

Stochastische Risikotheorie

Vorlesungsskript

Jun.-Prof. Dr. Evgeny Spodarev



Universität Ulm

2005

Vorwort

Dieses Skript entstand aus einer Vorlesung über stochastische Risikotheorie, die ich in den Jahren 2002-2004 an der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm gehalten habe. Das Skript bietet eine Einführung in die stochastischen Modelle der Sachschadenversicherung. Da es sich hierbei um eine Einführungsvorlesung von begrenztem Umfang handelte, musste ich den Lehrstoff auf die notwendigen Grundlagen reduzieren. Deshalb ist die Auswahl der Themen eher klassisch und umfasst Wissensgebiete, die aus meiner Sicht für einen Aktuar unentbehrlich sind.

Die Entstehung des Skriptes wurde durch meine Kollegen aus der Abteilung Stochastik der Universität Ulm freundlich unterstützt. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Volker Schmidt und Herrn Dipl.-Math. oec. Hendrik Schmidt für zahlreiche Diskussionen und Vorschläge, die zur Verbesserung der Darstellung beigetragen haben. Außerdem möchte ich herzlich Frau Alisia Hornischer danken, die den größten Teil des Skriptes getippt und meine deutsche Sprache korrigiert hat.

Ulm, den 18.07.2005

Evgeny Spodarev

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
1.1	Schadenversicherungsmathematik und Risikotheorie	3
1.2	Historischer Überblick	4
1.3	Zentrale Begriffe der Risikotheorie	5
1.4	Fragestellungen der Risikotheorie	7
2	Schadenhöhen	11
2.1	Einleitung	11
2.2	Verteilungen mit schwerem Tail	12
2.2.1	Hazard-Funktionen	16
2.2.2	Eigenschaften von Verteilungen mit schwerem Tail	18
2.3	Parametrische Familien von absolut stetigen Verteilungen	20
2.3.1	Verteilungen mit leichtem Tail	20
2.3.2	Verteilungen mit schwerem Tail	22
2.4	Empirische Methoden zur Erkennung von Verteilungen mit schwerem Tail	24
2.4.1	Quantil-Grafiken	26
2.4.2	Mittlere Rest-Hazard-Funktion	29
3	Schadenanzahl	35
3.1	Zählprozesse	35
3.2	Poisson-Prozess	37
3.3	Gemischter Poisson-Prozess	40
3.4	Markovsche Prozesse	52
3.5	Weitere Schadenanzahlverteilungen	71
4	Gesamtschaden	75
4.1	Gesamtschadenprozess	75
4.2	Individuelles und kollektives Modell	76
4.3	Zusammengesetzte Verteilungen	79
4.3.1	Elementare Eigenschaften	80
4.3.2	Beispiele	83
4.3.3	Anwendungen	84

4.3.4	Vergleich zusammengesetzter Verteilungen	87
4.3.5	Die größeren Schäden eines Portfolios	96
4.4	Rekursive Berechnungsmethoden	100
4.4.1	Individuelles Modell: Algorithmus von De Pril	102
4.4.2	Kollektives Modell: Algorithmus von Panjer	105
4.4.3	Stetige Version des Algorithmus von Panjer	114
4.5	Approximationen durch das kollektive Modell	119
5	Simulation	127
5.1	Simulation der Schadenhöhen	127
5.1.1	Pseudozufallszahlen	128
5.1.2	Umkehrmethode	129
5.1.3	Akzeptanz- und Verwerfungsmethode	130
5.2	Simulation der Schadenanzahl	139
5.3	Simulation des Gesamtschadens	141
6	Prämienkalkulation	143
6.1	Einleitung	143
6.2	Eigenschaften von Prämienkalkulationsprinzipien	144
6.3	Praxisnahe Prämienkalkulationsprinzipien	145
6.4	Nutzenfunktion	151
6.5	Theoretische Kalkulationsprinzipien	155
6.5.1	Das Null-Nutzen-Prinzip P8	155
6.5.2	Mittelwert-Prinzip P10	160
6.5.3	Das Exponential-Prinzip P9	161
6.5.4	Prinzip der Schweizer Prämie P11	165
6.5.5	Das Verlustfunktionen-Prinzip P12	166
6.6	Bonus-Malus-Prämienkalkulationsprinzip	167
7	Schadenreservierung	177
7.1	Rückstellungen	177
7.2	Das Abwicklungsdreieck	178
7.3	Schätzung der erwarteten Schäden: ein verteilungsfreies Ver- fahren	181
7.4	Das Chain-Ladder-Verfahren	183
8	Rückversicherung	187
8.1	Formen der Risikoteilung	187
8.1.1	Risikoteilung „Versicherungsnehmer – Versicherer“	188
8.1.2	Risikoteilung „Erstversicherer – Rückversicherer“	189
8.2	Bedarf für Risikoteilung	191
8.2.1	Erhaltung der Ruinwahrscheinlichkeiten	191
8.2.2	Die Stabilität des Portfolios	192
8.3	Eigenschaften der Risikoteilung	193

8.3.1	Proportionale Verträge	193
8.3.2	Nichtproportionale Verträge	194
8.3.3	Der Entlastungseffekt	202
8.4	Prämienkalkulation bei Risikoteilung	203
8.4.1	Das Exposure-Verfahren	203
8.4.2	Burning-Cost-Verfahren (Erfahrungstarifizierung)	204
8.4.3	Lokale und globale Rückversicherung	206
9	Ruinwahrscheinlichkeiten	213
9.1	Risikoprozesse	213
9.1.1	Zeitdiskrete Risikoprozesse	213
9.1.2	Zeitstetige Risikoprozesse	218
9.2	Ruinwahrscheinlichkeiten im zusammengesetzten Poisson-Modell	221
9.2.1	Integral- und Differentialgleichungen	221
	Literatur	224
	Index	227

Kapitel 1

Einführung

In der vorliegenden Arbeit werden Verfahren zur stochastischen Modellierung der Schadenversicherung behandelt. Dabei wird der Fokus auf die mathematischen Methoden der *Sachschadenversicherung*, bzw. allgemeiner formuliert, der *Nichtleben-Versicherung* gerichtet sein, für die im Gegensatz zur Lebensversicherung weitaus komplexere, stochastische Modelle benötigt werden. Im Einführungskapitel werden die zentralen Begrifflichkeiten und Fragestellungen der *Risikothorie* dargelegt und veranschaulicht.

1.1 Schadenversicherungsmathematik und Risikothorie

In der *Schadenversicherungsmathematik* werden Modelle und Methoden zur quantitativen Beschreibung von Nichtleben-Versicherungen beleuchtet, bei denen der Zeitpunkt des Eintretens eines Versicherungsfalls und die Höhe der Versicherungsleistung zufällige Faktoren darstellen. Folglich können während der Vertragslaufzeit eine zufällige Anzahl an Ereignissen, die einen oder mehrere Schäden nach sich ziehen können, in Erscheinung treten. Um diese komplizierten Sachverhalte zu veranschaulichen, bedient sich die *Risikothorie* Methoden aus der angewandten Stochastik, der Statistik und der Numerik. Diese finden in der Risikothorie ihre Anwendung, indem *Risiken* eines Versicherungsunternehmens in Form von Zufallsvariablen modelliert und deren Eigenschaften näher untersucht werden.

Der Begriff des *Risikos* definiert sich als die Unsicherheit über die Ergebnisse wirtschaftlichen Agierens. Typische Beispiele für Risiken sind

- Sachschäden (z.B. Naturkatastrophen, Seuchen, Terroranschlägen, usw.)
- Vermögensrisiken (z.B. Zinsänderungen, Währungsrisiken)

- Neue gesetzliche Regelungen (z.B. Besteuerung, Änderung des Sicherheitskapitals, usw.)
- Inflation
- Konjunkturelle Schwankungen

In der Versicherungsmathematik wird das sogenannte *versicherungstechnische Risiko*, unter dem die gesamte Palette an *Zufallsrisiken*, *Schätzrisiken* (alternativ auch *Diagnose-* oder *Irrtumsrisiken*) und *Änderungsrisiken* (bzw. *Prognoserisiken*) zu verstehen ist, analysiert. Beispielhaft kann für ein Schätzrisiko die Wahl der nicht korrekten Schadenverteilung angeführt werden. Aufgrund dieser Beobachtung wird für dieses Risiko manchmal auch der Begriff des *Modellrisikos* verwendet. Für ein Änderungsrisiko können wir als Beispiel Umgestaltungen der gesetzlichen Rahmenbedingungen am Versicherungsmarkt aufzählen.

Die Risikotheorie dagegen befasst sich ausschließlich mit dem Zufallsrisiko, d. h. mit der zufälligen Komponente des versicherungstechnischen Risikos. Dieses Risiko stellt eine Verbindung zu den statistischen Schwankungen des Marktes dar.

1.2 Historischer Überblick

Die Ursprünge der Versicherungsmathematik finden sich in der Lebensversicherung im Mittelalter. Eine sehr frühe Form der Lebensversicherung war die sogenannte *Annuitäten-Versicherung*, bei der ein Bürger mit einem Versicherungsmakler einen Versicherungsvertrag abschloss. Im Todesfall des Versicherten trat der Versicherungsschutz in Kraft, der aus der Ausbezahlung einer im Versicherungsvertrag festgelegten Versicherungssumme an die Hinterbliebenen bestand. Der Versicherte musste diese Summe in kleinen, jährlich zu leistenden Raten (sog. *Annuitäten*) aufbringen. Um den Umfang einer Annuität berechnen zu können, begann man mit der Einführung von *Sterbetafeln*. In einer Sterbetafel werden empirische, prozentuale Angaben über den Anteil der Bevölkerung im Alter a , die auch das Alter $b > a$ überlebt, aufgeführt, wobei vorauszusetzen ist, dass a und b verschieden sind. Wenn man dies in der heutigen mathematischen Scheibweise darstellen möchte, so betrachtet man die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq b \mid X > a)$, wobei sich X die Lebensdauer des Versicherten bezieht. Die ersten uns bekannten Sterbetafeln wurden von J. Graunt (1662) und E. Halley (1693) zusammengestellt.

Bis ins 20. Jahrhundert blieben die Methoden der Versicherungsmathematik im Wesentlichen unberührt. Eine Weiterentwicklung dieser Methoden und vor allem die Entstehung der Sachschadenversicherungsmathematik ist auf Arbeiten der Mathematiker H. Cramér, C. Segerdahl und F. Lundberg aus den 1930–50er Jahren zurückzuführen. Ihnen verdanken wir das *kollektive Modell* (vgl. Kapitel 4) der Risikotheorie, mit dem sie den Grundstein

für die Sachschadenversicherungsmathematik gelegt haben. Seitdem hat sich die Risikothorie zu einem modernen mathematischen Gebiet gewandelt, in dem Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastischer Prozesse ihre Anwendung finden.

1.3 Zentrale Begriffe der Risikothorie

Um uns mit der Vorgehensweise in der Risikothorie vertraut zu machen, werden wir uns hier zuerst den Begriff des Portfolios näher betrachten. Die Aufteilung von Versicherungspolicen innerhalb einer Versicherungssparte durch das Versicherungsunternehmen findet in sogenannten *Portfolios* (oder *Portefeuilles*) statt. In einem Portfolio werden fast Risiken mit vergleichbaren Eigenschaften (wie z.B. Wert, Deckungssumme, geografische Lage, Schadentyp) zusammengefasst, vgl. Abbildung 1.3.1. Im Folgenden wer-

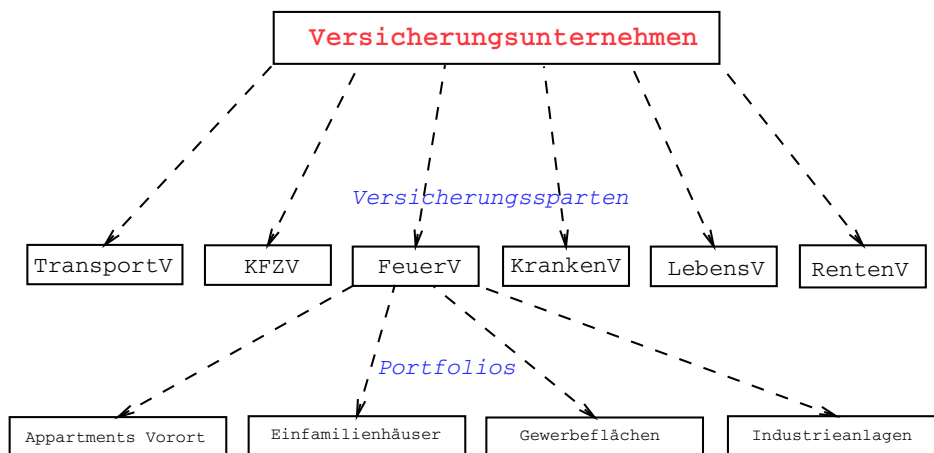


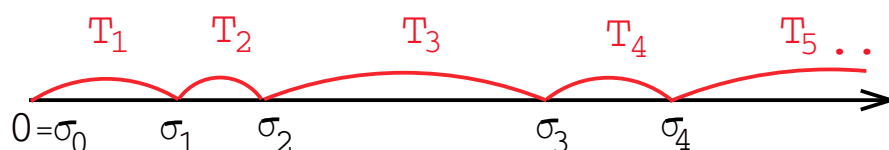
Abbildung 1.3.1: Risikoprofil eines Versicherungsunternehmens

den wir uns auf die Betrachtung von *homogenen* Portfolios, bei denen alle Policen eine ähnliche Risikostruktur aufweisen, beschränken. Dies bedeutet, dass alle Versicherungswerte und die daraus resultierenden Schäden von vergleichbarer Höhe sind und dass die Frequenzen der Zeitpunkte, an denen Schäden auftreten, bei allen Policen ähnlich sind.

Auf ein Portfolio wird sowohl von *deterministischen* als auch *stochastischen* Faktoren beeinflusst. Nachfolgend gehen wir auf elementare Begriffe und Kenngrößen der Risikothorie ein.

