Zufällige Felder in der stochastischen Geometrie: Einführung

1 – Zufällige Felder
2 – Zufällige Felder (Funktionen) in der stochastischen Geometrie
3 – Beispiele

1 Zufällige Felder

1.1 Definition

- Ein zufälliges Feld ist eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_t, t \in \mathbb{R}^N\}$ über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$.
- Ein zufälliges Feld ist also eine messbare Abbildung X von $(\Omega, \mathcal{F})$ in den messbaren Raum $(G^{N,d}, \mathcal{G}^{N,d})$ mit:
  $G^{N,d} = \{g \mid g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d\} \quad \forall\, N, d \geq 1$
  $\mathcal{G}^{N,d} = \sigma(\{g \in G^{N,d} \mid g(t_j) \in B_j, j = 1 \dots m\})$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und halb-offene Intervalle B_j im $\mathbb{R}^d$
- $X_t(\omega)$ ist der Wert der ω zugeordneten Funktion $g \in G^{N,d}$ an der Stelle t.

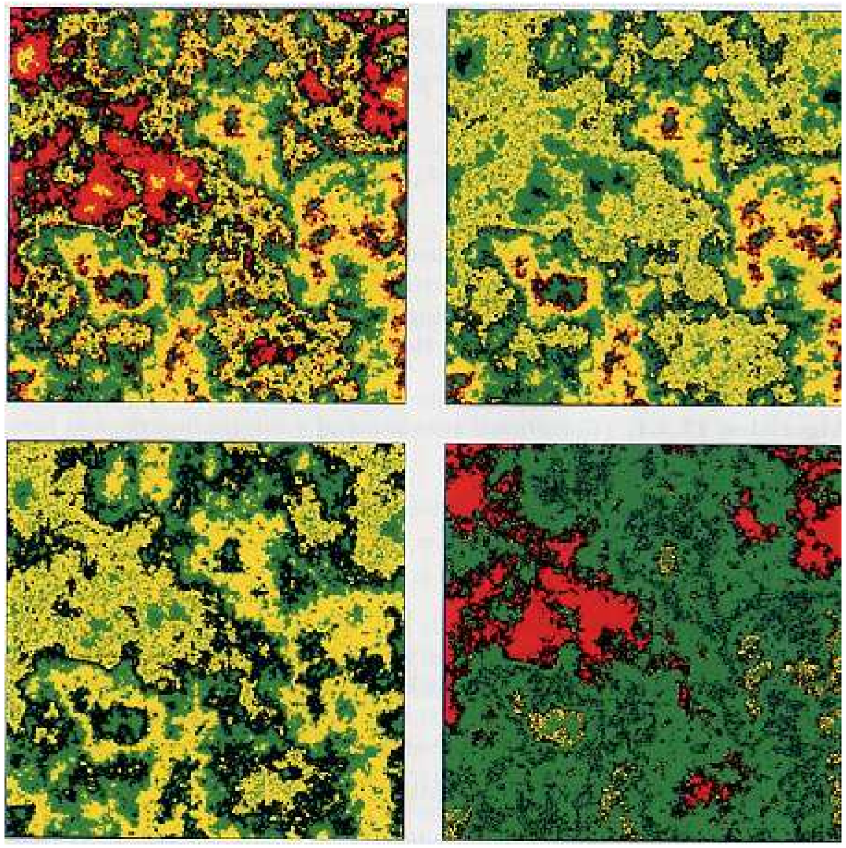

Abbildung 1: Vier Realisierungen eines zufälligen Feldes

1.2 Gemeinsame Verteilung

- Endlich-dimensionale Verteilung

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1\times\ldots\times B_n) = P(\{\omega \in \Omega \mid X_{t_1}(\omega) \in B_1, \ldots, X_{t_n}(\omega) \in B_n\})$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

- Endlich-dimensionale Verteilungsfunktion

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(\{\omega \in \Omega \mid X_{t_1}(\omega) \le x_1, \ldots, X_{t_n}(\omega) \le x_n\})$$

$$\forall\, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^N$$

1.3 Satz von Kolmogorov

Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_t, t \in \mathbb{R}^N\}$ ist ein zufälliges Feld $\Leftrightarrow$ für die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen gilt:

(i) Konsistenz

$$P_{t_1,\ldots,t_{n+m}}(B_1 \times \ldots \times B_n \times \mathbb{R}^{md}) = P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n)$$

(ii) Symmetrie

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = P_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(B_{i_1} \times \ldots \times B_{i_n})$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und jede Permutation $\{i_1, \ldots, i_n\}$ von $\{1, \ldots, n\}$

1.4 Separabilität

- $\{X_t, t \in \mathbb{R}^N\}$ heißt *separabel*, falls eine abzählbare Menge $D \in \mathbb{R}^N$ und ein Ereignis N mit $P(N) = 0$ existiert, so dass

  $$\{\omega \in \Omega \mid X_t(\omega) \in B, t \in I\} \backslash \{\omega \in \Omega \mid X_t(\omega) \in B, t \in I \cap D\} \subseteq N$$

  für alle abgeschlossenen Intervalle $B \in \mathbb{R}^d$ und jedes offene Intervall $I \in \mathbb{R}^N$.

- Ist X_t reell und separabel, so gilt:

  $$\sup_{t \in I \cap D} X_t = \sup_{t \in I} X_t$$

1.5 Stationarität

- $\{X_t, t \in \mathbb{R}^N\}$ mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt *stationär*, falls

  $$P(X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_n} \le x_n) = P(X_{t_1+\tau} \le x_1, \ldots, X_{t_n+\tau} \le x_n)$$

  $\forall\, \tau, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;

  d.h. die Zufallsvektoren $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ und $(X_{t_1+\tau}, \ldots, X_{t_n+\tau})$ haben die gleiche Verteilung.

1.6 Kovarianzfunktion

- Erwartungswertfunktion

$$m(t) = \mathbb{E}(X_t)$$

- Kovarianzfunktion

$$C(s,t) = Cov(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - m(s))(X_t) - m(t))]$$

- Für die Kovarianzfunktion gilt:
  (i) $|C(s,t)| < \infty \quad \forall s,t \in \mathbb{R}^N$
  (ii) C ist nicht negativ definit

- Ist $\{X_t, t \in \mathbb{R}^N\}$ stationär, so gilt:
  - (i) $m(t) \equiv const$
  - (ii) $C(s,t) = C(s-t)$
- Ein zufälliges Feld $\{X_t, t \in \mathbb{R}^N\}$ mit obigen Eigenschaften heißt *stationär zweiter Ordnung*.

1.7 Satz von Bochner

- Eine stetige Funktion $C : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ ist nicht negativ definit $\Leftrightarrow C$ hat folgende Darstellung:

$$C(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp(is\lambda) dF(\lambda) \quad \forall\, s \in \mathbb{R}^N$$

- Ist das zufällige Feld $\{X_t, t \in \mathbb{R}^N\}$ stationär zweiter Ordnung mit stetiger Kovarianzfunktion C, so gilt also:

$$C(s,t) = C(s-t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp(i(s-t)\lambda) dF(\lambda) \quad \forall\, s,t \in \mathbb{R}^N$$

1.8 Gauß’sche zufällige Felder

- Ist der Zufallsvektor $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ multivariat normalverteilt, so heißt $\{X_t, t \in \mathbb{R}^N\}$ *Gauß’sches zufälliges Feld*.
- Für ein Gauß’sches zufälliges Feld gilt:
  Stationarität zweiter Ordnung ⇔ Stationarität
- Sei $C : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ nicht negativ definit, dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und ein auf dem Wahrscheinlichkeitsraum definiertes Gauß’sches zufälliges Feld mit Kovarianzfunktion C.

