
Räumliche Interpolation

durch Voronoi-Mosaik und Delaunay-Triangulation

- 1 – Motivation
- 2 – Polygonale Interpolation
- 3 – Interpolation durch Triangulation

1 Motivation

- **Bisher:**

Räumliche approximative Interpolation über Kriging-Verfahren.

- **Jetzt:**

Welche andere Methoden räumlicher Interpolation gibt es noch und was sind deren Anwendung?

Räumliche Interpolation

Gegeben: Gebiet S , Meßdaten z gewonnen an einer endlichen Zahl von Punkten $p_i = \{p_1, \dots, p_n\} \subset S$ gegeben durch ihre *Ortskoordinaten* x_i

Ziel:

- Gewinnen einer Funktion f , die für beliebige Punkte $p \in S \setminus P$ einen interpolierten Wert z liefert ($f(x) = z$).
- f wird als *Interpolant* bezeichnet.

- **Exakte Interpolation:**

f liefert an den betrachteten Meßstellen x_i auch den beobachteten Wert z_i , d.h, es gilt: $f(x_i) = z_i$

- **Approximierende Interpolation:**

Interpolant approximiert für ein $p_i \in P$ den Wert z_i .

- **Globale Interpolation:**

Der Wert von $f(x)$ eines Punktes $p \in S \setminus P$ hängt von allen Werten z_i der Punkte p_i aus P ab. (Nachteil: Sämtliche p_i beeinflussen interpolierten Wert von p).

- **Lokale Interpolation:**

Beeinflussung von p nur durch „Nachbarpunkte“ (Lokalität).
Geringerer mathematische Aufwand.

2 Polygonale Interpolation

Allgemeine Form linearer Interpolanten:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n_D} w_i z_i \quad , p_i \in D(p)$$

dabei ist:

$D(p)$ die *Menge* und n_D die *Anzahl* der „Nachbarn“ von p .
 w_i das *Gewicht* und z_i die Datenwerte der „Nachbarn“.

Frage: Wie sind die „Nachbarn“ definiert?

Tessellation

Definition: (Planare) Tessellation

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ($A \subseteq \mathbb{R}^2$) und A_i abgeschlossene Teilmengen von A .

Sei $T = \{A_1, \dots, A_n\}$. Wenn gilt:

- $\text{int}(A_i) \neq \emptyset, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- $\text{int}(A_i) \cap \text{int}(A_j) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$

dann heißt T eine *Tessellation* der Menge A .

Definition (Einfache Voronoi-Tessellation im $\mathbb{R}^2$)

Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ $p_i \neq p_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i \neq j$, $A = \mathbb{R}^2$

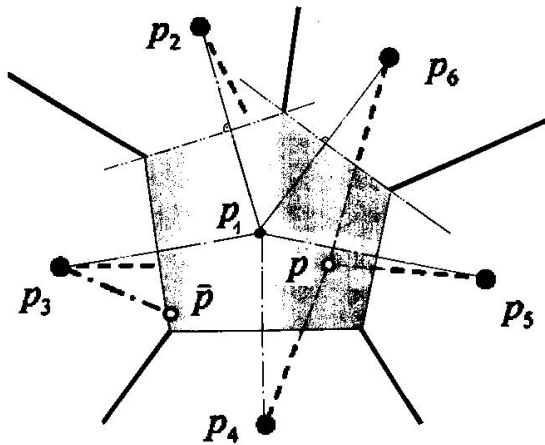
Dann ist:

$V(p_i) = \{x : \|x - x_i\| \leq \|x - x_j\| \quad j \neq i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ ein
einfaches Voronoi-Polygon.

