:

$$\varphi(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i V_i$$

Minkowski Funktionale

$W_i(X)$ i-tes Minkowski Funktional (oder Quermaßintegral):

$$W_i(X) = \frac{\kappa_i}{\binom{d}{i}} V_{d-i}(X)$$

Steiner Formel: $V(X \oplus b(o,r)) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} W_i(X)\ r^i$

$d=3$	$d=2$	$d=1$	$d=0$
$W_0 = V$ $W_1 = \frac{1}{3}S$ $W_2 = \frac{1}{3}M = \frac{2\pi}{3}\bar{b}$ $W_3 = \frac{1}{3}K = \frac{4\pi}{3}\mathcal{X}$	$W_0 = A$ $W_1 = \frac{1}{2}L = \frac{\pi}{2}\bar{b}$ $W_2 = \frac{1}{2}C = \pi\mathcal{X}$	$W_0 = L$ $W_1 = N = 2\mathcal{X}$	$W_0 = \mathcal{X}$

4 Crofton Formeln

Integralgeometrische Definition des i-ten inneren Volumens

Crofton Formel
Für $i = 1, ..., d-1$ und $X \in \mathcal{K}$ gilt

$$V_i^d(X) = \frac{\binom{d}{d-i}}{\kappa_{d-i}} \int\limits_{\mathcal{S}_i} \nu_i(\wp_S X) U_i(dS)$$

Dabei bedeuten
ν_i das i-dimensionale Lebesgue-Maß (Volumen),

$\wp_S X$ die orthogonale Projektion von X aus $S \in \boldsymbol{\mathcal{S}}_i$,

$\mathbf{U}_i$ die Gleichverteilung auf $\boldsymbol{\mathcal{S}}_i$ und

$\boldsymbol{\mathcal{S}}_i$ die Menge aller i-Ebenen, die den Ursprung enthalten.

[i-Ebene: i-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit
1-Ebene: Gerade   2-Ebene: Ebene]

Berechnung der d-dimensionalen inneren Volumina aus niederdimensionalen Funktionalen.

4.1 Crofton Formeln für Räumliche Objekte

Bezeichnungen:

- $E_{r,\omega}$ Ebene, beschrieben durch
  r: Abstand zum Ursprung und
  $\omega \in \mathbb{R}^2$: Schnittpunkt der orthogonalen Geraden durch
  den Ursprung
  für $r < 0$ definiere $E_{r,\omega} := E_{-r,-\omega}$
  $X \cap E_{r,\omega}$ **ebener Schnitt**

- $e_{y,\omega}$ Gerade, festgelegt durch
  ω Richtung der Geraden und
  $y \in \mathbb{R}^2$ Schnittpunkt von e mit $E_{o,\omega}$ (oth. zu e)
  $X \cap e_{y,\omega}$ linearer Schnitt oder **Sehne**

$$\begin{aligned} V(X) &= \int A(X \cap E_{r,\omega})\, dr \\ &= \int L(X \cap e_{y,\omega})\, dy \\ &= \int \chi(X \cap \{x\})\, dx. \end{aligned}$$

für ω beliebig.

Beachte: Unabhängigkeit der ersten beiden Integrale von der Richtung ω, daher auch:

$$\begin{aligned} V(X) &= \int\int A(X \cap E_{r,\omega})\, dr\mu(d\omega) \\ &= \int\int L(X \cap e_{y,\omega})\, dy\mu(d\omega) \end{aligned}$$

Analoge Schnittformeln auch für Oberfläche und das Intergral der mittleren Krümmung

Ebener Schnitt

$$\frac{\pi}{4}S(X) = \int\int L(X \cap E_{r,\omega})\, dr\mu(d\omega) \qquad (1)$$

und

$$\frac{1}{2\pi}M(X) = \int\int \mathcal{X}(X \cap E_{r,\omega})\, dr\mu(d\omega) \quad (2)$$

Beachte:

1. $X \in \mathcal{K}$: innere Integral von (2) ist die Breite von X zur Richtung ω
2. Abhängigkeit der inneren Integrale von der gewählten Richtung
   $\Rightarrow$ Aufschluß über die Ausrichtung des Objektes im Raum

Linearer Schnitt

$$\frac{1}{4}S(X) = \int\int \mathcal{X}(X \cap e_{y,\omega})\, dy\mu(d\omega) \quad (3)$$

Das Integral $\int \chi(X \cap e_{y,\omega})\, dy$ ist die Fläche der totalen Projektion von X auf die Ebene $E_{o,\omega}$, $\wp^{\omega}(X)$.

Andere Schreibweise für (3):

$$\frac{1}{4}S(X) = \int \wp^{\omega}(X)\mu(d\omega),$$

d.h. der durchschnittliche Flächeninhalt der totalen Projektion ist ein viertel der Oberfläche. (Cauchy Formel)

4.2 Crofton Formeln für Ebene Objekte

$\mathbf{e}_{r,\vartheta}$: Gerade festgelegt durch die Richtung ϑ und ihren Abstand zum Ursprung r.
Ist der Schnitt von X mit $E_{r,\vartheta}$ nichtleer, dann ist er eine Sehne bzw. eine Vereinigung von Sehnen.
$\mathcal{X}(X \cap e_{r,\vartheta})$ = Anzahl der Sehnen.

$$\frac{1}{\pi}L(X) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}(X \cap e_{r,\vartheta})drd\vartheta$$

- $\wp^{\vartheta}(X) := \int \chi(X \cap e_{r,\vartheta})dr$ Länge der totale Projektion von X in Richtung ϑ
- Ist X konvex, dann $\wp^{\vartheta}(X) = b^{\vartheta}(X)$

5 Berechnung von $\mathcal{X}$

Ein Gitternetz sei definiert durch
(a) zwei Richtungen, ϑ_1 und ϑ_2, sowie
(b) zwei Abstände, Δ_1 und Δ_2

Gitterpunkt $x_{ij} = (i\Delta_1, \vartheta_1) + (j\Delta_2, \vartheta_2)$

$X \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$, mit $X \circ B = X = X \bullet B$ für $B = [o, x_{0,1}], [o, x_{1,0}]$ und $[o, x_{1,1}]$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(X) &= \sum_{i,j} [1_X(x_{i,j})] \\
&\quad - \sum_{i,j} [1_X(x_{i,j}) 1_X(x_{i+1,j}) + 1_X(x_{i,j}) 1_X(x_{i,j+1})] \\
&\quad + \sum_{i,j} [1_X(x_{i,j}) 1_X(x_{i+1,j}) 1_X(x_{i,j+1}) 1_X(x_{i+1,j+1})]
\end{aligned}$$

Euler Charakteristik eines Graphen: $\chi = v - e + f$

v: Anzahl der Knoten

e: Anzahl der Kanten

f: Anzahl der eingeschlossenen Flächen

$$\begin{aligned}
v &= \sum_{i,j} [1_X(x_{i,j})], \\
e &= \sum_{i,j} [1_X(x_{i,j}) 1_X(x_{i+1,j}) + 1_X(x_{i,j}) 1_X(x_{i,j+1})], \\
f &= \sum_{i,j} [1_X(x_{i,j}) 1_X(x_{i+1,j}) 1_X(x_{i,j+1}) 1_X(x_{i+1,j+1})]
\end{aligned}$$