- **Deterministische Kenngrößen** werden durch die Rahmenbedingungen des Versicherungsgeschäfts vorgegeben. Diese sind zum Beispiel
 - die *Zeitspanne* t : Diese umfasst meist ein Geschäftsjahr ($t = 1$, bedingt durch die Buchhaltung von Versicherungsunternehmen)

- das *Anfangskapital* $u > 0$: Es dient zur Deckung von Schäden in der Anfangsphase des Geschäfts und garantiert die Solvabilität des Unternehmens beim Auftreten von Großschäden. Der Mindestumfang von u wird durch Vorschriften der entsprechenden Aufsichtsbehörde festgelegt.
- die *Prämieneinnahmen* $\Pi(t)$ bis zum Zeitpunkt $t > 0$: Ihre Berechnung erfolgt mit Hilfe stochastischer Modelle aus der Risikotheorie; vgl. Kapitel 6.
- **Stochastische Kenngrößen** unterliegen dem Zufall und werden durch *Zufallsvariablen* modelliert. Zu diesen gehören
 - die *Schadenzeitpunkte* σ_i , $i \in \mathbb{N}$, für die gilt:
 $0 = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_n \leq \dots$ und
 - die *Schadenhöhen* U_i , $i \in \mathbb{N}$: vgl. Kapitel 2
- **Weitere Kenngrößen** können aus den oben angegebenen, elementaren Kenngrößen abgeleitet werden. Es sind
 - die *Zwischenankunftszeiten* $T_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$: T_i bezeichnet die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Schadenmeldungen, vgl. Abbildung 1.3.2.

Abbildung 1.3.2: Schadenzeitpunkte σ_i und Zeitintervalle T_i

- die *Schadenanzahl* $N(t)$ bis zum Zeitpunkt t :

$$N(t) = \sup\{n \in \mathbb{Z}_+ : \sigma_n \leq t\},$$

wobei $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es gilt $\{N(t) = k\} = \{\sigma_k \leq t < \sigma_{k+1}\}$.

- der *Gesamtschaden* $X(t)$ bis zum Zeitpunkt t :

$$X(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} U_i, & N(t) > 0, \\ 0, & N(t) = 0. \end{cases}$$

- die *Risikoreserve* $R(t)$ zum Zeitpunkt t : Sie setzt sich aus den Mitteln zusammen, die dem Versicherungsunternehmen zur Deckung der Schäden zum Zeitpunkt t zur Verfügung stehen. Es gilt

$$R(t) = u + \Pi(t) - X(t), \quad t \geq 0.$$

Abbildung 1.3.3 liefert uns die Grafik einer Realisierung von $R(t)$.

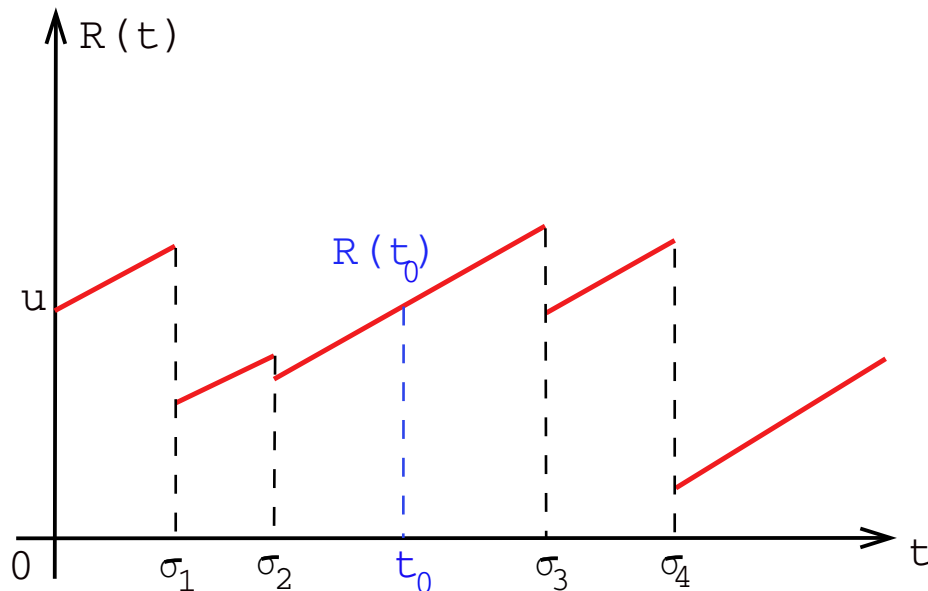


Abbildung 1.3.3: Risikoreserve $R(t)$

Die Schadenanzahl $N(t)$, der Gesamtschaden $X(t)$ und die Risikoreserve $R(t)$ sind zufällige Funktionen des Zeitparameters t . Sie werden mit Hilfe geeigneter stochastischer Prozesse modelliert; vgl. Kapitel 3 und 4.

1.4 Fragestellungen der Risikotheorie

Durch die oben definierten Kenngrößen erhalten die folgenden Fragestellungen eine zentrale Bedeutung:

- Wie kann man die Modellierung der Schadenhöhen U_i erhalten? Wie definiert man gefährliche Risiken, die Großschäden verursachen können? In Kapitel 2 spielt die Einführung unterschiedlicher Klassen parametrischer Verteilungen von Risiken und die Untersuchung deren Eigenschaften eine wichtige Rolle. Insbesondere werden der Zusammenhang zwischen gefährlichen Risiken und der Klasse der Verteilungen mit schweren Tails näher beleuchtet und ausführlich dargestellt werden. Zusätzlich gehen wir auf Methoden zur statistischen Erkennung von gefährlichen Risiken ein.

- Welche Modellansätze gibt es für die Schadenanzahl $N(t)$? Um diese Frage beantworten zu können, werden in Kapitel 3 spezielle Zählprozesse, wie etwa der Poisson-Prozess, betrachtet. Neben den letztgenannten Poisson-Prozessen, werden wir uns eingehend der Bedeutung der Markovschen Prozessen widmen, die als eine Grundlage für den Aufbau der Bonus-Malus-Prämienkalkulationsprinzipien dienen.
- Welche Verteilung besitzt der Prozess des Gesamtschadens $X(t)$ und wie können dessen Momente hergeleitet und berechnet werden? Die Antwort auf diese Frage, die vor allem für die Prämienkalkulation von großer Bedeutung ist, wird in Kapitel 4 gegeben. Hierbei werden u.a. effiziente Berechnungsalgorithmen von Panjer und De Pril von großer Bedeutung sein.
- In der Praxis besitzen versicherungstechnische Modelle oft eine enorme Komplexität, so dass sie mit mathematischen Methoden nicht explizit (d.h. mit Hilfe von einfachen Formeln) beschrieben werden können. Um die charakteristischen Kenngrößen des Versicherungsbestandes (wie etwa die Verteilung des Gesamtschadens, die Verteilung der Prämienhöhen, usw.) trotz dieses Hindernisses berechnen zu können, werden die versicherungstechnischen Abläufe auf dem Rechner simuliert. Die Ergebnisse dieser Simulation können anschließend zur Prognose der Höhe des Gesamtschadens und der Prämien im nächsten Geschäftsjahr herangezogen werden. Dazu werden wir in Kapitel 5 effiziente Computer-Algorithmen betrachten.
- Wie sollten die Prämien $\pi(t)$ kalkuliert werden, um die Solvenz des Portfolios zu gewährleisten? In Kapitel 6 beschäftigen wir uns eingehend mit unterschiedlichen Prämienkalkulationsprinzipien, die sowohl theoretischer als auch praktischer Natur sein werden.
- Wie kann die Bildung von Kapitalreserven aussehen, um die Deckung von Schäden, die sich erst später manifestieren, zu ermöglichen? Die Bildung von ausreichenden Rückstellungen bei langwieriger Schadensabwicklung wird in Kapitel 7 behandelt.
- Welche risikopolitischen Maßnahmen sind von Nöten, um die Kapazitäten des Versicherungsunternehmens zu erhöhen? Zu den verbreitetsten Lösungen zählt ohne Zweifel die Risikoteilung (zu der z.B. die Rückversicherung gehört), deren Formen und Eigenschaften in Kapitel 8 diskutiert werden.
- Ein *technischer Ruin* eines Portfolios liegt dann vor, wenn die Risikoreserve $R(t)$ zum ersten Mal negativ wird. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $\psi(u) = P(\exists t > 0 : R(t) < 0)$ wird *Ruinwahrscheinlichkeit* genannt, wobei wir mit u das gegebene Startkapital bezeichnen.

Eine interessante Problemstellung der Risikothorie besteht in der Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit eines Portfolios oder, wenn dies nicht möglich ist, in der Angabe einer ausreichend präzisen, oberen Schranke für $\psi(u)$. Dies wird die Hauptaufgabe des Kapitels 9 sein. Für den technischen Ruin eines Portfolios kann man notwendige und hinreichende Bedingungen formulieren, wobei wir uns eines einfachen zusammengesetzten Poisson-Modells behelfen werden.

Kapitel 2

Schadenhöhen

2.1 Einleitung

Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P ein *vollständiges Wahrscheinlichkeitsmaß* ist. Dies bedeutet, dass aus $P(A) = 0$, $A \in \mathfrak{F}$ die Eigenschaft $B \in \mathfrak{F}$ für alle $B \subset A$ folgt. Definition 2.1.1 präzisiert den bereits in Kapitel 1 heuristisch eingeführten Begriff des Risikos.

Definition 2.1.1. *Unter einem Risiko versteht man eine nicht negative Zufallsvariable U , d.h., eine \mathfrak{F} -messbare Abbildung $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, wobei \mathbb{R}_+ die Menge der nicht negativen reellen Zahlen ist.*

Somit sind die Schadenhöhen $\{U_i\}$ eines Portfolios eine Folge von Risiken. Meistens werden wir voraussetzen, dass U_i unabhängige, identisch verteilte (*i.i.d.*) Risiken mit Verteilungsfunktion

$$F_U(x) = P(U_i \leq x)$$

sind. Sei $\bar{F}_U(x) = P(U_i > x) = 1 - F_U(x)$ die *Tail-Funktion* der Verteilung von U_i . Man unterscheidet *gefährliche* und *gutartige* Risiken.

Definition 2.1.2. *Ein Risiko U heißt gutartig, falls die Tail-Funktion der Verteilung von U eine exponentielle Schranke besitzt:*

$$\bar{F}_U(x) \leq c e^{-ax}, \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (2.1.1)$$

für gewisse Konstanten $a, c > 0$.

Bei einem gutartigen Risiko geht die Tail-Funktion $\bar{F}_U(x)$ exponentiell schnell gegen null für $x \rightarrow \infty$.

Definition 2.1.3. *Falls die Tail-Funktion des Risikos keine obere exponentielle Schranke hat, spricht man von einem gefährlichen Risiko.*

Solche Risiken sind besonders gut für die Modellierung von Großschäden geeignet.

Beispiel 2.1.1.

- Ein exponential-verteiltes Risiko U mit $\bar{F}_U(x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, $x \geq 0$ ist offensichtlich gutartig.
- Sei $U \sim \text{Par}(\alpha, c)$ Pareto-verteilt mit Parametern $\alpha, c > 0$, d.h.,

$$F_U(x) = \begin{cases} 1 - (c/x)^\alpha, & x \geq c, \\ 0, & x < c. \end{cases}$$

Dieses gefährliches Risiko wird oft in der Feuerversicherung verwendet, um große Feuerschäden zu modellieren.

- Lognormal-verteilte Risiken $U \stackrel{d}{=} e^V$, $V \sim N(\mu, \sigma^2)$ werden hauptsächlich in der Kraftfahrzeugversicherung betrachtet und sind auch ein Beispiel für gefährliche Risiken.

Übungsaufgabe 2.1.1. Zeigen Sie, dass für die Tail-Funktion einer Lognormal-Verteilung gilt:

$$\bar{F}_U(x) \leq c/x^\beta$$

für gewisse $c, \beta > 0$.

Die Modellierung von Großschäden ist für die Versicherungspraxis von großer Bedeutung. Großschäden treten zwar selten auf, dafür bilden sie den Hauptanteil der Schäden im Gesamtschaden. Unter Umständen können sie auch zum Bankrott des Versicherungsunternehmens führen, falls ihre Höhe bei der Berechnung von Rückstellungen und Prämien nicht ausreichend berücksichtigt wurde. Betrachten wir folgendes Beispiel einer Feuerversicherung von Stahlwerken (vgl. [16], S. 87–88). Tabellen 2.1.1 und 2.1.2 zeigen, dass 12,4% der Schäden 87% der Gesamtschadenhöhe ausmachen. Deshalb ist es sehr wichtig, die Verteilung von Großschäden modellieren zu können. Dafür eignen sich Verteilungen von gefährlichen Risiken sehr gut. Sie werden manchmal auch *Verteilungen mit schwerem Tail* genannt.

2.2 Verteilungen mit schwerem Tail

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Definition 2.2.1. Die Funktion

$$\hat{m}_X(s) = \hat{m}_{F_X}(s) \stackrel{\text{def}}{=} E e^{sX} = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} dF_X(x),$$

definiert für alle $s \in \mathbb{R}$, für die $\hat{m}_X(s) < \infty$, heißt *momenterzeugende Funktion*.

Untere Grenze des Schadens g_i (in 1000 DM)	Anzahl der Schäden N_i	Mittlere Schadenhöhe M_i (in 1000 DM)	Schadendichte $N_i/(g_{i+1} - g_i)$
0	305	0,23	610
0,5	259	0,74	518
1	374	1,47	374
2	264	2,47	264
3	199	3,49	199
4	163	4,51	163
5	125	5,54	125
6	178	7,01	89
8	139	9,04	69,5
10	98	11,0	49
12	112	13,5	37,3
15	111	17,6	22,2
20	141	25,0	14,1
30	147	39,0	7,35
50	152	71,1	3,04
100	93	136	0,93
200	64	310	0,213
500	20	705	0,04
1000	13	2346	0,00325
5000	4	8317	
Insgesamt	2961		
Mittel		47,6	

Tabelle 2.1.1: Schadenhöhenverteilung der Feuerversicherung

Schäden über (in 1000 DM)	Anteil an der Gesamtschadenzahl (in %)	Anteil am Gesamtschaden (in %)
6500	0,1	19
750	1,1	50
48 (Mittelwert)	12,4	87

Tabelle 2.1.2: Bedeutung von Großschäden (Übersichtstabelle zu Tabelle 2.1.1)

Für Risiken $X \geq 0$ betrachtet man oft auch die sogenannte *Laplace–Stieltjes–Transformierte*

$$\widehat{l}_X(z) = \widehat{l}_{F_X}(z) \stackrel{\text{def}}{=} E e^{-zX} = \int_{\mathbb{R}} e^{-zx} dF_X(x), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Es gilt $\widehat{m}_X(s) = \widehat{l}_X(-s)$ für $s < 0$. Außerdem kann gezeigt werden, dass, falls $E|X|^n < \infty$ und $\widehat{m}_X(s)$ und $\widehat{l}_X(s)$ in einer Umgebung $\{s \in \mathbb{R} : |s| < s_0\}$ um den Ursprung existieren, dann existieren auch die n -ten Ableitungen $\widehat{m}_X^{(n)}(0)$ und $\widehat{l}_X^{(n)}(0)$, mit der Eigenschaft

$$E X^n = \widehat{m}_X^{(n)}(0) = (-1)^n \widehat{l}_X^{(n)}(0).$$

Diese Formel erklärt den Namen „*momenterzeugende Funktion*“.