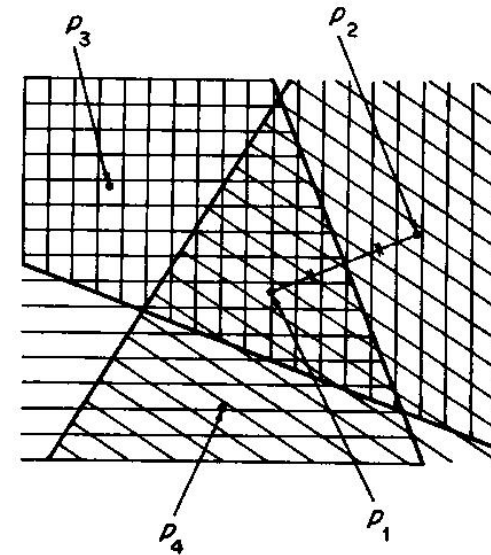
$V^\circ(p_i) = \{x : \|x - x_i\| < \|x - x_j\| \quad j \neq i, j \in \{1, \dots, n\}\}$
ein *offenes, einfaches Voronoi-Polygon*

bezüglich des Punktes (*Nukleus*) p_i .

$\mathcal{V}(P) := \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ heißt *Voronoi-Tessellation*.



Einfache Voronoi-Tessellation



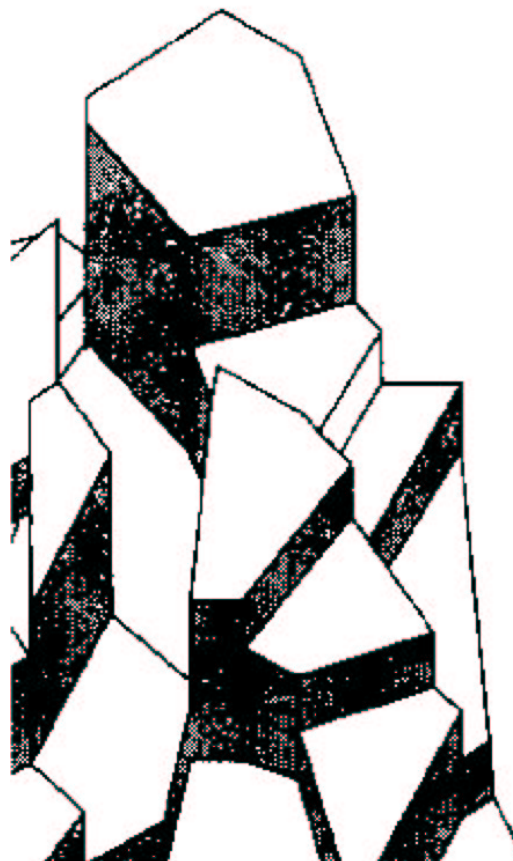
*Voronoi-Tessellation durch
Schnitt von Halbebenen.*

Voronoi-Tessellationen.

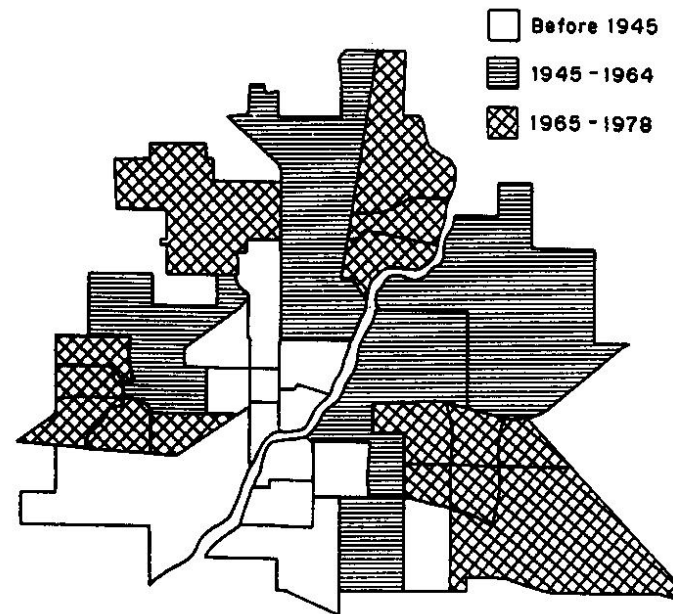
Nächste Nachbar-Interpolation

- Bilden der Voronoi-Tessellation bzgl. der Menge $P = \{p_1, \dots, p_n\}$.
- Jeder Punkt p in $V(p_i)$ erhält z-Wert von p_i , $1 \leq i \leq n$
- $f(x) = \sum_{i=1}^{n_D} w_i z_i$ ergibt mit $n_D = 1$ und $w_i = 1$ dann

$$f(x) = z_i.$$



Nächste Nachbar-Interpolation



Choroplethkarte

Anwendung:

Problem: Messung der mittleren Niederschlagsmengen über einem Gebiet mit nicht gleichmäßig verteilten Meßstellen.

