Simulation von zufälligen Feldern

Achim Glaser

Seminar „Simulation und Bildanalyse in Java II“
Universität Ulm, Abteilungen SAI & Stochastik
02.02.2004

1. Wiederholung

1.1 Definition von zufälligen Feldern (zF)

1.2 Definition von einem Poisson‘schen Punktprozess

1.3 Bezeichnungen

2. Modelle

2.1 Gauss‘sches Feld

2.2 Random-Token-Feld

2.3 Boolesches Feld

2.4 Dead-Leaves-zF

1. Wiederholung

1.1 Definition von zufälligen Feldern

- Ein zufälliges Feld ist eine Familie von Zufallsvariablen $\{Y_t,\ t \in \mathbf{R}^d\}$ über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit Werten in $\mathbf{R}$.

- Ein zufälliges Feld ist also eine messbare Abbildung Y von $(\Omega,\mathcal{F})$ in den messbaren Raum $(G^d, \mathcal{G}^d)$ mit:
  $G^d = \{g \mid g\mathbf{:}\ \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}\}$ für alle $d \geq 1$
  $\mathcal{G}^d = \sigma(\{g \in G^d \mid g(t_j) \in B_j\ \ j=1,..,m\})$ für beliebiges $m \in \mathbf{N}$ und halb-offene Intervalle B_j im $\mathbf{R}^d$

- $Y_t(\omega)$ ist der Wert der ω zugeordneten Funktion $g \in G^d$ an der Stelle t

1. Wiederholung

1.2 Stationärer Poisson'scher Punktprozess

- Ein stationärer Poisson'scher Punktprozess $\{X_i, i \in N\}$ auf $\mathbf{R}^d$ wird durch folgende zwei Eigenschaften definiert:

  (i) $N(B)$ ist poissonverteilt mit Parameter $\lambda|B|$, wobei $\lambda \in R_+$ und $|B|$ das Volumen von B sei, für jede beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$.

  (ii) $N(B_1),..,N(B_n)$ sind unabhängige Zufallsvariablen für paarweise disjunkte $B_i \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ und für alle $n \in \mathbf{N}$.

  (iii) **Hier:** $d \in \{2,3\}$

  wobei $N(B)$ = Anzahl der $X_i \mid X_i \in B$.

1. Wiederholung

1.3 Bezeichnungen

- W sei das Beobachtungsfenster
- $X = \{x_1, x_2, ...\}$ sei ein stationärer Poisson'scher Punktprozess, mit Punkten/Keimen $x_i \in X$
- $\{A(x_i)\}$ sei eine Folge von iid zufälligen Mengen
- $A(x_i)$ heisst das Korn, welches einem Keim $x_i \in X$ zugeordnet wird
- $(X, \{A(x_i)\})$ heisst ein Keim-Korn-Modell
- $\varepsilon(x_i)$ sei die Farbe bzw. Höhe die einem Keim $x_i \in X$ zugewiesen wird
- Y sei ein zF

2. Modelle

2.1 Gauss‘sches Feld

2.2 Random-Token Feld

2.3 Boolesches Feld

2.4 Dead-Leaves-zF

2.1 Gauss‘sches Feld

Def. 2.1:

Y heisst gauss‘sches zF, falls jede Linearkombination ihrer Variablen eine gauss‘sche Verteilung besitzt:

Y heisst gauss‘sches zF $\Leftrightarrow$ für alle $n \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{R}^n$,
$y_1,..,y_n \in \mathbf{R}^d$ gilt:
$\Sigma_{i=1,..,n} c_i Y(y_i) \sim N(\mu,\sigma^2)$

<u>Kovarianzfunktion:</u>

Die Kovarianzfunktion von einem zF $Y = \{Y(x)\}$ sei definiert als:
$C(x,y) = Cov(Y(x),Y(y)) = \mathbf{E}(Y(x)Y(y)) – \mathbf{E}(Y(x))\mathbf{E}(Y(x))$

2.1 Gauss‘sches Feld

Def. 2.2:

Ein Gauss‘sches Feld heisst *stationär*, falls **E**(Y(x)) = m und C(x,y) = C(x-y) und *isotrop*, falls zusätzlich C(x,y) = C(|x-y|).