2 Zufällige Felder (Funktionen) in der stochastischen Geometrie

2.1 Oben halbstetige Funktionen

- $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ heißt *oben halbstetig* in $x \in \mathbb{R}^N$, falls
  $\forall \varepsilon \geq 0 \, \exists \, \delta \geq 0 : \forall y \in U_\delta(x) \cap \mathbb{R}^N \Rightarrow f(y) \leq f(x) + \varepsilon$

- Beispiel für eine oben halbstetige Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 0 \\ 0 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

- $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ ist oben halbstetig $\Leftrightarrow$ $\forall t \in \overline{\mathbb{R}}$ sind die Mengen $A_t(f) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \geq t\}$ abgeschlossen und monoton fallend; d.h.

$$s \leq t \Rightarrow A_s \supset A_t \quad \text{und} \quad A_t = \bigcap_{s \leq t} A_s$$

- $F := \{f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}} \mid f$ oben halbstetig$\}$

2.2 Umbra

- Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ heißt die Menge

$$U(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid t \leq f(x)\}$$

der *Untergraph* (Umbra) von f.

- Es gelten folgende Zusammenhänge:

(i) $U(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid x \in A_t(f)\}$

(ii) $A_t(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid x \in U(f)\}$

(iii) $f(x) = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \{(x,t) \in U(f)\}$

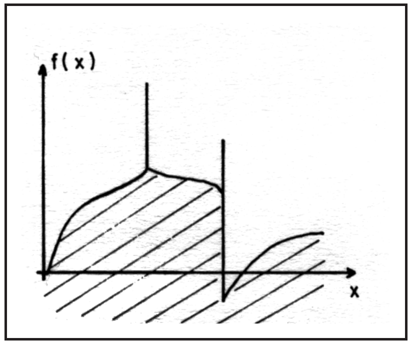

Abbildung 2: Umbra einer oben halbstetigen Funktion

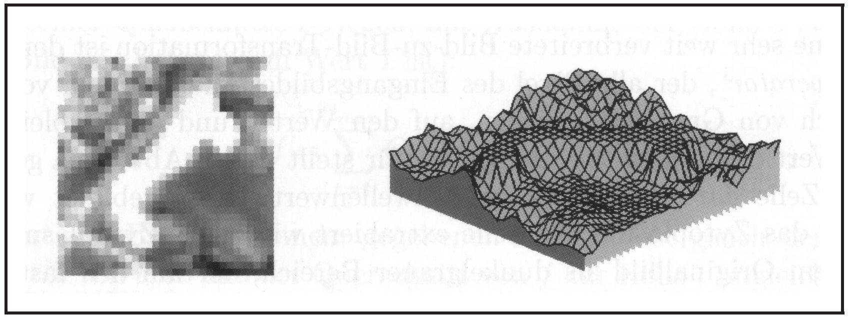

Abbildung 3: Funktion und Umbra

- Ist $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ oben halbstetig, so ist $U(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.
- Weiter gilt:
  - (i) $f \leq g \Rightarrow U(f) \subseteq U(g)$
  - (ii) $\inf\limits_{i \in I} \{f_i\} = \{f \mid U(f) = \cap_{i \in I} U(f_i)\}$
  - (iii) $\sup\limits_{i \in I} \{f_i\} = \{f \mid U(f) = \cup_{i \in I} \overline{U(f_i)}\}$