Arithmetisches Mittel zu ungenau: $\bar{z} = \sum_{i=1}^n z_i \frac{1}{n}$

Lösung: Bilden des gewichteten Mittels über die relativen Flächenanteile der Voronoi-Polygone:

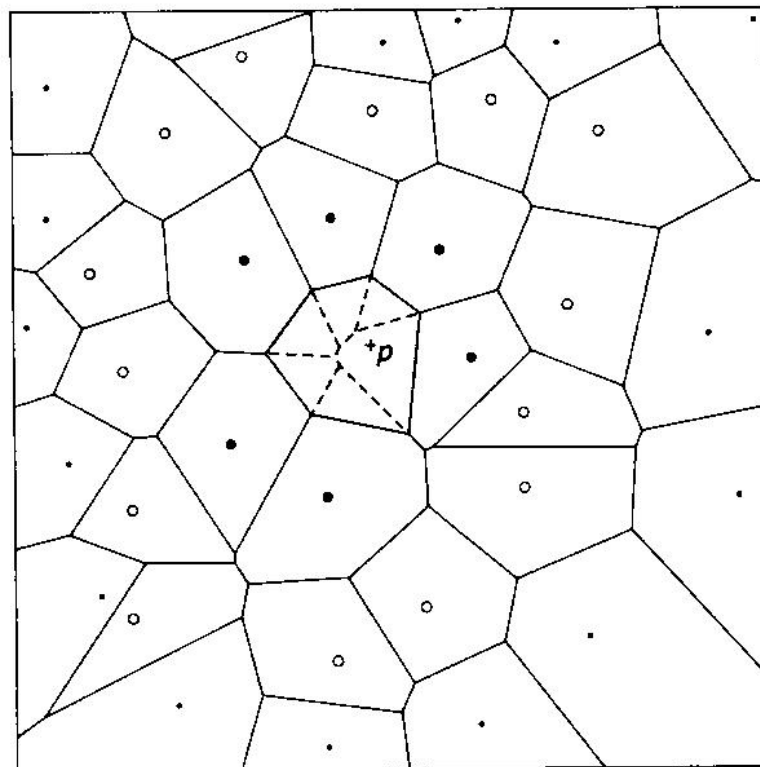
$$\bar{z} = \sum_{i=1}^n z_i \frac{w_i}{\sum w_i}$$

(w_i ist definiert als die Fläche von $V(p_i)$).

Natürliche Nachbarn-Interpolation:

- Bilden des Voronoi-Diagrammes unter Einbeziehung der Interpolationsstelle p , also $P \cup \{p\}$
- Natürliche Nachbarn aus *Voronoi-Polygonen* mit gemeinsamen Grenzkanten.
- Damit ergibt sich o.g. Interpolationsformel zu:
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n_D} w_i z_i$$
 wobei die z_i die z-Werte von $p_i \in D(p)$, wobei

n_D Anzahl *natürlicher Nachbarn* p_i .