Betrachten wir das Intervall (s_X^-, s_X^+) , auf dem \widehat{m}_X existiert. Seine Grenzen $s_X^- \leq 0 \leq s_X^+$ sind gegeben durch

$$s_X^- = \inf\{s \leq 0 : \widehat{m}_X(s) < \infty\}, \quad s_X^+ = \sup\{s \geq 0 : \widehat{m}_X(s) < \infty\}.$$

Es wird weiterhin angenommen, dass ein $s_0 \neq 0$ existiert, so dass $\widehat{m}_X(s_0) < \infty$. Dies bedeutet, dass $s_X^- \neq 0$ oder $s_X^+ \neq 0$.

Übungsaufgabe 2.2.1. Sei X ein Risiko. Zeigen Sie, dass $\widehat{m}_X(s)$ wohldefiniert auf $(-\infty, s_X^+)$ (d.h. $s_X^- = -\infty$), stetig und monoton wachsend ist, und dass $\widehat{m}_X(0) = 1$.

Definition 2.2.2. Sei X ein Risiko mit Verteilungsfunktion F_X . Man sagt, dass F_X (oder X) einen schweren Tail hat, falls $\widehat{m}_X(s) = \infty$ für alle $s > 0$ (d.h. $s_X^+ = 0$).

Wie oben bereits erwähnt wurde, haben gefährliche Risiken einen schweren Tail und umgekehrt. Dies soll aber noch bewiesen werden, indem die Äquivalenz der Definitionen 2.1.3 und 2.2.2 gezeigt wird.

Satz 2.2.1. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X .

1. Falls $\widehat{m}_X(s_0) < \infty$ für ein $s_0 > 0$, dann existiert $b > 0$, sodass die Ungleichung

$$\overline{F}_X(x) \leq b e^{-s_0 x}, \quad x \geq 0 \tag{2.2.1}$$

gilt. Umgekehrt, falls (2.2.1) gilt, dann ist $\widehat{m}_X(s) < \infty$ für alle $s \in [0, s_0]$.

2. Falls $\widehat{m}_X(s_0) < \infty$ für ein $s_0 < 0$, dann existiert $b > 0$, sodass die Ungleichung

$$F_X(x) \leq b e^{-s_0 x}, \quad x \leq 0 \tag{2.2.2}$$

gilt. Umgekehrt, falls (2.2.2) gilt, dann ist $\widehat{m}_X(s) < \infty$ für alle $s \in (s_0, 0]$.

Beweis. Finden wir zunächst eine günstige Darstellung von $\widehat{m}_X(s) - 1$.

$$\begin{aligned}
\widehat{m}_X(s) - 1 &= \int_{\mathbb{R}} (e^{sx} - 1) dF_X(x) = s \int_{\mathbb{R}} \int_0^x e^{sy} dy dF_X(x) \\
&= -s \int_{-\infty}^0 \int_x^0 e^{sy} dy dF_X(x) + s \int_0^{\infty} \int_0^x e^{sy} dy dF_X(x) \\
&= -s \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^y dF_X(x) e^{sy} dy + s \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} dF_X(x) e^{sy} dy \\
&= -s \int_{-\infty}^0 F_X(y) e^{sy} dy + s \int_0^{\infty} \overline{F}_X(y) e^{sy} dy, \quad (2.2.3)
\end{aligned}$$

wobei wir die Anordnung der Integration nach dem Satz von Fubini vertauscht haben. Jetzt können wir die 1. Aussage des Satzes beweisen.

„ \Rightarrow “ Falls (2.2.1) gilt, dann folgt daraus

$$\frac{\widehat{m}_X(s) - 1}{s} \stackrel{(2.2.3)}{\leq} \int_0^{\infty} \overline{F}_X(y) e^{sy} dy \stackrel{(2.2.1)}{\leq} b \int_0^{\infty} e^{-(s_0-s)y} dy = \frac{b}{s_0 - s} < \infty$$

für alle $0 \leq s < s_0$. Dies bedeutet, dass $\widehat{m}_X(s) < \infty$ für alle $s \in [0, s_0)$.

„ \Leftarrow “ Falls $\widehat{m}_X(s_0) < \infty$, dann gilt für alle $x \geq 0$, dass

$$\begin{aligned}
\infty &> \frac{\widehat{m}_X(s_0) - 1}{s_0} \stackrel{(2.2.3)}{\geq} - \int_{-\infty}^0 F_X(y) e^{s_0 y} dy + \int_0^x \overline{F}_X(y) e^{s_0 y} dy \\
&\geq - \int_{-\infty}^0 e^{s_0 y} dy + \overline{F}_X(x) \int_0^x e^{s_0 y} dy = -\frac{1}{s_0} + \overline{F}_X(x) \frac{e^{s_0 x} - 1}{s_0}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass $F_X(y) \leq 1$ und $\overline{F}_X(y) \geq \overline{F}_X(x)$ für $y \in [0, x)$. Dies wiederum bedeutet

$$\overline{F}_X(x) \leq e^{-s_0 x} s_0 \left(\frac{\widehat{m}_X(s_0) - 1}{s_0} + \frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_0} \overline{F}_X(x) \right) \leq b e^{-s_0 x}$$

für ein $0 \leq b < \infty$, weil $\overline{F}_X(x) \leq 1$ gilt. \square

Übungsaufgabe 2.2.2. *Beweisen Sie 2. Aussage des obigen Satzes.*

Aus Satz 2.2.1 geht hervor, dass die Tail-Funktion eines gefährlichen Risikos X für $x \rightarrow \infty$ langsamer als e^{-ax} gegen null geht. Dies muss aber

nicht $E X^n = \infty$ für alle n zur Folge haben. Auch umgekehrt bedeutet die Existenz aller Momente von X nicht, dass X einen leichten Tail hat. Als Gegenbeispiel sei die Lognormalverteilung genannt: $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ hat einen schweren Tail und es gilt $E X^n = e^{1/2(n^2\sigma^2 + \mu n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bevor wir weitere Eigenschaften von Verteilungen mit schweren Tails studieren sollen die Begriffe der *Hazard-Funktion* und *Hazard-Rate* eingeführt werden.

2.2.1 Hazard-Funktionen

Definition 2.2.3. Die Funktion $M(x) = -\log \bar{F}_X(x)$ heißt *Hazard-Funktion* von F_X .

Definition 2.2.4. Sei X ein Risiko.

- Falls X eine diskrete Verteilung $p_n = P(X = n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ besitzt, dann heißt

$$m(n) = P(X \leq n \mid X > n - 1) = P(X = n \mid X > n - 1) = \frac{p_n}{\sum_{k=n}^{\infty} p_k}$$

die *Hazard-Rate* von X .

- Falls X ein stetig verteiltes Risiko mit Dichte $f_X(x)$ ist, dann heißt

$$m(x) = M'(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)}$$

die *Hazard-Rate* von X .

Den Namen *Hazard-Rate* erklärt die Gleichung $M(x) = \int_0^x m(y) dy$. Erläutern wir an den Beispielen die inhaltliche Bedeutung von m .

- **Lebensversicherung:** Sei X die Lebensdauer (in Jahren) eines Versicherten. Dann ist $m(n) = P(X \leq n \mid X > n - 1)$ die *Sterbewahrscheinlichkeit* im Alter n unter der Bedingung, dass das Alter $n - 1$ erreicht wurde. Für stetig verteilte X gilt analog

$$\begin{aligned} m(x) \Delta x &= \frac{f_X(x) \Delta x}{\bar{F}_X(x)} \approx \frac{P(X \in (x, x + \Delta x])}{P(X > x)} \\ &= P(X \leq x + \Delta x \mid X > x) \end{aligned}$$

für kleine Δx . Daher wird m auch oft *Sterberate* genannt. Die Grafik einer typischen Sterberate-Funktion ist in Abbildung 2.2.1 angegeben.

Übungsaufgabe 2.2.3. *Beweisen Sie:*

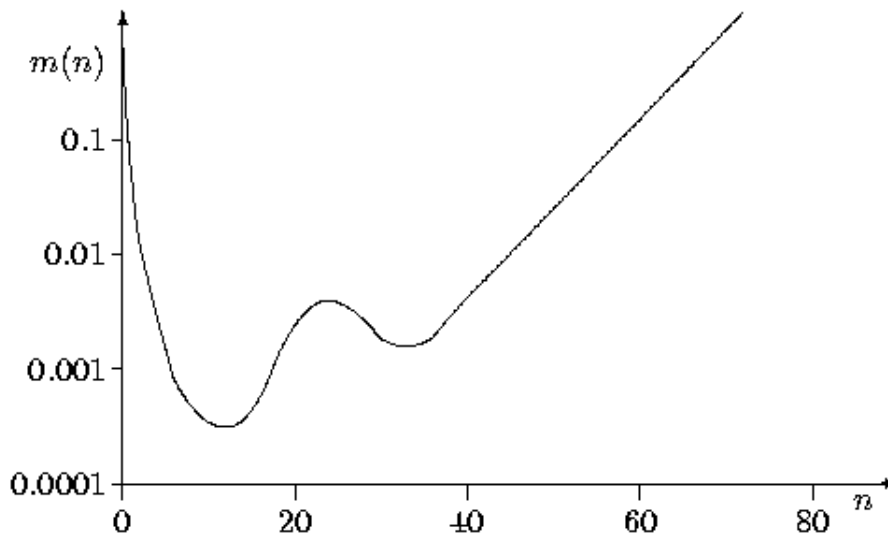


Abbildung 2.2.1: Sterberate. Quelle: [20]

- Falls $X \sim \text{Geo}(p)$ geometrisch verteilt ist mit Parameter p (d.h. $P(X = n) = (1 - p)p^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$), dann gilt $m(n) \equiv 1 - p$ für alle $n \in \mathbb{Z}_+$.
- Falls $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, dann gilt $m(x) \equiv \lambda$ für alle x .

Diese Eigenschaft der beiden Verteilungen ist als *Gedächtnislosigkeit* bekannt. Im Fall der geometrischen Verteilung ist $1 - p$ die Sterbe- und p die Überlebenswahrscheinlichkeit im Alter n . Beide sind von n unabhängig! Analog dazu ist im Falle der Exponentialverteilung das mittlere Alter eines Versicherten gleich $EX = \lambda^{-1}$. Beispielsweise hängt $m(x)\Delta x \approx P(X \leq x + \Delta x \mid X > x) = 1/70$ bei $EX = 70$ auch nicht von x ab. Mit anderen Worten, beide Verteilungen weisen keinen Alterungseffekt auf und sind in diesem Sinne gedächtnislos.

- **Feuerversicherung:** Falls X die Dauer des Feuers ist, so nennt man $m(x)$ *extinction rate*. Für kleine x ist die Wahrscheinlichkeit $m(x)\Delta x$, das Feuer unter Kontrolle zu haben, ziemlich groß. Mit wachsender Zeit x nimmt $m(x)$ sehr schnell ab.
- **Zuverlässigkeitstheorie:** Hier wird $m(x)$ oft als *Fehlerrate* eines Ersatzteils in einem komplexen technischen System interpretiert.

Von besonderem Interesse für die Versicherungsmathematik sind Verteilungen mit monotonen Hazard-Raten.

2.2.2 Eigenschaften von Verteilungen mit schwerem Tail

Um Kriterien für die Schwere des Tails einer Verteilung herleiten zu können, benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Satz 2.2.2. *Sei X ein Risiko mit Hazard-Funktion M .*

1. Falls $a_X^+ \stackrel{def}{=} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} > 0$, dann gilt $s_X^+ = a_X^+$.
2. Falls $a_X^- \stackrel{def}{=} \limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{M(x)}{x} < 0$, dann gilt $s_X^- = a_X^-$.

Beweis. Beweisen wir die Aussage 1 des Satzes. Es ist zu zeigen, dass $\hat{m}_X(s) < \infty$ für alle $0 \leq s < a_X^+$ und $\hat{m}_X(s) = \infty$ für $s > a_X^+$.

Für alle $\varepsilon > 0$ mit $a_X^+ - \varepsilon > 0$ existiert ein x_0 , so dass $\inf_{x \geq x_0} \frac{M(x)}{x} > a_X^+ - \varepsilon$.

Daraus folgt, dass $-\log \bar{F}_X(x) > (a_X^+ - \varepsilon)x$ für alle $x \geq x_0$. Äquivalent dazu schreibt man $\log \bar{F}_X(x) < -(a_X^+ - \varepsilon)x$ oder $\bar{F}_X(x) \leq e^{-(a_X^+ - \varepsilon)x}$ für alle $x \geq x_0$. Dann gilt

$$\bar{F}_X(x) \leq b e^{-(a_X^+ - \varepsilon)x}, \quad x \geq 0$$

mit $b = e^{(a_X^+ - \varepsilon)x_0}$, weil $b e^{-(a_X^+ - \varepsilon)x} \geq 1$ für $x \in [0, x_0]$. Aus Satz 2.2.1 folgt, dass $\hat{m}_X(a_X^+ - \varepsilon) < \infty$ für alle $0 < \varepsilon \leq a_X^+$. Dies bedeutet, dass $\hat{m}_X(s) < \infty$ für alle $0 \leq s < a_X^+$ gilt.