Beispiele:

(i) White Noise:

$$C(x,y) = \sigma^2 \qquad ,\text{falls } x = y$$
$$C(x,y) = 0 \qquad ,\text{sonst}$$

(ii) Gauss‘sche Kovarianzfunktion:

$$C(x,y) = \exp(-||x-y||^2/a^2) \qquad a \geq 0$$

2.1 Gauss‘sches Feld

Simulation: White Noise

Für alle $x \in W$:

$$Y(x) \sim N(0, \sigma^2)$$

Für alle $x,y \in W$, $x \neq y$:

$Y(x)$, $Y(y)$ unabhängig

2.1 Gauss'sches Feld

$Y_i(x)$ i=1,..,n iid: $\{Y_i\}$ hat Kovarianzfunktion $C(x,y) = \exp(-||x-y||^2/a^2)$

$a \geq 0$, $\mathbf{E}(Y_i(x)) = 0$:

$\Sigma_{i=1,..,n} Y_i(x)/n^{½} \rightarrow N(0,C(x,x)) \quad n \rightarrow \infty$

<u>Spektrale Methode zur Simulation von Y_i:</u>

Bochner's Satz: $C(x,y) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i<(x,y),u>} d\mathcal{X}(u)$

Falls $\mathcal{X}$ bekannt:

- Vektor $V \sim \mathcal{X}$, $U \sim U]0,1[$:

1. $Y(x) = 2^{½}\cos(<V,x> + 2\pi U) \quad x \in W$

2.1 Gauss'sches Feld

Hier: $V_k = (V_{k_1}, V_{k_2})$

$V_{k_i} \sim N(0, 2^{½}/a)$ $\quad$ $i=1,2$

Simulation:

i. Generiere $V_k = (V_{k_1}, V_{k_2})$ entsprechend dem spektralen Mass χ und $U_1,..,U_n \sim U[0,1]$ (für grosse n).

ii. Berechne:

$$Y(x) = 2^{½}/n^{½}\Sigma_{k=1,..,n}\cos(<V_k,x> + 2\pi U_k) \text{ für alle } x \in W$$

2.2 Random-Token Feld

Sei $(X, \{A(x_i)\})$ ein Keim-Korn-Modell:

Def. 2.2:

Ein Random-Token Model ist die gewichtete Summe von Indikatorfunktionen der zufälligen Mengen $A(x_i)$, die auf die Keime x_i aufgebaut werden

$$Y(x) = \Sigma_{x_i \in X}\, \varepsilon(x_i) 1_{x \in A(x_i)} \qquad x \in \mathbf{R}^2$$

Simulation:

i. $x_i \in X$
ii. $A(x_i)$ = Rechteck mit fester Grösse; Mittelpunkt x_i
iii. $\varepsilon(x_i) \sim U[235,255]$ (beispielhaft)
iv. Bei Überdeckung: Addition der Höhe

2.3 Boolesches Feld

Def. 2.3:

Ein Boolsches Zufallsfeld ordnet jedem Punkt das maximale Gewicht der Poisson Population von zufälligen Mengen $A(x_i)$ zu, die ihn enthalten.

$Y(x) = \max_{\{x_i \in X:\ x \in A(x_i)\}} \varepsilon(x_i,x) 1_{x \in A(x_i)}$ $\qquad x \in \mathbf{R}^2$

Simulation:

i. $x_i \in X$

ii. $A(x_i)$ = Kreis mit festem Radius $r \in \{0,..,50\}$

iii. $\varepsilon(x_i,x) = \exp(-\|x - x_i\|^{½})*255$ für alle $x \in A(x_i)$

iv. Bei Überschneidung: Maximum der Höhe

2.4 Dead Leaves

Def. 2.4:

Ein Dead Leaves Modell $Y = \{Y(x,t)\}$, $x \in \mathbf{R}^2$ und $t \in \mathbf{R}$, verbindet mit jedem Punkt $x \in W$ die Farbe $\varepsilon(x_i,t_i)$ des zuletzt gefallenen Blattes $A(x_i,t_i)$, welches x enthält.

$$Y(x,t) = \varepsilon(x_i,t_i) \quad ,\text{falls } x \in A(x_i,t_i),\ t = t_i\ ,\ (x_i,t_i) \in X$$

Simulation:

i. $(x_i,t_i) \in X$
ii. $A(x_{i,}t_i)$ = Rechteck mit Grösse G ~ U[4,100]
iii. $\varepsilon(x_it_i)$ ~ U[0,254]
iv. Bei Überschneidung -> Überdeckung
v. Abbruch, falls $\varepsilon(x) < 255$ für alle $x \in W$

Literatur:

- Jean Paul Chilès, Pierre Delfiner
  Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty

- Christian Lantuéjoul
  Geostatical Simulation Models and Algorithms

- David Flanagan
  1. *Java in a Nutshell*
  2. *Java in a Nutshell, Examples*