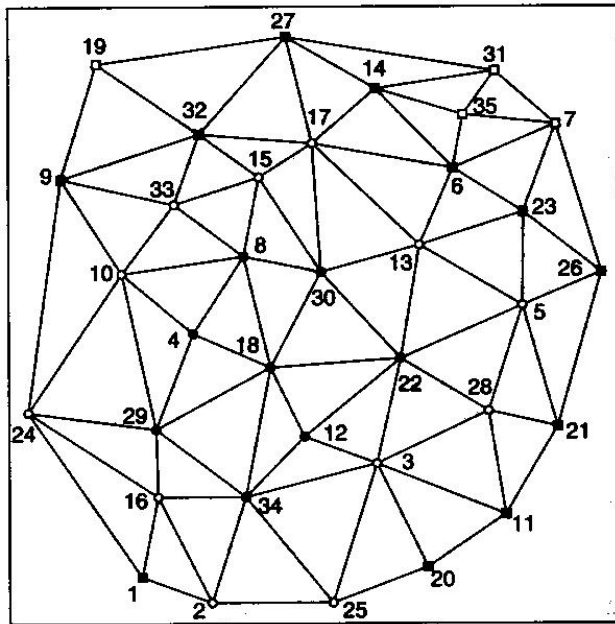


Natürliche Nachbar-Interpolation

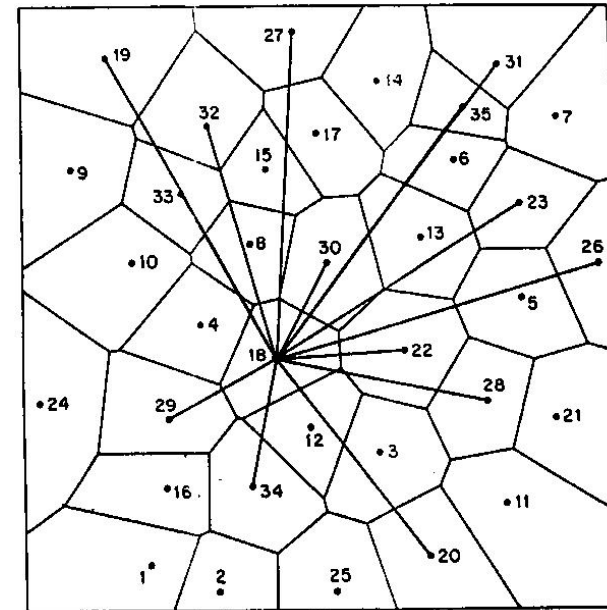
Surrounding larger neighbour-Methode (SLN) Betrachtet sei ein beliebiger, fester Punkt $p_i \in P$

- Bilden der *Delaunay-Triangulation* (DT(P)) bzw. der *Voronoi-Tesselation* (VT(P)) der Punkte p_i .
- Bilden einer *ordinalen Rangfolge* der p_i entsprechend w_i .
- Verbinden von p_i und p_j
 - Bei DT(P) über die Kanten der Triangulation e_j
Liegt auf e_j kein Knoten mit höherem Rang so ist p_j n.N..
 - Bei VT(P) bilden der Strecke $\overline{p_i p_j}$.
Wird kein Voronoi-Polygon mit Nukleus höherem Ranges geschnitten, so ist p_j n.N.

Anwendung: Modellierung der Flugbewegungen zwischen US.-Städten.



*Rangfolgebestimmung mit
Delaunay-Triangulation.*



*Surrounding larger neighbour
(SLN).*

SLN-Methode.

3 Interpolation durch Triangulation

Allgemeines Vorgehen bei Triangulationen

1. Konstruktion der Flächenzerlegung (Triangulation)
2. Identifikation des Polygons, das p enthält.
3. Berechnung von z unter Verwendung der Eckpunkte $D(P)$.

Fokus der Betrachtung: Punkt 1.)

Definition: (Triangulation (allgemein))

Sei $T = \{A_1, \dots, A_n\}$ eine Tessellation von A und seien $A_1, \dots, A_n$ lauter Dreiecke, dann heißt $T = T(A)$ eine *Triangulation* der Menge A .

Definition: (Minimum Length Triangulation (MLT))

Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ eine Menge planarer Punkte, $|T(P)|$ die Summe der Länge der Kanten einer beliebigen Triangulation von $CH(P)$.

Die *Minimum Length Triangulation* ($MLT(P)$) von $CH(P)$ ist die Triangulation, die $|T(P)|$ minimiert.