Ex adverso, nehmen wir an, dass $\hat{m}_X(s_0) < \infty$ für ein $s_0 > a_X^+$. Nach Satz 2.2.1 gilt $\bar{F}_X(x) \leq b e^{-s_0 x}$, $x \geq 0$. Daraus folgt $\log \bar{F}_X(x) \leq \log b - s_0 x$ oder

$$\frac{-\log \bar{F}_X(x)}{x} \geq \frac{-\log b}{x} + s_0.$$

Dies führt zum Widerspruch

$$a_X^+ = \liminf_{y \rightarrow \infty} \inf_{x \geq y} \frac{M(x)}{x} \geq s_0 > a_X^+.$$

□

Übungsaufgabe 2.2.4. *Beweisen Sie die 2. Aussage von Satz 2.2.2.*

Für ein Risiko X mit Verteilungsfunktion F_X führen wir die folgende Größe ein:

$$\alpha_X = \alpha_{F_X} \stackrel{def}{=} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x}.$$

Es gilt die offensichtliche Gleichung $0 \leq a_X^+ \leq \alpha_X$. Für $\alpha_X = 0$ soll daraus $a_X^+ = 0$ folgen. Nach der Logik des Satzes 2.2.2 wäre zu erwarten, dass auch $s_X^+ = 0$ und somit F_X einen schweren Tail hat.

Satz 2.2.3. *Sei X ein Risiko mit Verteilungsfunktion F_X . Falls $\alpha_{F_X} = 0$, dann hat F_X einen schweren Tail.*

Beweis. Falls $\alpha_{F_X} = 0$, dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ mit $a_X^+ - \varepsilon > 0$ ein x_0 , so dass $0 \leq \sup_{x \geq y} \frac{M(x)}{x} < \varepsilon$ für alle $y > x_0$. Daraus folgt, dass $\log \bar{F}_X(x) > -\varepsilon x$ oder $\bar{F}_X(x) > e^{-\varepsilon x}$ für alle $x > x_0$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{sx} \bar{F}_X(x) dx &= \int_0^{x_0} e^{sx} \bar{F}_X(x) dx + \int_{x_0}^{\infty} e^{sx} \bar{F}_X(x) dx \\ &\geq \int_{x_0}^{\infty} e^{sx} e^{-\varepsilon x} dx = \int_{x_0}^{\infty} e^{x(s-\varepsilon)} dx = \infty, \quad s > \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt

$$\int_0^{\infty} e^{sx} \bar{F}_X(x) dx = \infty, \quad s > 0. \quad (2.2.4)$$

Zeigen wir, dass daraus $\hat{m}_X(s) = \infty$ für $s > 0$ folgt.

Ex adverso, nehmen wir an, dass es ein $s_0 > 0$ mit der Eigenschaft $\hat{m}_X(s_0) < \infty$ existiert. Nach Satz 2.2.1 gilt $\bar{F}_X(x) \leq b e^{-s_0 x}$ für ein $b > 0$ und für alle $x \geq 0$. Daraus folgt, dass für alle $s < s_0$ gilt

$$\int_0^{\infty} e^{sx} \bar{F}_X(x) dx \leq b \int_0^{\infty} e^{sx} e^{-s_0 x} dx = b \int_0^{\infty} e^{-x(s_0-s)} dx < \infty,$$

was offensichtlich der Bedingung (2.2.4) widerspricht. \square

Folgerung 2.2.1. Falls X absolut stetig verteilt ist mit Dichte $f(x)$ und falls $\lim_{x \rightarrow \infty} M(x)/x$ existiert, dann gilt

- $\alpha_{F_X} = a_X^+ = \lim_{x \rightarrow \infty} m(x)$,
- F_X hat einen schweren Tail $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = 0$.

Beweis. Nach der Regel von l'Hospital gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} m(x).$$

Die Behauptungen folgen aus den Sätzen 2.2.2 und 2.2.3. \square

Folgerung 2.2.2. Falls F_X einen schweren Tail hat, dann gilt

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \bar{F}_X(x) = \infty, \quad s > 0.$$

Übungsaufgabe 2.2.5. Beweisen Sie Folgerung 2.2.2.

Folgerung 2.2.3.

1. Falls $\limsup_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \overline{F}_X(x) < \infty$ für ein $s > 0$, dann hat F_X einen leichten Tail.
2. Falls das Risiko X absolut stetig verteilt ist mit Dichte f_X und falls $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} f_X(x) < \infty$ für ein $s > 0$ gilt, dann hat F_X einen leichten Tail.

Beweis. Aussage 1 folgt direkt aus der Folgerung 2.2.2.

Um Aussage 2 zu beweisen, wenden wir die Regel von l'Hospital an:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} \overline{F}_X(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{e^{-sx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-f_X(x)}{-s e^{-sx}} = s^{-1} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{sx} f_X(x) < \infty.$$

Die Behauptung folgt aus der Aussage 1. \square

2.3 Parametrische Familien von absolut stetigen Verteilungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die wichtigsten absolut stetigen Verteilungen, die in der Versicherungsmathematik Anwendung finden. Sei $f(x)$ die Dichte der Verteilung eines Risikos X .

2.3.1 Verteilungen mit leichtem Tail

1. Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Damit kann ein Risiko aber nur bedingt modelliert werden, weil eine normalverteilte Zufallsvariable auch negative Werte annimmt. Die Normalverteilung dient oft als Basis zum Aufbau von komplizierteren Verteilungen (z.B. der Lognormalverteilung) für Risiken.

2. Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Sie findet insbesondere Anwendung in der Feuerversicherung, oft auch als Mischung zweier Exponentialverteilungen. Die Dichte dieser Mischung ist gegeben durch

$$f(x) = \left(p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \right) \mathbf{1}(x \geq 0)$$

für ein $0 < p < 1$ und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

3. *Erlang-Verteilung* $Erl(n, \lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$

$X \sim Erl(n, \lambda) \Leftrightarrow X \stackrel{d}{=} U_1 + \dots + U_n$, wobei $U_i \sim Exp(\lambda)$ uiv Risiken sind. Die Dichte der Erlang-Verteilung ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Diese Verteilung kann als Verteilung des Gesamtschadens bei n exponentialverteilten Einzelschäden interpretiert werden.

4. χ^2 -Verteilung $\chi^2(n)$, $n \in \mathbb{N}$

$X \sim \chi^2(n) \Leftrightarrow X \stackrel{d}{=} U_1^2 + \dots + U_n^2$, wobei $U_i \sim N(0, 1)$ uiv Zufallsvariablen sind. Die entsprechende Dichte ist gleich

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-x/2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

wobei $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ für $z \in \mathbb{C}$: $Re z > 0$. Es gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$

5. *Gamma-Verteilung* $\Gamma(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$ mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

wobei a der *Form-* und λ der *Maßstab-*Parameter sind. Diese parametrische Familie von Verteilungen enthält die Verteilungen 2–4 als Spezialfälle:

$$Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda), \quad Erl(n, \lambda) = \Gamma(n, \lambda), \quad \chi^2(n) = \Gamma(n/2, 1/2).$$

Gamma-Verteilungen haben einen relativ leichten Tail und werden deshalb in den Versicherungssparten eingesetzt, bei denen keine Großschäden zu erwarten sind (z.B. in der Vollkasko-Kraftfahrzeugversicherung).

6. *Beta-Verteilung* $Beta(a, b, \eta)$, $a, b, \eta > 0$ mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}(\eta-x)^{b-1}}{B(a,b)\eta^{a+b-1}}, & x \in (0, \eta) \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$ die *Beta-Funktion* mit der Eigenschaft $B(a, b) = B(b, a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ ist. Offensichtlich entspricht $B(1, 1, \eta)$ der Gleichverteilung auf $[0, \eta]$.

7. *Inverse Gaußsche Verteilung* $IG(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}\beta} x^{-3/2} e^{-\frac{(\alpha-\beta x)^2}{2\beta x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

wobei α der *Form*- und β der *Maßstab*-Parameter sind. Aus Formel (2.3.1) für die momenterzeugende Funktion von $IG(\alpha, \beta)$ wird ersichtlich, dass aus $X \sim IG(\alpha, \beta)$ die Relation $\beta X \sim IG(\alpha, 1)$ folgt. Man kann zeigen, dass für $x \geq 0$ die entsprechende Verteilungsfunktion gleich

$$F_X(x) = F_{N(0,1)}\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\beta x}} + \sqrt{\beta x}\right) + e^{2\alpha} F_{N(0,1)}\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\beta x}} - \sqrt{\beta x}\right)$$

ist. Die momenterzeugende Funktion ist gegeben durch

$$\hat{m}_X(s) = \begin{cases} e^{\alpha(1-\sqrt{1-2s/\beta})}, & s \leq \beta/2, \\ \infty, & s > \beta/2. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Daraus folgt, dass $EX = \alpha/\beta$ und $Var X = \alpha/\beta^2$. Die IG-Verteilung ist *faltungsstabil*, d.h. für unabhängige Risiken $X_1 \sim IG(\alpha_1, \beta)$ und $X_2 \sim IG(\alpha_2, \beta)$ gilt $X_1 + X_2 \sim IG(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$. Die inverse Gaußsche Verteilung hat ihren Namen der Tatsache zu verdanken, dass ihre kumulanterzeugende Funktion $\log \hat{m}_X(s)$ in einem gewissen „inversen“ Verhältnis zu der kumulanterzeugenden Funktion einer Normalverteilung steht (siehe [14], S. 64,193,302). Im Fall $\alpha = \beta$ wird $IG(\alpha, \alpha)$ auch *Wald-Verteilung* genannt. Es gilt dann $EX = 1$ für alle α .

Übungsaufgabe 2.3.1. *Beweisen Sie, dass die Verteilungen 1 – 7 einen leichten Tail besitzen.*

Bemerkung 2.3.1. *Die Normal-, Gamma- und inverse Gaußsche Verteilung gehören zu einer größeren parametrischen Klasse von Verteilungen, der sogenannten exponentiellen Dispersionsverteilungen (vgl. [14], S. 190–193). Diese Klasse wird durch die Form der Dichte*

$$f(x) = e^{\frac{\theta x - b(\theta)}{\psi} + c(x, \psi)},$$

festgelegt, die von den Parametern θ, ψ und Funktionen b, c abhängt.

2.3.2 Verteilungen mit schwerem Tail

Folgende Verteilungen mit schwerem Tail finden Anwendungen in der Versicherungsmathematik:

1. *Lognormale Verteilung* $LN(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Es kann gezeigt werden, dass für $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ gilt $X \stackrel{d}{=} e^{\sigma Y + \mu}$, wobei $Y \sim N(0, 1)$. Diese Verteilung wird vor allem zur Modellierung von Großschäden in der Feuerversicherung verwendet.

2. *Weibull-Verteilung* $W(r, c)$, $r, c > 0$ mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} r c x^{r-1} e^{-c x^r}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Da die Tail-Funktion der Verteilung von $X \sim W(r, c)$ gleich

$$\bar{F}_X(x) = e^{-c x^r}$$

für positive x ist, hat F_X für $r \geq 1$ einen leichten und für $r \in (0, 1)$ einen schweren Tail.

3. *Pareto-Verteilung* $Par(\alpha, c)$, $\alpha, c > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha+1}, & x > c, \\ 0, & x \leq c. \end{cases}$$

Somit ist die Tail-Funktion der Verteilung gleich

$$\bar{F}_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha, & x > c, \\ 1, & x \leq c. \end{cases}$$

Das erste Moment dieser Verteilung ist endlich für $\alpha > 1$ und das zweite Moment für $\alpha > 2$. Daher eignet sich diese Verteilung für die Modellierung von Großschäden mit großer Streuung. Die Pareto-Verteilung wird vor allem in der Feuer- und in der Haftpflichtversicherung benutzt.

4. *Pareto-Mischung von Exponentialverteilungen* $PME(\alpha)$, $\alpha > 1$ mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \int_c^\infty f_{Exp(1/y)}(x) dF_{Par(\alpha, c)}(y), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

wobei $c = (\alpha - 1)/\alpha > 0$ und das Integral gleich

$$\int_c^\infty \frac{1}{y} e^{-x/y} \frac{\alpha}{c} \left(\frac{c}{y}\right)^{\alpha+1} dy$$

ist. Man kann beweisen, dass die Tail-Funktion der Verteilung folgendes asymptotisches Verhalten hat:

$$\overline{F}_X(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha + 1)(\alpha - 1/\alpha)^\alpha}{x^\alpha}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

wobei $f(x) \sim g(x)$ für $x \rightarrow a$ die Gleichung $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ bedeutet.

5. *Loggamma-Verteilung* $L\Gamma(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$ mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{\log^{a-1} x}{x^{\lambda+1}}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

wobei $X \sim L\Gamma(a, \lambda)$ äquivalent zu $X \stackrel{d}{=} e^Y$, $Y \sim \Gamma(a, \lambda)$ ist.

6. *Benktander-Verteilung*, Typ I $BenI(a, b, c)$, $a, b, c > 0$, $a(a + 1) \geq 2b$, $ac \leq 1$. Die Tail-Funktion dieser Verteilung ist gegeben durch

$$\overline{F}_X(x) = \begin{cases} cx^{-a-1} e^{-b \log^2 x} (a + 2b \log x), & x > 1, \\ 1, & x \leq 1. \end{cases}$$

7. *Benktander-Verteilung*, Typ II $BenII(a, b, c)$, $a > 0$, $b \in (0, 1)$, $0 < c \leq a^{-1} e^{a/b}$. Die Tail-Funktion dieser Verteilung ist gegeben durch

$$\overline{F}_X(x) = \begin{cases} ca x^{-b-1} e^{-a/b x^b}, & x > 1, \\ 1, & x \leq 1. \end{cases}$$

Übungsaufgabe 2.3.2. *Beweisen Sie, dass die Verteilungen 1 – 7 einen schweren Tail besitzen.*

2.4 Empirische Methoden zur Erkennung von Verteilungen mit schwerem Tail

In der Versicherungspraxis ist es meistens nicht einfach, eine Verteilung mit schwerem Tail aus den Daten zu erkennen. In diesem Abschnitt skizzieren wir dazu zwei empirische Verfahren aus der Statistik: *Quantil-Grafiken* (oder *Quantil-Plots*) und eine Methode, die auf der mittleren *Rest-Hazard-Funktion* basiert.

Die Hauptidee beider Methoden ist einfach: Man vergleicht die empirische Verteilung der vorliegenden Schadenhöhen mit der Exponentialverteilung. Falls der Tail der empirischen Verteilung schwerer als der von $Exp(\lambda)$ ist, ist dies ein deutliches Zeichen dafür, dass die zugrunde liegende Verteilung einen schweren Tail besitzt. Dann versucht man, eine Verteilung mit schwerem Tail an die Daten anzupassen.