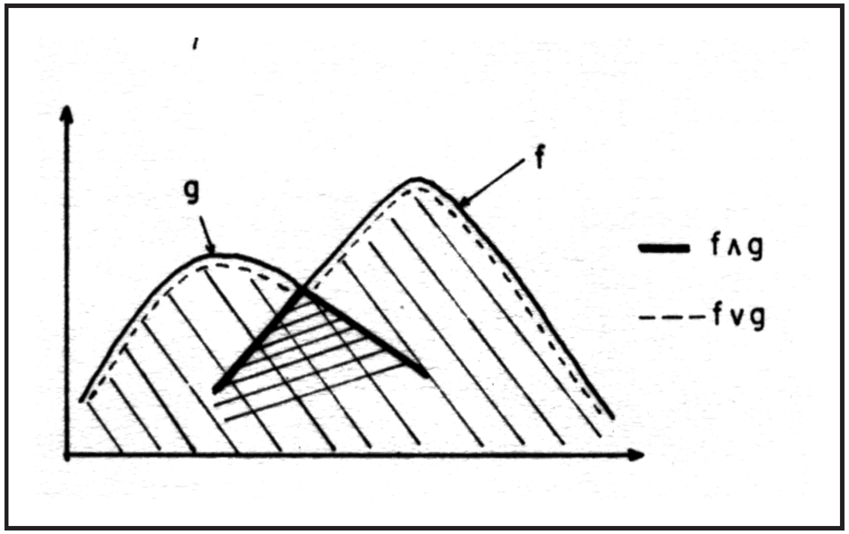

Abbildung 4: Supremum und Infimum zweier Funktionen

2.4 Definition

- Eine messbare Abbildung $X : \Omega \to F$ heißt *zufällige Funktion*.
- Eine zufällige Funktion $f \in F$ wird bestimmt durch die Familie der gemeinsamen Verteilungen

$$P\,(\sup_{x \in B_1} \{f(x)\} \leq \lambda_1, \ldots, \sup_{x \in B_n} \{f(x)\} \leq \lambda_n)$$

  für jede endliche Folge $B_1, \ldots, B_n$ von kompakten Trägern in $\mathbb{R}^2$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

2.5 Stetigkeitsmodulus

- Für eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ sei $\phi : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definiert durch

$$\phi(h) = \sup \{|g(x) - g(y)| \ : \ x, y \in \mathbb{R}^2, ||x - y|| \leq h\}$$

- Ist $g : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ gleichmäßig stetig, so heißt ϕ *Stetigkeitsmodulus* und es gilt:

$$\lim_{h \to 0} \phi(h) = 0.$$

2.6 ϕ-Stetigkeit

- Für einen Stetigkeitsmodulus ϕ heißt eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ ϕ-*stetig*, wenn

$$|f(x) - f(y)| \leq \phi(||x - y||) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

- $L_\phi = \{f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}} \mid f$ ist ϕ-stetig$\}$
- Eine messbare Abbildung $X : \Omega \to L_\phi$ heißt *zufällige* ϕ*-stetige Funktion*.

3 Beispiele

3.1 Boolesche zufällige Funktionen

- Ein stationärer Poisson'scher Punktprozess $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ auf $\mathbb{R}^2$ wird durch folgende zwei Eigenschaften definiert:

  (i) $N(B)$ ist poissonverteilt für jede beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

  (ii) $N(B_1), \ldots, N(B_n)$ sind unabhängige Zufallsvariablen für paarweise disjunkte $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ und $\forall k \in \mathbb{N}$,

  wobei $N(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_i \in B\}}$.

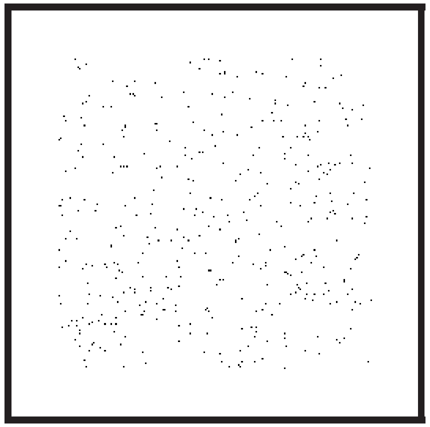

Abbildung 5: Poisson'scher Punktprozess

- Seien $f_i, i \in \mathbb{N}$ unabhänginge Kopien der zufälligen Funktion $f \in F$ mit fast sicher kompaktem Träger.
- $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ sei ein Poisson'scher Punktprozesses im $\mathbb{R}^2$.
- Die durch

$$g(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{f_i(x - X_i)\}$$

definierte Funktion heißt *boolesche zufällige Funktion*.

3.2 Poisson'sche zufällige Funktionen

Parametrisierung von Geraden im $\mathbb{R}^2$

- Jede Gerade im $\mathbb{R}^2$ besitzt eine Darstellung der Form:

  $$x_1 cos\, \alpha + x_2 sin\, \alpha = p$$

  für ein $p \in \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in (0, \pi)$,
  wobei p der Abstand der Geraden zum Ursprung und α der vom Lot auf die Gerade durch den Ursprung und der x_1-Achse eingeschlossene Winkel ist.