Definition: (Delaunay-Triangulation)

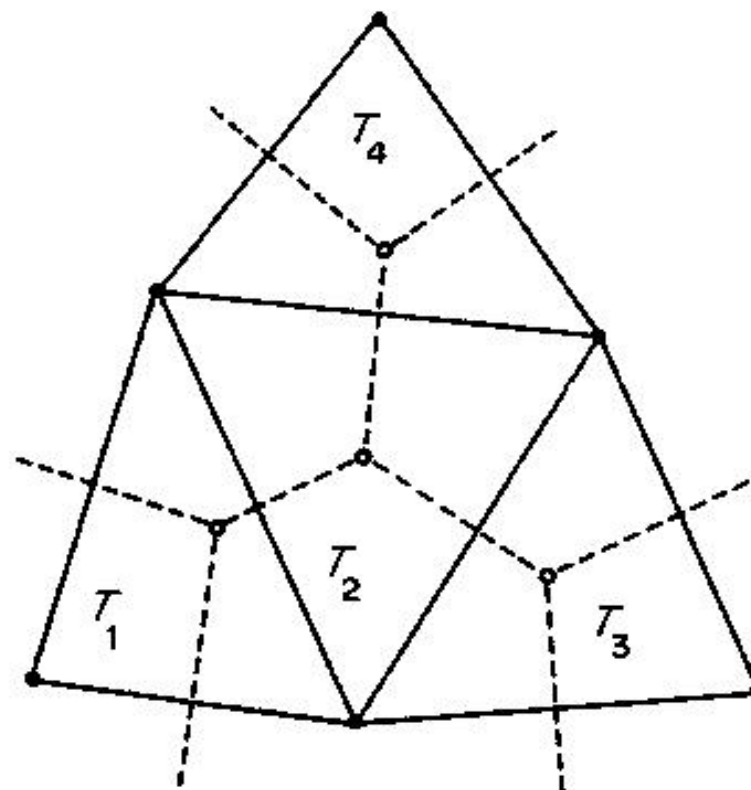
Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, wobei nicht alle p_i auf einer Linie liegen
(*Nicht-Kollinearitäts Bedingung*), $CH(P)$ die *konv. Hülle* von P .

Dann heißt die *Tessellation* $DT(P)$ von $CH(P)$ die alle p_i von P zu
Dreiecken verbindet *Delaunay-Triangulation*, wenn gilt:

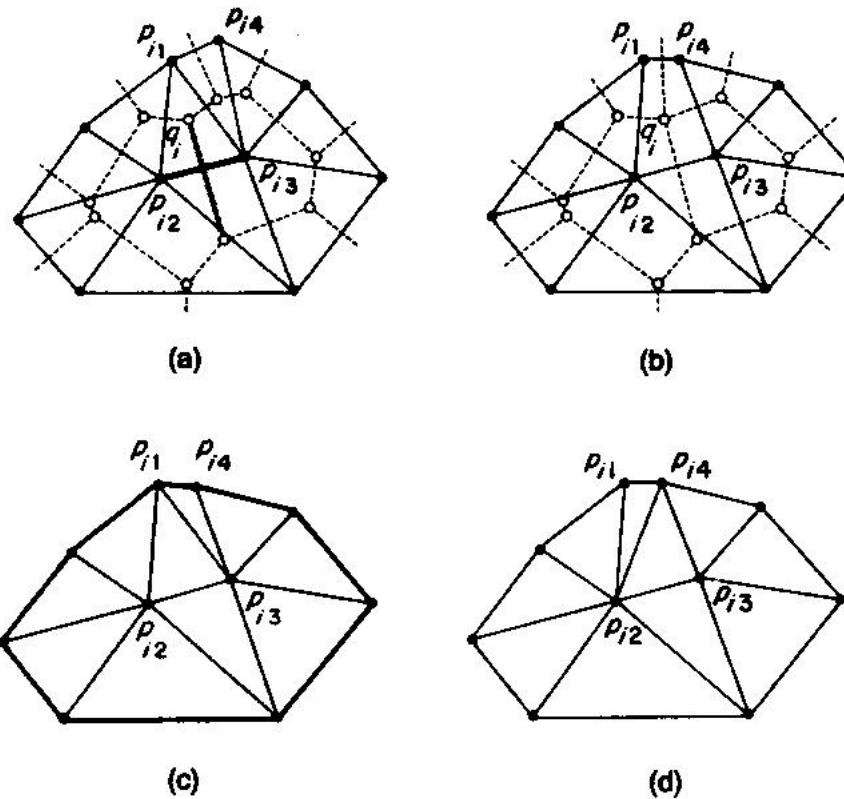
Die Umkreise aller Dreiecke enthalten keine weiteren Punkte aus P .