Nehmen wir an, dass einer Versicherungsfirma n Schäden mit Höhen U_i , $i = 1, \dots, n$ gemeldet wurden. Wir fassen sie als eine Realisierung der Stichprobe (U_1, \dots, U_n) von n univ. Risiken eines Portfolios auf. Sei die Verteilungsfunktion $F_U(x) = P(U_i \leq x)$ unbekannt. Aufgrund der Daten (U_1, \dots, U_n) wollen wir entscheiden, ob F_U einen schweren Tail hat. Seien $U_{(1)} \leq \dots \leq U_{(n)}$ die Ordnungsstatistiken der Stichprobe (U_1, \dots, U_n) . Die empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(U_i \leq x) = \frac{\#\{i = 1, \dots, n : U_i \leq x\}}{n}$$

der Stichprobe (U_1, \dots, U_n) kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < U_{(1)}, \\ k/n, & x \in [U_{(k)}, U_{(k+1)}), \quad k = 1, \dots, n-1, \\ 1, & x \geq U_{(n)}. \end{cases}$$

Sei $Q_F(y) = F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$ die *Quantil-Funktion* der Verteilung F . Für ein Risiko X mit Verteilungsfunktion F_X werden wir auch oft die Bezeichnung $Q_X(y) = Q_{F_X}(y)$ verwenden. Für $F = F_n$ gilt

$$Q_{F_n}(y) = U_{(k)}, \quad y \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

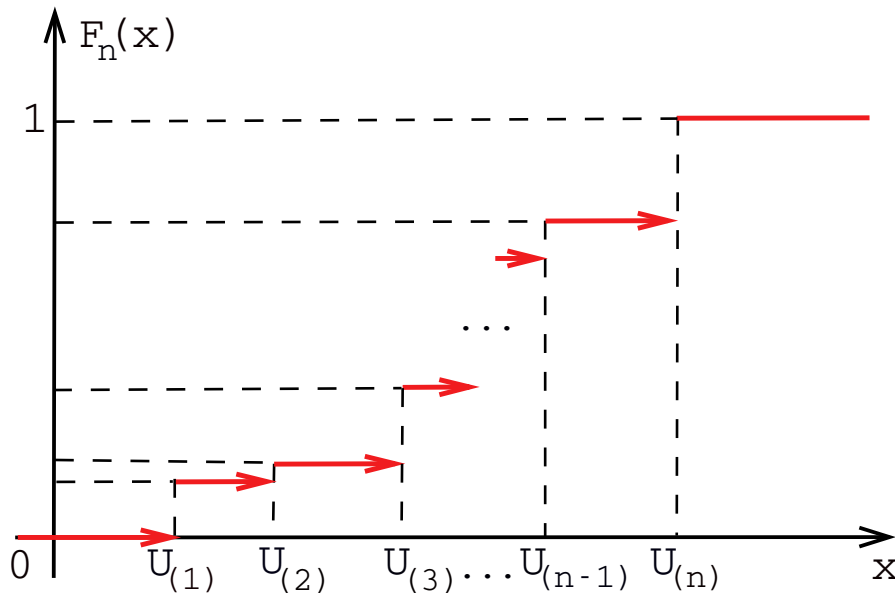


Abbildung 2.4.1: Empirische Verteilungsfunktion F_n

2.4.1 Quantil–Grafiken

Sei U ein Risiko mit (uns unbekannter) Verteilungsfunktion F_U . Auf Basis von Versicherungsdaten (U_1, \dots, U_n) , U_i i.i.v. und $U_i \stackrel{d}{=} U$ möchte man prüfen, ob $F_U = G$ für eine bekannte Verteilungsfunktion G gilt. Die Methode der Quantil–Grafiken besteht darin, dass man die entsprechenden Quantil–Funktionen Q_{F_n} und Q_G von F_n und G grafisch vergleicht. Und zwar

- plote man $Q_G(k/n)$ gegen $Q_{F_n}(k/n) = U_{(k)}$, $k = 1, \dots, n$.
- Falls die Punktwolke

$$\{(Q_G(k/n), U_{(k)}), k = 1, \dots, n\}$$

näherungsweise eine Gerade $y = ax + b$ darstellt, so sagt man, dass $F_U(x) \approx G\left(\frac{x-a}{b}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

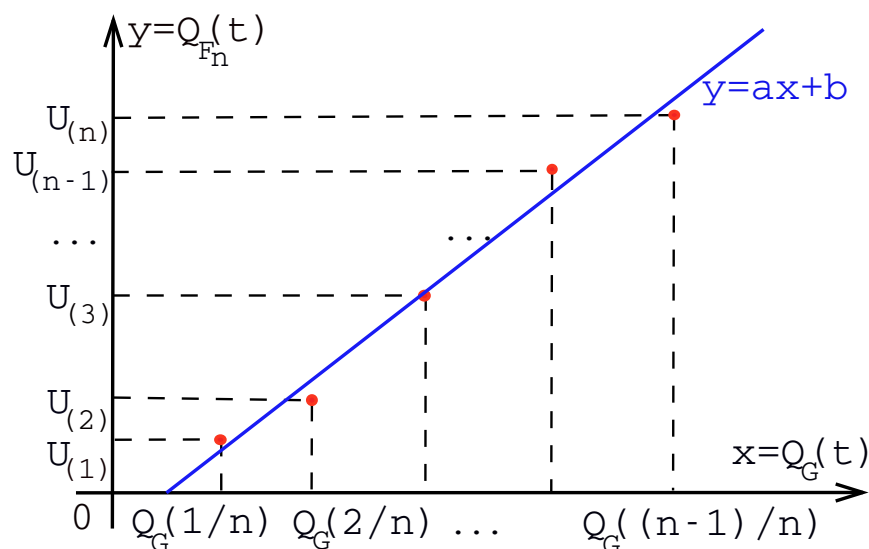


Abbildung 2.4.2: Quantil–Grafik

Diese empirische Vergleichsmethode beruht auf folgenden Überlegungen:

- Man ersetzt die unbekannte Funktion F_U durch die aus den Daten berechenbare Funktion F_n . Dabei macht man einen Fehler, der allerdings asymptotisch (für $n \rightarrow \infty$) klein ist. Dies folgt aus dem Satz von Glivenko–Cantelli (vgl. z.B. [13], S. 185), der besagt, dass $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_U(x)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Der Vergleich der entsprechenden Quantil–Funktionen wird durch folgendes Ergebnis bestärkt

(Goldie, 1977; siehe [4]): falls $EU_i < \infty$, dann gilt

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (F_n^{-1}(y) - F_U^{-1}(y)) dy \right| \rightarrow 0 \text{ f.s.}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Somit setzt man bei der Verwendung der Quantil-Grafiken voraus, dass der Stichprobenumfang n ausreichend groß ist, um $F_n^{-1} \approx F_U^{-1}$ zu gewährleisten.

- Man setzt zusätzlich voraus, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= F_U^{-1}(t) \\ x &= G^{-1}(t) \end{aligned}$$

für alle t (und nicht nur näherungsweise für $t = k/n$, $k = 1, \dots, n$) gelten. Daraus folgt, dass $G(x) = t = F_U(y) = F_U(ax + b)$ für alle x , oder $F_U(y) = G(\frac{y-b}{a})$ für alle y , weil $x = (y - a)/b$ ist.

Aus praktischer Sicht ist es besser, Paare $(Q_G(\frac{k}{n+1}), U_{(k)})$, $k = 1, \dots, n$ zu plotten. Dadurch wird vermieden, dass $Q_G(n/n) = Q_G(1) = \infty$ vorkommt, wie z.B. im Falle einer absolut stetigen Verteilung G . Tatsächlich gilt für $k = n$, dass $\frac{n}{n+1} < 1$ und somit $Q_G(\frac{k}{n+1}) < \infty$.

Beispiel 2.4.1 (Quantil-Grafiken).

1. Exponential-Verteilung $G(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbf{1}(x \geq 0)$

Es gilt $Q_G(y) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - y)$, $y \in (0, 1)$. So wird man beim Quantil-Plot Paare $(-\frac{1}{\lambda} \log(1 - \frac{k}{n+1}), U_{(k)})$, $k = 1, \dots, n$ zeichnen, wobei der Faktor $1/\lambda$ für die Linearität unwesentlich ist und weggelassen werden kann. Der Vorfaktor $1/\lambda$ kann entweder als Gefälle der entstandenen Gerade oder durch die Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden. Im zweiten Fall gilt $\widehat{\lambda^{-1}} = \operatorname{argmin} g(y)$, wobei

$$g(y) = \sum_{k=1}^n \left(y \log \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) + U_{(k)} \right)^2.$$

Die notwendige Bedingung eines Extremums $g'(y) = 0$ ergibt

$$\sum_{k=1}^n 2 \left(y \log \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) + U_{(k)} \right) \log \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) = 0,$$

woraus

$$\widehat{\lambda^{-1}} = -\frac{\sum_{k=1}^n \log \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) U_{(k)}}{\sum_{k=1}^n \log^2 \left(1 - \frac{k}{n+1} \right)}$$

folgt.

2. **Pareto-Verteilung** $G(x) = (1 - (c/x)^\alpha) \mathbf{1}(x \geq c)$

Berechnen wir die Quantil-Funktion:

$y = G(x) \Rightarrow 1 - y = (c/x)^\alpha \Rightarrow \log(1 - y) = \alpha \log c - \alpha \log x \Rightarrow \log Q_G(y) = \log x = \log c - \alpha^{-1} \log(1 - y)$. Zur Vereinfachung kann man die Quantil-Grafik auf der logarithmischen Skala plotten. Man trägt Punkte mit Koordinaten

$$\left(-\log\left(1 - \frac{k}{n+1}\right), \log U_{(k)} \right), \quad k = 1, \dots, n$$

auf der Ebene auf und prüft, ob sie eine Gerade bilden.

Übungsaufgabe 2.4.1. Entwerfen Sie die Quantil-Grafiken für den Vergleich der empirischen Verteilung von Versicherungsdaten mit der Lognormal- und der Weibull-Verteilung.

Beispiel 2.4.2 (Quantil-Grafiken von Versicherungsdaten).

1. **Feuerversicherung (Norwegen, 1971)** Abbildung 2.4.3 zeigt Quantil-Grafiken, in denen die empirische Verteilung von $n = 105$ Feuerversicherungsschäden (in Tausend Kronen) aus Norwegen im Jahr 1971 mit den Exponential- und Pareto-Verteilungen verglichen wird. Die Verteilung der Daten hat einen schweren Tail und kann gut durch die Pareto-Verteilung modelliert werden.

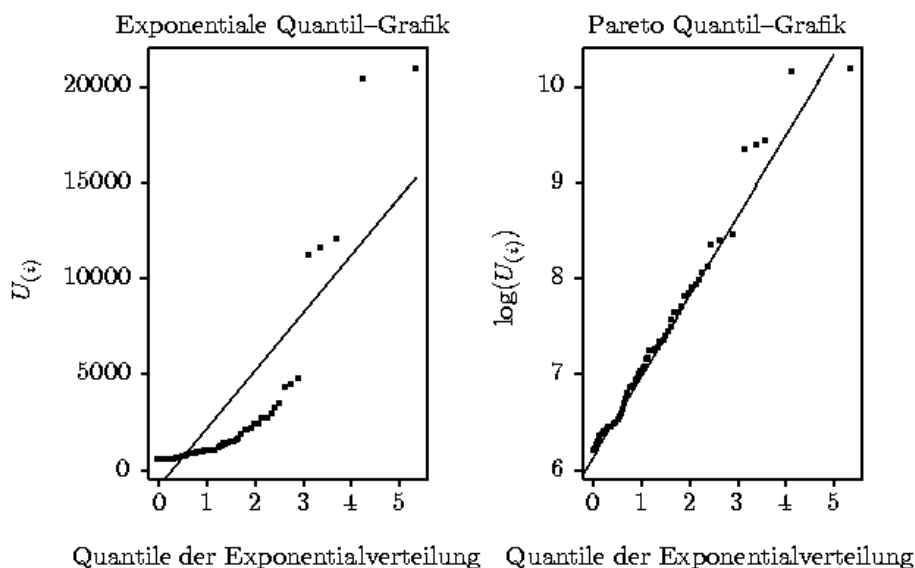


Abbildung 2.4.3: Feuerversicherungsdaten aus Norwegen, 1971. Quelle: [20]

2. **Haftpflichtversicherung (Belgien, 1992)** In Abbildung 2.4.4 sind Ordnungsstatistiken der Stichprobe von $n = 227$ Schadenhöhen der Industrie-Unfälle in Belgien im Jahr 1992 (Haftpflichtversicherung) gegen

Quantile von Exponential-, Pareto-, Standardnormal- und Weibull-Verteilungen geplottet. Im Bereich von Kleinschäden zeigen die Exponential- und Pareto-Verteilungen eine gute Übereinstimmung mit den Daten. Die Verteilung von mittelgroßen Schäden kann am besten durch die Normal- und Weibull-Verteilungen modelliert werden. Für Großschäden erweist sich die Weibull-Verteilung als geeignet.

2.4.2 Mittlere Rest-Hazard-Funktion

Eine andere Methode zur Erkennung von Verteilungen mit schweren Tails basiert auf dem Begriff der *mittleren Rest-Hazard-Funktion*.

Definition 2.4.1. Sei X ein Risiko mit der Verteilungsfunktion $F(x)$, $F(0) = 0$. Die Rest-Hazard-Funktion von X ist gegeben durch

$$\Phi_t(x) = P(X \leq t+x \mid X > t) = \frac{P(t < X \leq t+x)}{P(X > t)} = \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)}.$$

So definiert, ist Φ_t eine gültige Verteilungsfunktion. Warum nennt man Φ_t Rest-Hazard-Funktion?

- Für kleine x ist $\Phi_t(x)$ proportional zu der Hazard-Rate $m(t)$. Falls F eine Dichte besitzt, gilt in der Tat

$$m(t)x \approx P(X \leq t+x \mid X > t) = \Phi_t(x), \quad x \rightarrow 0.$$

Im Falle der diskreten Verteilung von X gilt ebenfalls

$$m(t) = P(X \leq t \mid X > t-1) = \Phi_t(1).$$

- Sei z.B. X die typische Lebensdauer eines Menschen (Lebensversicherung). Dann kann Φ_t als Verteilungsfunktion der restlichen Lebensdauer eines Menschen interpretiert werden, der das Alter t erreicht hat.