- Sei $Z = \{(p, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid p \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, \pi)\}$.
- Der durch einen Poisson'schen Prozess auf Z entstandene Geradenprozess heißt *Poisson'scher Geradenprozess*.

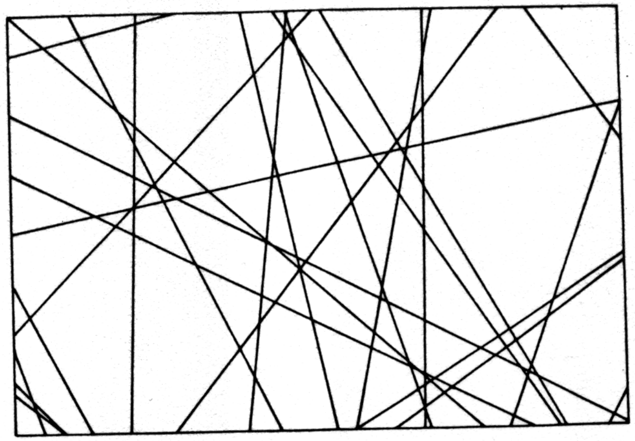

Abbildung 6: Poisson'scher Geradenprozess

- Seien $f_i, i \in \mathbb{N}$ unabhängige Kopien einer zufälligen Funktion $f \in F$ mit fast sicher kompaktem Träger.
- $\{D_i, i \in \mathbb{N}\}$ sei ein Poisson'scher Geradenprozess.
- Verschiebt man f_i um jeden Punkt auf der Geraden D_i, so wird durch

  $$g(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{ \sup_{y \in D_i} \{f_i(x-y)\}\}$$

  eine Poisson'sche zufällige Funktion definiert.

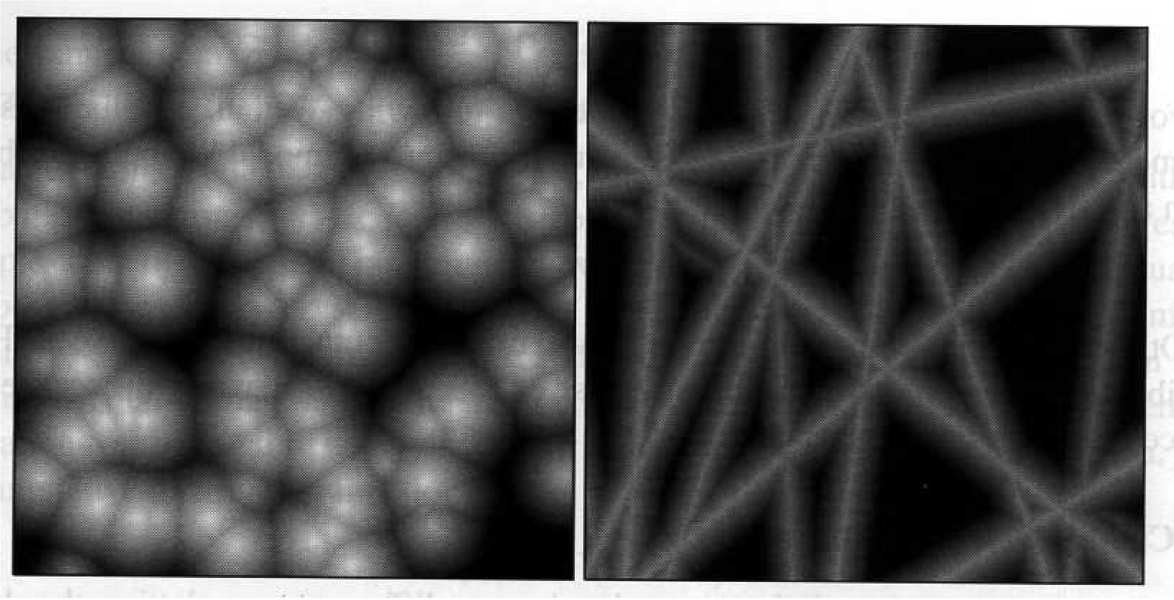

Abbildung 7: Boolesche und Poisson'sche zufällige Funktion