Eigenschaften:

- Dualer Zusammenhang *Delaunay-Triangulation* und *Voronoi-Tessellation*
- Degenerierte *Voronoi-Tessellationen* ergeben sgn. *Prätriangulationen*



Delaunay-Triangulation



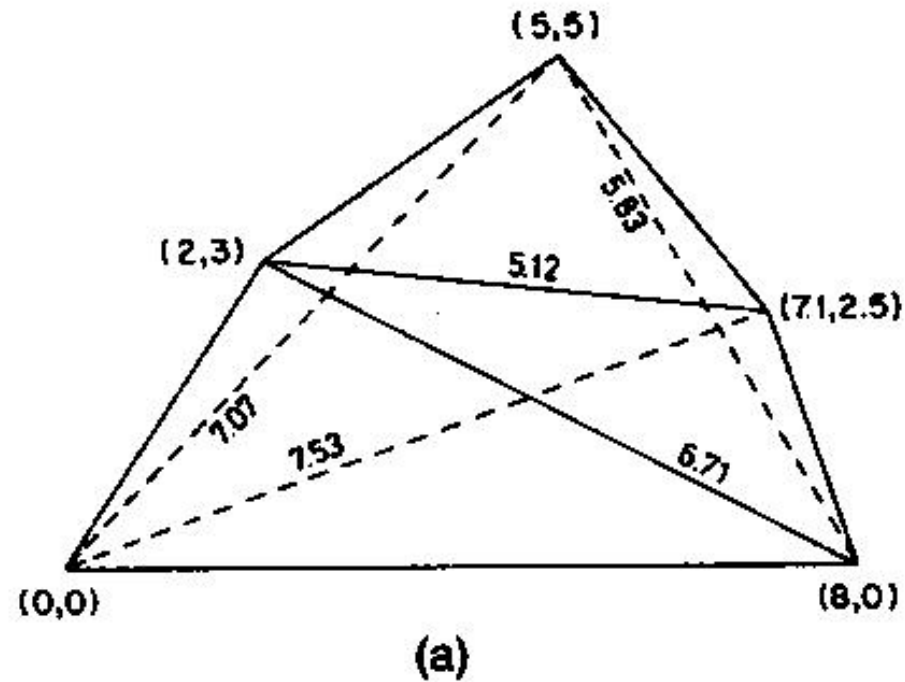
Dualität und Prätriangulation.

Definition: (Greedy-Triangulation)

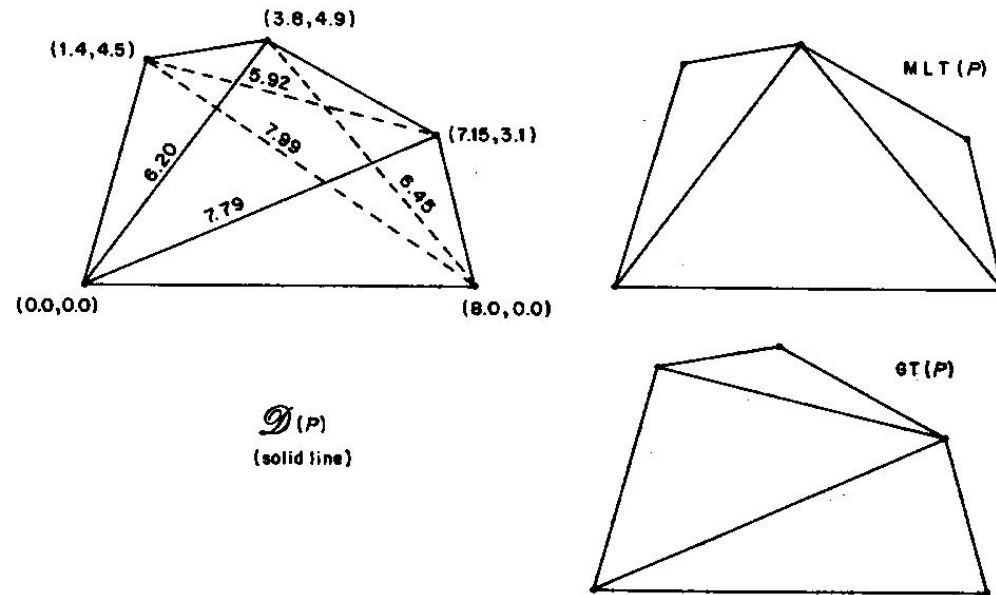
Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ Punktmenge, $CH(P)$ die *konvexe Hülle* von P und E die Menge der Kanten der *Triangulation*.