Berechnen wir den Erwartungswert $\mu_F(t)$ bezüglich Φ_t .

$$\mu_F(t) = E(X-t \mid X > t) = \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_t(x) dx = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_0^{\infty} \bar{F}(t+x) dx = \int_t^{\infty} \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(t)} dy,$$

wobei im letzten Integral die Substitution $y = t+x$ durchgeführt wurde. Wir verwendeten zusätzlich die Darstellung

$$\bar{\Phi}_t(x) = 1 - \frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{1 - F(t+x)}{1 - F(t)} = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$$

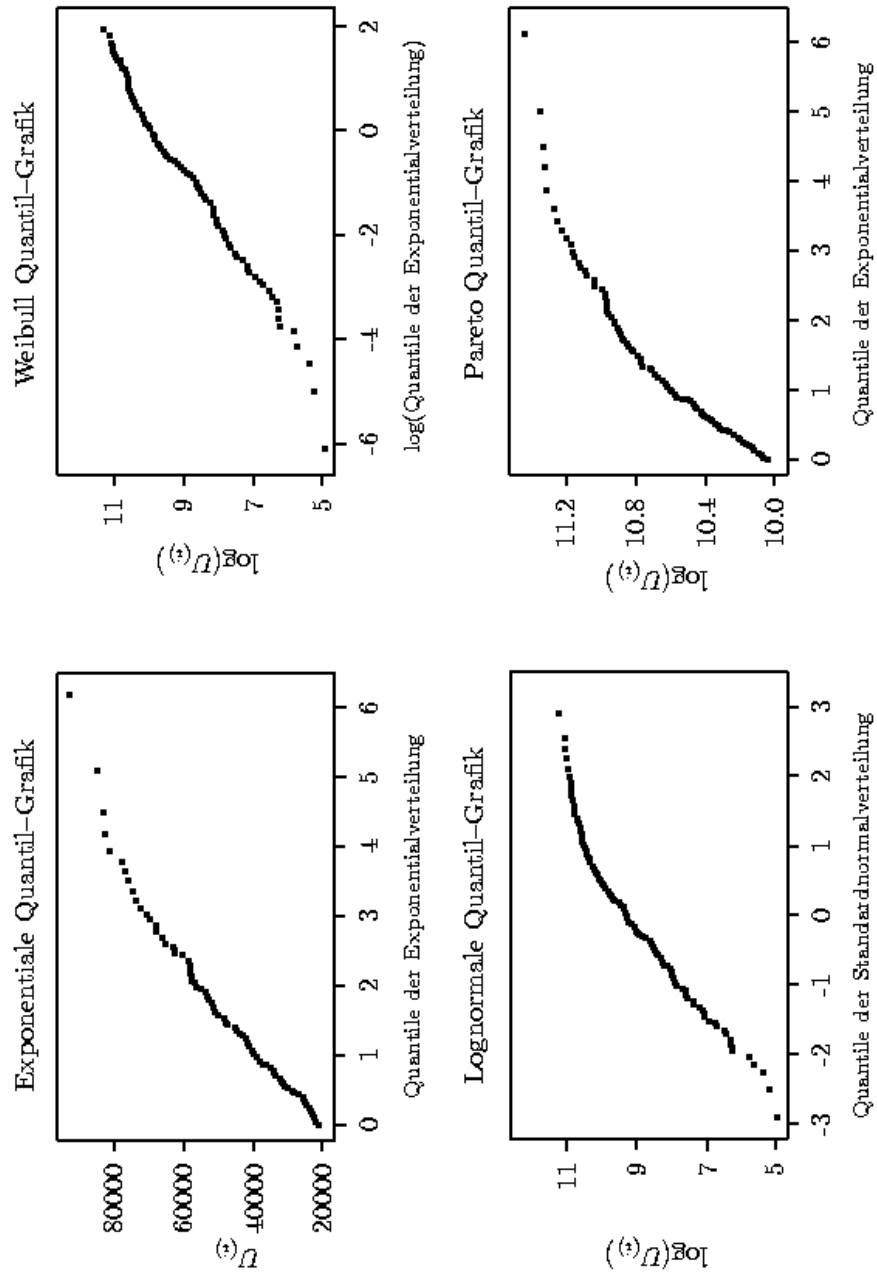


Abbildung 2.4.4: Industrie-Unfälle in Belgien, 1992. Quelle: [20]

für alle t und x . Somit kann $\mu_F(t)$ in der Lebensversicherung als mittlere Restlebensdauer eines Menschen interpretiert werden, der das Alter t erreicht hat. Die Funktion $\mu_F(t)$ hat in der Risikotheorie einen eigenen Namen.

Definition 2.4.2. Sei F eine Verteilungsfunktion mit $F(0) = 0$. Für alle x , für die $F(x) < 1$ gilt, definiert man die mittlere Rest-Hazard-Funktion $\mu_F(x)$ von F durch

$$\mu_F(x) = \int_x^\infty \frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(x)} dy.$$

Beispiel 2.4.3.

- **Exponentialverteilung:** Falls $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, dann gilt $\mu_F(x) = 1/\lambda$. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die Exponentialverteilung. Man kann zeigen, dass

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbf{1}(x \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad \mu_F(x) = 1/\lambda.$$

- **Gleichverteilung:** Für $X \sim U[a, b]$ gilt $\mu_F(x) = (b - x)/2$.
- **Pareto-Verteilung:** Für $X \sim \text{Par}(\alpha, c)$ mit $\alpha > 1$ gilt $\mu_F(x) = \frac{x}{\alpha - 1}$ für alle $x > c$.

Grafiken dieser mittleren Rest-Hazard-Funktionen sind u.a. in Abbildung 2.4.5 dargestellt.

Übungsaufgabe 2.4.2. Beweisen Sie die Aussagen des Beispiels 2.4.3.

Aus diesem Beispiel lässt sich leicht erkennen, dass die mittlere Rest-Hazard-Funktion der Verteilungen mit schwerem Tail für große x gegen unendlich geht. Dies gilt nicht für Verteilungen mit leichtem Tail. Diese Eigenschaft formulieren wir im folgenden Hilfssatz.

Lemma 2.4.1. Sei F eine Verteilungsfunktion mit $F(0) = 0$, die eine Dichte f und endliches erstes Moment besitzt. Falls $\mu_F(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$, dann hat F einen schweren Tail.

Beweis. Beweisen wir, dass unter den obigen Voraussetzungen $\lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = 0$ gilt, wobei $m(x)$ die Hazard-Rate von F ist. In diesem Falls besagt die Folgerung 2.2.1, dass F einen schweren Tail hat.

Sei X ein Risiko mit Verteilungsfunktion F . Laut Definition 2.4.2 gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mu_F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty \frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(x)} dy = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{E X - \int_0^x \overline{F}(y) dy}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\overline{F}(x)}{-f(x)} = \infty,$$

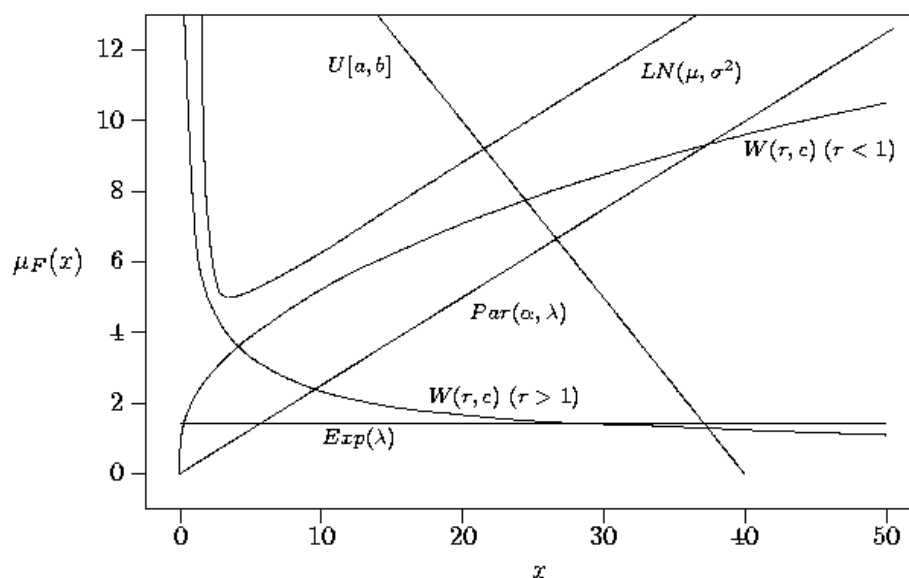


Abbildung 2.4.5: Mittlere Rest-Hazard-Funktionen verschiedener Verteilungen. Quelle: [20]

wobei in der letzten Gleichung die Regel von l'Hospital verwendet wurde. Dies bedeutet, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = 0.$$

□

Seien (U_1, \dots, U_n) uiv Schadenhöhen mit Verteilungsfunktion F_U . Man möchte prüfen, ob F_U einen schweren Tail hat. Der obige Hilfssatz liefert folgendes Erkennungsverfahren, um zu unterscheiden, ob F_U einen schweren Tail besitzt:

- Schätzung der mittleren Rest-Hazard-Funktion aus den Versicherungsdaten (U_1, \dots, U_n) . Ein möglicher Schätzansatz besteht in der Berechnung der *empirischen mittleren Rest-Hazard-Funktion*

$$\hat{\mu}_{F_U}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{F_n}(x),$$

wobei $F_n(x)$ die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe (U_1, \dots, U_n) ist.

- Vergleich des asymptotischen Verhaltens von $\hat{\mu}_{F_U}(x)$ mit einer horizontalen Gerade, die für die mittlere Rest-Hazard-Funktion einer Exponentialverteilung steht.

- Falls $\hat{\mu}_{F_U}(x)$ für große x steigt, so ist dies ein Zeichen dafür, dass F_U einen schweren Tail besitzt. Fallende $\hat{\mu}_{F_U}(x)$ entsprechen der Verteilungsfunktion F_U mit leichtem Tail.

Zum Schluss des Kapitels gehen wir noch auf die praktische Berechnung von $\hat{\mu}_{F_U}(x)$ für $x = U_{(i)}$ ein.

Lemma 2.4.2. *Es gilt*

$$\hat{\mu}_{F_U}(U_{(n-k)}) = \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^n (U_{(j)} - U_{(n-k)})$$

für alle $k = 0, \dots, n$, wobei $\hat{\mu}_{F_U}(U_{(n-k)})$ als mittlerer Überschuss des Schwellenwertes $U_{(n-k)}$ unter den letzten k Ordnungsstatistiken $U_{(n-k+1)}, \dots, U_{(n)}$ interpretiert werden kann.

Beweis. Aus Definition von $\hat{\mu}_{F_U}$ folgt

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{F_U}(U_{(n-k)}) = \mu_{F_n}(U_{(n-k)}) &= \int_{U_{(n-k)}}^{\infty} \frac{1 - F_n(y)}{1 - F_n(U_{(n-k)})} dy \\ &= \frac{1}{1 - (n-k)/n} \sum_{i=n-k}^{n-1} \int_{U_{(i)}}^{U_{(i+1)}} (1 - F_n(y)) dy \\ &= \frac{n}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} (1 - i/n) (U_{(i+1)} - U_{(i)}) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} (n - i) (U_{(i+1)} - U_{(i)}) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^n U_{(j)} - U_{(n-k)} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=n-k+1}^n (U_{(j)} - U_{(n-k)}). \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die Eigenschaft $F_n(U_{(i)}) = i/n$ und die Substitution $j = i + 1$. \square

Kapitel 3

Schadenanzahl

3.1 Zählprozesse

In diesem Kapitel betrachten wir grundlegende Eigenschaften des *Schadenanzahlprozesses*. Zur Wiederholung seien $\{\sigma_i : i \geq 0\}$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, die *Schadenzeitpunkte*, mit $0 = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots$ und $T_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ die *Zwischenankunftszeiten*. Im Abschnitt 1.2 wurde die Schadenanzahl $N(t)$ bis zur Zeit t wie folgt eingeführt:

$$N(t) = \sup\{n : \sigma_n \leq t\}, \quad \forall t \geq 0.$$

So eingeführt, ist $N(t)$ ein typisches Beispiel für einen Zählprozess:

Definition 3.1.1. *Ein stochastischer Prozess $\{N(t)\}$ heißt Zählprozess, falls folgendes gilt:*

- a) $N(0) = 0$
- b) $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\forall t \geq 0$
- c) $\forall t_1 \leq t_2 : N(t_1) \leq N(t_2)$.

Daraus folgt, dass jede Realisierung eines Zählprozesses $N(t)$ eine Treppenfunktion ist, die rechtsseitig stetig und nicht fallend ist. (Die Stetigkeit kann ex adverso nachgewiesen werden.)

Ein Zählprozess heißt *einfach*, falls mit Wahrscheinlichkeit 1 nur Sprünge der Höhe 1 erlaubt sind. Von der versicherungstechnischen Seite heißt dies, dass nicht gleichzeitig mehrere Schadensansprüche vorkommen können. Dies ist in der Kfz-Versicherung nicht der Fall: Auf einer Autobahn können z. B. bei einem durch Nebel verursachten Unfall mehrere Schäden von zahlreichen Autos auftreten.

Weiterhin betrachten wir ausschließlich einfache Punktprozesse. Die Anzahl der Schäden im Intervall $(t_1, t_2]$ ist durch $N(t_2) - N(t_1)$ gegeben. Diese

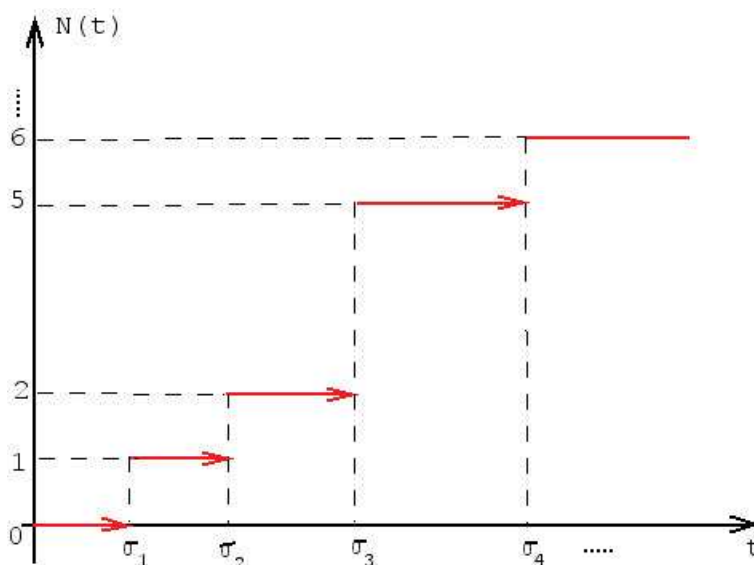


Abbildung 3.1.1: Darstellung eines Zählprozess

Differenz heißt *Zuwachs von $N(t)$ im Intervall $(t_1, t_2]$* .

Die Verteilung der Zufallsgröße $N(t)$ ist durch

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = P(\sigma_k \leq t < \sigma_{k+1}) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

gegeben. Mit diesen Wahrscheinlichkeiten werden wir später arbeiten. Außerdem gilt

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}(\sigma_i \leq t).$$

Definition 3.1.2. Ein stochastischer Prozess $\{N(t) : t \geq 0\}$ besitzt

- a) *unabhängige Zuwächse, falls $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ die Zufallsvariablen*

$$N(t_0), N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

unabhängig sind.

- b) *stationäre Zuwächse, falls $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n, h > 0$ die Verteilung des Vektors*

$$(N(t_1+h) - N(t_0+h), N(t_2+h) - N(t_1+h), \dots, N(t_n+h) - N(t_{n-1}+h))$$

nicht von h abhängt, d. h., mit der Verteilung desselben Vektors für $h = 0$ übereinstimmt.

Für weiteres brauchen wir die Definition eines Erneuerungsprozess:

Definition 3.1.3. *Ein Prozess mit diskreter Zeit $\{\sigma_n : n \geq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ heißt Erneuerungsprozess, falls $\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i$, wobei $\{T_i : i \in \mathbb{N}\}$ nichtnegative uiv Zufallsvariable sind. Sei $F_T(x) = P(T_i \leq x)$ die Verteilung von T_i .*

Falls die Zwischenankunftszeiten $\{T_i\}$ beim Schadenprozess eine uiv Folge bilden, dann ist der Prozess der Ankunftszeiten offensichtlich ein Erneuerungsprozess, und das auf diesem Prozess basierende Versicherungsmodell heißt *Sparre-Andersen-Modell*. Der Name Erneuerungsprozess kommt aus der Warteschlangen- und Zuverlässigkeitstheorie. Dort wird T_i als die Dauer der ausfallfreien Arbeit einer Komponente in einem System interpretiert. Nach der Zeit T_i wird das Element ausgewechselt. Somit ist σ_n die Dauer der Arbeit des Systems bis zum n -ten Wechsel.

Ein Spezialfall der Erneuerungsprozesse mit $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ wird im nächsten Abschnitt ausführlich behandelt. Dabei handelt es sich um den sogenannten Poisson-Prozess, der von den Physikern A. Einstein und M. Smoluchovsky am Anfang des 20. Jahrhundert eingeführt wurde. Hier spielt die Exponentialverteilung eine besondere Rolle. Der Grund dafür ist die sogenannte *Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung*: Man kann beweisen, dass

$$T \sim \text{Exp}(\lambda) \iff \forall t, s > 0 \quad P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s).$$

Die restliche Arbeitsdauer des Elementes ist unabhängig vom Alter des Elementes.

Übungsaufgabe 3.1.1. *Beweisen Sie die o. g. Behauptung.*

3.2 Poisson-Prozess

Definition 3.2.1. *Sei $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein einfacher Zählprozess, dessen Schadenankunftszeiten $\{\sigma_n : n \geq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, einen Erneuerungsprozess bilden. Falls die Zwischenankunftszeiten $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ sind für ein $\lambda > 0$, dann heißt $\{N(t) : t \geq 0\}$ (homogener) Poisson-Prozess mit Intensität λ .*

Falls der Schadenprozess poissonisch ist, die Folge der Schadenhöhen $\{U_i : i \geq 1\}$, $i \in \mathbb{N}$, unabhängig von $N(t)$ sind und eine uiv Folge bilden, so nennt man dieses versicherungstechnische Modell ein *zusammengesetztes Poisson-Modell*. Wegen seiner Schlichtheit ist es wohl das populärste Modell in der Risikothorie, obwohl, wie wir später sehen werden, die Realität dadurch nur bedingt beschrieben werden kann. Es dient aber als Grundmodell für weitere Konstruktionen und Entwicklungen in der Risikothorie. Der nächste Satz gibt die grundlegenden Eigenschaften eines Poisson-Prozess an:

Satz 3.2.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $\{N(t) : t \geq 0\}$ ist ein Poisson-Prozess mit Intensität λ .
2. (a) Für alle $t \geq 0$ gilt: $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, d. h.,

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(b) Der Zufallsvektor $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ hat (unter der Bedingung $\{N(t) = n\}$) dieselbe Verteilung, wie ein Vektor der Ordnungsstatistiken von n unabhängigen, über $[0, t]$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

3. $\{N(t) : t \geq 0\}$ hat unabhängige Zuwächse, $EN(1) = \lambda$, und es gilt 2b).
4. $\{N(t) : t \geq 0\}$ hat stationäre und unabhängige Zuwächse, und es gilt für $\Delta t \rightarrow 0_+$:

$$\begin{aligned} P(N(\Delta t) = 0) &= 1 - \lambda \Delta t + \bar{o}(\Delta t), \\ P(N(\Delta t) = 1) &= \lambda \Delta t + \bar{o}(\Delta t) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

5. $\{N(t) : t \geq 0\}$ hat stationäre und unabhängige Zuwächse, und für jedes $t \geq 0$ gilt $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.

Ohne Beweis (1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 1)).

Übungsaufgabe 3.2.1. *Beweisen Sie die Züge 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3).*

Dieser Satz gibt uns fünf äquivalente Definitionen eines Poisson-Prozesses an. Seine Eigenschaften fassen wir in einer Folgerung zusammen (siehe unten).

Definition 3.2.2. *Das Verhältnis*

$$I(t) = \frac{\text{Var } N(t)}{EN(t)}$$

heißt *Dispersionsindex eines zufälligen Prozesses* $\{N(t) : t \geq 0\}$.

Er beschreibt die Variabilität des Prozesses mit der Zeit.

Folgerung 3.2.1. *Sei $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein Poisson-Prozess mit der Intensität $\lambda > 0$. Dann hat er die folgenden Eigenschaften:*

1. $\{N(t) : t \geq 0\}$ besitzt stationäre und unabhängige Zuwächse.
2. Der Dispersionsindex von $N(t)$ ist 1: $I(t) = 1$.

Beweis. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t) &\Rightarrow E N(t) = \lambda t \quad \text{und} \quad \text{Var } N(t) = \lambda t \\ &\Rightarrow I(t) = \frac{\text{Var } N(t)}{E N(t)} = 1 \end{aligned}$$

□

3. Die Intensität $\lambda = E N(1)$ hat die folgende Bedeutung: Es ist die mittlere Anzahl der Schäden pro Zeiteinheit. Weiterhin gilt: $\lambda = 1/ET_i \forall i$.
4. Es gilt $\forall t > 0$, wenn $\Delta t \rightarrow 0_+$:

$$\begin{aligned} P(N(t + \Delta t) - N(t) = 0) &= 1 - \lambda \Delta t + \bar{o}(\Delta t) \\ P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) &= \lambda \Delta t + \bar{o}(\Delta t) \\ P(N(t + \Delta t) - N(t) > 1) &= \bar{o}(\Delta t) \end{aligned}$$

Man interpretiert dies folgendermaßen: Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem kleinen Zeitintervall keine Schäden vorkommen, ist fast 1. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem kleinen Zeitintervall nur 1 Schaden gemeldet wird, ist proportional zu der Länge des Intervalls ($\simeq \lambda \Delta t$). Zwei oder mehr Schäden kommen in einem kleinen Zeitfenster „fast sicher“ nicht vor:

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) > 1) = \bar{o}(\Delta t).$$

Beweis. Wegen der Stationarität der Zuwächse gilt:

$$N(t + \Delta t) - N(t) \sim N(\Delta t) - N(0) = N(\Delta t) \sim \text{Poisson}(\lambda \Delta t),$$

wobei die Gleichheit aufgrund von $N(0) = 0$ gilt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} P(N(t + \Delta t) - N(t) > 1) &= 1 - P(N(\Delta t) = 0) - P(N(\Delta t) = 1) \\ &\stackrel{(3.2.1)}{=} 1 - 1 + \lambda \Delta t - \bar{o}(\Delta t) - \lambda \Delta t + \bar{o}(\Delta t) = \bar{o}(\Delta t) \end{aligned}$$

□

Oft gilt aber für den aus den Versicherungsdaten geschätzte Dispersionsindex

$$\widehat{I}_{N(t)} = \frac{\widehat{\text{Var } N(t)}}{\widehat{E N(t)}} > 1.$$

Es weist darauf hin, dass der Poisson-Prozess zur Modellierung der Schadenanzahl ungeeignet ist, denn für ihn gilt $I(t) = 1$. Außerdem ist die tatsächliche Variabilität des Portfolios höher als beim Poisson-Prozess. Deshalb ist eine Verallgemeinerung des Begriffs des Poisson-Prozesses notwendig, um solche Situationen modellieren zu können.

3.3 Gemischter Poisson-Prozess

Oft kann die oben beschriebene Situation dadurch modelliert werden, dass die Intensität λ des Prozesses der Schadenankunftszeiten *keine Konstante* mehr ist, sondern von äußeren Einflüssen, wie etwa dem Wetter (Kfz-Versicherung) oder der ökonomischen Konjunktur (Versicherung von Wertpapieren), abhängt. Mit anderen Worten: λ wird als eine Zufallsvariable mit Verteilung $F_\Lambda(\cdot)$ aufgefasst.

Beispiel 3.3.1 (Kfz-Versicherung). *Sei ein homogenes Portfolio von Risiken aus der Kfz-Versicherung gegeben. In der Kfz-Versicherung sind die Wetterverhältnisse für die Schadenanzahl $N(1) \equiv N$ (pro Geschäftsjahr) maßgebend. Von Jahr zu Jahr unterscheiden sich allerdings die Wetterverhältnisse, was auch zu der Schwankung in der Schadenanzahl führt. Deshalb unterteilt man Jahre nach Wassertagen in l Gruppen: Im Jahr aus der Gruppe $i = 1, \dots, l$ sei die Anzahl der Unfälle poisson-verteilt mit Parameter λ_i , wobei $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_l$. Somit entspricht die Gruppe 1 den Jahren, die lange Schnee-, Glatteis- und Nebelperioden enthalten, und die Gruppe l entspricht den Jahren mit sehr guten Wetterbedingungen. Aus Erfahrung sei bekannt, dass das Jahr aus der Gruppe i mit relativer Häufigkeit p_i vorkommt, wobei $p_1 + p_2 + \dots + p_l = 1$.*

Um N im nächsten Geschäftsjahr prognostizieren zu können, nimmt man an, dass $N \sim \text{Poisson}(\Lambda)$, wobei die Intensität Λ folgende Zufallsvariable ist:

$$\Lambda = \begin{cases} \lambda_1, & \text{mit Wkt. } p_1 \\ \lambda_2, & \text{mit Wkt. } p_2 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_l, & \text{mit Wkt. } p_l \end{cases}$$

Somit ist die Verteilung von N gleich

$$P(N = k) = \sum_{i=1}^l p_i e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.3.1)$$

Diese Formel folgt aus der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit, da

$$P(N = k \mid \Lambda = \lambda_i) = e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!}.$$

Allgemein kann $\Lambda \geq 0$ eine beliebige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_\Lambda(\lambda) = P(\Lambda \leq \lambda)$ sein. Dann sieht die Verteilung von N folgendermaßen aus:

$$p_k = P(N = k) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} dF_\Lambda(\lambda), \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (3.3.2)$$

Diese Verteilung heißt *gemischte Poisson-Verteilung mit Mischungsvariable* Λ . Offensichtlich ist (3.3.1) ein Spezialfall von (3.3.2).

Übungsaufgabe 3.3.1. Zeigen Sie, dass

1. $EN = E\Lambda$, $Var N = E\Lambda + Var \Lambda$, und somit

2. $I_N = 1 + I_\Lambda \geq 1$.

Somit ist die *gemischte Poisson-Verteilung überdispersioniert* und für die Modellierung der Schadenanzahl mit hohen Schwankungen gut geeignet.

Die gemischte Poisson-Verteilung spielt bei der Definition eines gemischten Poisson-Prozesses eine wichtige Rolle:

Definition 3.3.1. Der Zählprozess $\{N(t) : t \geq 0\}$ heißt *gemischter Poisson-Prozess*, falls eine nichtnegative Mischungsvariable Λ existiert (mit Mischungsverteilungsfunktion F_Λ), so dass $\forall n \in \mathbb{N}$ und für alle Folgen $\{k_i\}_{i=1}^n$ von nichtnegativen Zahlen und für $0 < a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$ gilt:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N(b_i) - N(a_i) = k_i\}\right) = \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda(b_i - a_i))^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda(b_i - a_i)} dF_\Lambda(\lambda). \quad (3.3.3)$$

Falls

$$\widehat{l}_\Lambda(s) = Ee^{-s\Lambda} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} dF_\Lambda(\lambda) \quad \operatorname{Re} s \geq 0$$

die *Laplace-Transformierte* von Λ bezeichnet, dann kann die Wahrscheinlichkeit in (3.3.3) folgendermaßen dargestellt werden:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N(b_i) - N(a_i) = k_i\}\right) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)^{k_i}}{k_i!}\right) (-1)^k \widehat{l}_\Lambda^{(k)}\left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)\right) \quad (3.3.4)$$

wobei $k = \sum_{i=1}^n k_i$. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda(b_i - a_i))^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda(b_i - a_i)} dF_\Lambda(\lambda) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)^{k_i}}{k_i!} \right) \int_0^{+\infty} \lambda^k e^{-\lambda \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)} dF_\Lambda(\lambda) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)^{k_i}}{k_i!} \right) (-1)^k (-1)^k \int_0^{+\infty} \lambda^k e^{-\lambda s} dF_\Lambda(\lambda) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{(b_i - a_i)^{k_i}}{k_i!} \right) (-1)^k \widehat{l}_\Lambda^{(k)}(s),
 \end{aligned}$$

wobei $s = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ sei.

Aus der Definition folgt, dass ein gemischter Poisson-Prozess stationäre Zuwächse hat.

Übungsaufgabe 3.3.2. Zeigen Sie es!