Eine *Greedy-Triangulation* $GT(P)$ ergibt sich durch sukzessives Hinzufügen der kürzest zulässigen Kanten (Start: $E = \emptyset$).

Bemerkung: Eine zulässige Kante ist eine Kante, die keine, der bereits zugefügten Kanten schneidet.



$$DT(P) = GT(P) = MLT(P)$$



$$DT(P) \neq GT(P) \neq MLT(P)$$

Triangulation unter Einbeziehung des Randes:

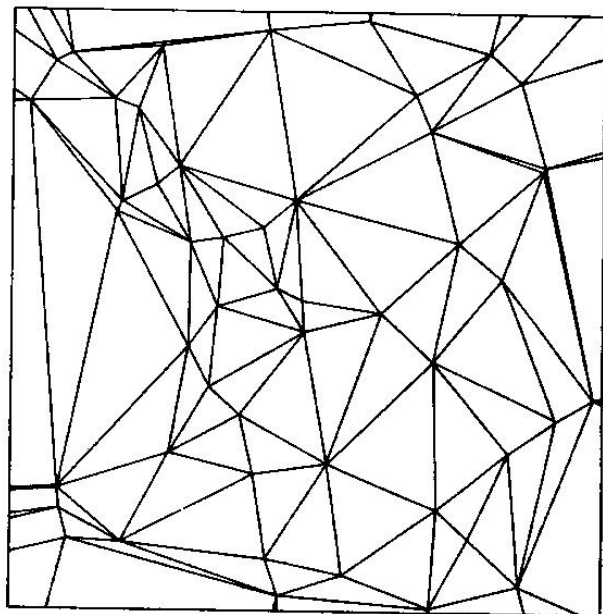
- **Problem:**

Tessellationen $\mathcal{T}(P)$ sind in gegebener Weise nur innerhalb einer *konvexen Hülle* $CH(P)$ definiert.

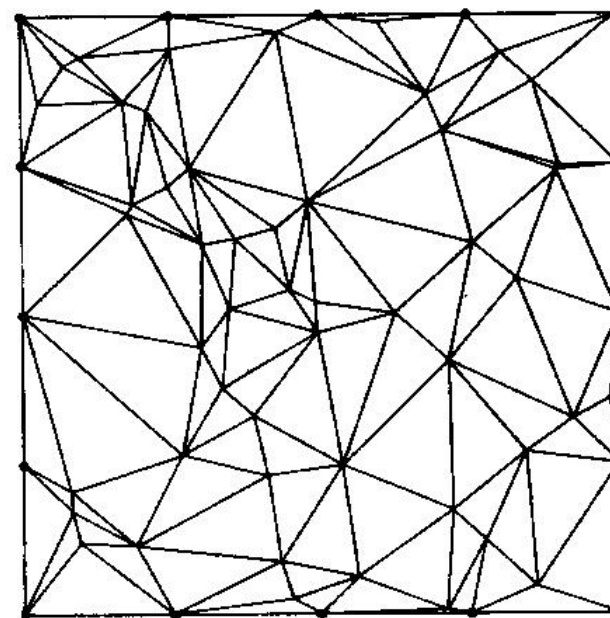
S wird daher in der Regel von $CH(P)$ nicht überdeckt.

- **Dadurch:** Entstehen extrem spitzer Winkel bei Einbeziehung des *Randes*.

- **Lösung:** Konstruktion von *Senkrechten* zum Rand oder Einfügen zusätzlicher *Rand-Datenpunkte*.



Senkrechte zum Rand.



Einfügen zusätzlicher Randpunkte.