Später werden wir zeigen, dass gemischte Poisson-Prozesse, im Gegensatz zum homogenen Poisson-Prozess, *nicht mehr unabhängig sind*, vgl. Lemma 3.3.2. Aus (3.3.3) folgt auch für $n = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = t_n$, dass

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF(\lambda), \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (3.3.5)$$

Diese Verteilung enthält die gemischte Poisson-Verteilung (3.3.2) als Spezialfall für $t = 1$.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft des gemischten Poisson-Prozess ist es, dass die Wahrscheinlichkeit

$$p_0(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dF(\lambda) = \widehat{l}_\Lambda(t) \quad (\text{Laplace-Transformierte von } \Lambda)$$

alle anderen Wahrscheinlichkeiten $p_k(t)$ eindeutig festlegt:

$$p_k(t) = \frac{(-1)^k t^k}{k!} p_0^{(k)}(t), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dies folgt aus (3.3.4) mit $n = 1$, $b_1 = t$ und $a_1 = 0$, da $\widehat{l}_\Lambda(t) = p_0(t)$.
Tatsächlich ist $p_0(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, wie wir unten zeigen werden, und es gilt:

$$\begin{aligned} p_0^{(k)}(t) &= \widehat{l}_\Lambda^{(k)}(t) \\ &= (-1)^k \int_0^{+\infty} \lambda^k e^{-\lambda t} dF_\Lambda(\lambda) \\ &= \frac{(-1)^k k!}{t^k} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dF_\Lambda(\lambda) \\ &= \frac{(-1)^k k!}{t^k} p_k(t), \end{aligned}$$

weil die Laplace-Transformierte $\widehat{l}_\Lambda(s)$ eine analytische Funktion im Gebiet $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$ ist.

Im folgenden Lemma werden Grundcharakteristiken eines gemischten Poisson-Prozess berechnet:

Lemma 3.3.1. *Sei $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein gemischter Poisson-Prozess mit der Mischungsvariablen Λ . Für die erzeugende Funktion*

$$\widehat{g}_{N(t)}(s) = E s^{N(t)}, \quad |s| < 1$$

von $N(t)$ gilt:

$$\widehat{g}_{N(t)}(s) = \widehat{l}_\Lambda(t(1-s)), \quad \forall t \geq 0.$$

Daraus folgt, dass die faktoriellen Momente von $N(t)$ gleich

$$E[N(t)(N(t)-1)\cdots(N(t)-k+1)] = t^k E \Lambda^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

sind. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} E N(t) &= t \cdot E \Lambda, \\ \operatorname{Var} N(t) &= t^2 \cdot \operatorname{Var} \Lambda + t \cdot E \Lambda, \\ I_{N(t)} &= 1 + t \cdot I_\Lambda \geq 1. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 3.3.3. *Beweisen Sie das obige Lemma.*

Aus diesem Lemma folgt, dass der *homogene Poisson-Prozess* in der Klasse der gemischten Poisson-Prozesse *minimale Varianz* hat ($\operatorname{Var} N(t) = t \cdot \lambda$, weil $\operatorname{Var} \lambda = 0$) und *nicht überdispersioniert* ist ($I_{N(t)} = 1$). Weiterhin ist seine Varianz linear und nicht quadratisch in t .

Folgendes Lemma zeigt, dass die *Zuwächse eines gemischten Poisson-Prozess positiv korreliert* sind und folglich *nicht unabhängig* sind, falls Λ nicht ausgeartet ist (d. h., wenn $\operatorname{Var} \Lambda > 0$).

Lemma 3.3.2. Sei $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein gemischter Poisson-Prozess mit der Mischungsvariablen Λ . Dann gilt folgendes:

$$\text{Cov}(N(t), N(t+h) - N(h)) = th \cdot \text{Var } \Lambda$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(N(t) = k_1, N(t+h) = k_1 + k_2) &= P(N(t) - N(0) = k_1, N(t+h) - N(t) = k_2) \\ &\stackrel{(3.3.4)}{=} \frac{t^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{(t+h-t)^{k_2}}{k_2!} \cdot (-1)^{k_1+k_2} \cdot \underbrace{\tilde{I}_\Lambda^{(k_1+k_2)}(t-0+(t+h-t))}_{=t+h} \\ &= \frac{t^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{h^{k_2}}{k_2!} \int_0^{+\infty} \lambda^{k_1+k_2} e^{-\lambda(t+h)} dF_\Lambda(\lambda) \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N(t), N(t+h) - N(t)) &= E[N(t)(N(t+h) - N(t))] - E N(t) \cdot E[N(t+h) - N(t)] \\ &= \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}} k_1 k_2 P(N(t) = k_1, N(t+h) - N(t) = k_2) \\ &\quad - t E \Lambda [(t+h) E \Lambda - t E \Lambda] \\ &= \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}} k_1 k_2 \frac{t^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{h^{k_2}}{k_2!} \int_0^{+\infty} \lambda^{k_1+k_2} e^{-\lambda(t+h)} dF_\Lambda(\lambda) - th (E \Lambda)^2 \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k_1 \in \mathbb{N}} k_1 \frac{(\lambda t)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t} \right)}_{E(\text{Poisson}(\lambda t))} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k_2 \in \mathbb{N}} k_2 \frac{(\lambda h)^{k_2}}{k_2!} e^{-\lambda h} \right)}_{E(\text{Poisson}(\lambda h))} dF_\Lambda(\lambda) \\ &\quad - th (E \Lambda)^2 \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda t \cdot \lambda h dF_\Lambda(\lambda) - th (E \Lambda)^2 \\ &= th E \Lambda^2 - th (E \Lambda)^2 = th \cdot \text{Var } \Lambda \end{aligned}$$

□

Beispiele der gemischten Poisson-Prozesse

1. Homogener Poisson-Prozess:

$\Lambda = \lambda_0$ fast sicher und

$$F_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \lambda_0 \\ 0, & \lambda < \lambda_0 \end{cases}$$

2. Mischung aus $n \leq \infty$ homogenen Poisson-Prozessen:

Sei $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Betrachten wir:

$$\Lambda = \begin{cases} \lambda_1, & \text{mit Wkt. } p_1 \\ \lambda_2, & \text{mit Wkt. } p_2 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n, & \text{mit Wkt. } p_n \end{cases}$$

Daraus ergibt sich:

$$F_\Lambda(\lambda) = \sum_{i=1}^n p_i \mathbf{1}(\lambda_i \leq \lambda),$$

und es gilt:

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = \sum_{i=1}^n p_i e^{-\lambda_i t} \frac{(\lambda_i t)^k}{k!}.$$

3. Pascal- oder Polya-Prozess:

Sei $\Lambda \sim \Gamma(a, b)$, $a, b < 0$. Daraus folgt:

$$F_\Lambda(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^\lambda e^{-bx} x^{a-1} dx.$$

Man kann zeigen (siehe Übungen), dass

$$p_n(t) = \binom{a+n-1}{n} \left(\frac{b}{t+b}\right)^a \left(\frac{t}{t+b}\right)^n, \quad t \geq 0, n \in \mathbb{N},$$

d. h., $N(t)$ ist negativ binomialverteilt mit Parametern a und $\frac{t}{t+b}$.

Übungsaufgabe 3.3.4. Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion von $N(t)$ gilt:

$$\widehat{g}_{N(t)}(s) = \left(\frac{b}{b+t(1-s)}\right)^a, \quad |s| < 1.$$

4. Delaporte-Prozess:

$\Lambda \sim$ um $b > 0$ verschobene Gamma-Verteilung mit Dichte:

$$f_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \frac{\eta^a (\lambda-b)^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\eta(\lambda-b)}, & \lambda > b \\ 0, & \lambda \leq b \end{cases}$$

Es gilt folglich:

$$p_k(t) = \int_b^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \frac{\eta^a (\lambda-b)^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{\eta(\lambda-b)} d\lambda, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Übungsaufgabe 3.3.5. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} p_0(t) &= e^{-bt} \left(\frac{\eta}{\eta + t} \right)^a \quad \text{und} \\ \widehat{g}_{N(t)}(s) &= e^{-(1-s)tb} \left(\frac{\eta}{\eta + (1-s)t} \right)^a, \quad |s| < 1. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Satz 3.3.1. Ein Delaporte-Prozess ist äquivalent zu der Summe zweier unabhängiger Zählprozesse:

$$N(t) \stackrel{d}{=} N_1(t) + N_2(t),$$

wobei $N_1(t)$ ein homogener Poisson-Prozess und $N_2(t)$ ein Polya-Prozess ist.

Beweis. Wie wir wissen, bestimmt die erzeugende Funktion die Verteilung einer Zufallsvariable eindeutig. Aus (3.3.6) folgt, dass

$$\widehat{g}_{N(t)}(s) = \widehat{g}_{N_1(t)}(s) \cdot \widehat{g}_{N_2(t)}(s),$$

wobei

$$\widehat{g}_{N_1(t)}(s) = e^{-(1-s)+b}$$

die erzeugende Funktion eines homogenen Poisson-Prozesses $N_1(t)$ mit Parameter b ist, da laut Lemma 3.3.1 $\widehat{g}_{N_1(t)}(s) = \widehat{l}_{\Lambda_1}(t(1-s))$ gilt, wobei $\Lambda_1 = b$ fast sicher. Daraus folgt:

$$\widehat{l}_{\Lambda_1}(s) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} dF_{\Lambda}(\lambda) = e^{-sb},$$

aufgrund von

$$F_{\Lambda}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq b \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}.$$

Außerdem ist

$$\widehat{g}_{N_2(t)}(s) = \left(\frac{\eta}{\eta + (1-s)t} \right)^a$$

die erzeugende Funktion eines Polya-Prozesses $N_2(t)$ (vgl. Übungsaufgabe 3.3.4). Daraus folgt, dass $N(t) \stackrel{d}{=} N_1(t) + N_2(t)$, wobei die $N_i(t)$ unabhängig voneinander sind. \square

Im folgenden Satz werden die Eigenschaften der Schadenankunftszeiten σ_i und Zwischenankunftszeiten T_i beschrieben.

Satz 3.3.2. Sei $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein gemischter Poisson-Prozess mit Mischungsverteilungsfunktion $F_{\Lambda}(\lambda)$. Dann gilt folgendes:

1. Die gemeinsame Dichte von $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ist gegeben durch

$$f_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda x_n} dF_\Lambda(\lambda), & 0 < x_1 < \dots < x_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.3.7)$$

2. Die gemeinsame Dichte von (T_1, \dots, T_n) ist gegeben durch

$$f_{T_1, \dots, T_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)} dF_\Lambda(\lambda), & x_1, \dots, x_n > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.3.8)$$

3. Für $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < t$ ist die bedingte Dichte:

$$f_{\sigma_1, \dots, \sigma_n | N(t)}(x_1, \dots, x_n | n) = f_{\sigma_1, \dots, \sigma_n | \sigma_{n+1}}(x_1, \dots, x_n | t) = \frac{n!}{t^n}$$

Beweis. 1. Sei $b_0 = 0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n = x_n$ eine Folge von beliebigen Zahlen aus \mathbb{R}_+ : Bezeichnen wir mit $N(a, b) = N(b) - N(a)$ die Anzahl der Schäden in (a, b) . Dann gilt:

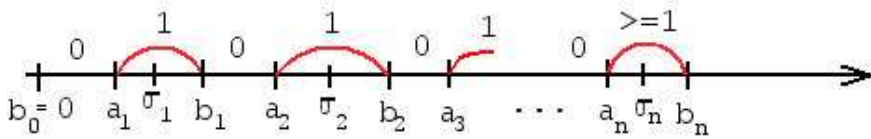


Abbildung 3.3.1: Darstellung der Zwischenankunftszeiten

$$\begin{aligned} & P(a_1 < \sigma_1 \leq b_1, \dots, a_n < \sigma_n \leq b_n) \\ &= P\left(\bigcap_{r=1}^n \{a_r < \sigma_r \leq b_r\}\right) \\ &= P\left(\bigcap_{r=1}^n \{N(b_{r-1}, a_r) = 0\} \cap \right. \\ &\quad \left. \bigcap_{r=1}^{n-1} \{N(a_r, b_r) = 1\} \cap \{N(a_n, b_n) \geq 1\}\right) \\ &= P(A \setminus B) = P(A) - P(B), \end{aligned}$$

wobei $A \supset B$ mit:

$$\begin{aligned} A &= \bigcap_{r=1}^n \{N(b_{r-1}, a_r) = 0\} \cap \bigcap_{r=1}^{n-1} \{N(a_r, b_r) = 1\} \\ B &= A \cap \{N(a_n, b_n) = 0\}. \end{aligned}$$

Laut Formel (3.3.4) bekommt man:

$$\begin{aligned} P(A) &= \prod_{r=1}^n \frac{(a_r - b_{r-1})^0}{0!} \cdot \prod_{r=1}^{n-1} (b_r - a_r) \int_0^{+\infty} \lambda^{n-1} e^{-\lambda s_0} dF_\Lambda(\lambda) \\ &= \prod_{r=1}^{n-1} (b_r - a_r) \int_0^{+\infty} \lambda^{n-1} e^{-\lambda s_0} dF_\Lambda(\lambda), \end{aligned}$$

wobei $s_0 = \sum_{r=1}^{n-1} (a_r - b_{r-1} + b_r - a_r) + a_n - b_{n-1} = a_n$ und

$$\begin{aligned} P(B) &= \prod_{r=1}^{n-1} (b_r - a_r) \int_0^{+\infty} \lambda^{n-1} e^{-\lambda s_1} dF_\Lambda(\lambda) \\ &= \prod_{r=1}^{n-1} (b_r - a_r) \int_0^{+\infty} \lambda^{n-1} e^{-\lambda b_n} dF_\Lambda(\lambda) \end{aligned}$$

wobei $s_1 = s_0 + b_n - a_n = b_n$. Da

$$e^{-\lambda a_n} - e^{-\lambda b_n} = - \int_{a_n}^{b_n} d e^{-\lambda x_n} = \int_{a_n}^{b_n} \lambda e^{-\lambda x_n} dx_n$$

gilt, ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} &P\left(\bigcap_{r=1}^n \{a_r < \sigma_r \leq b_r\}\right) \\ &= \prod_{r=1}^{n-1} (b_r - a_r) \int_0^{\infty} \lambda^{n-1} (e^{-\lambda a_n} - e^{-\lambda b_n}) dF_\Lambda(\lambda) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \int_0^{\infty} \lambda^n e^{-\lambda x_n} dF_\Lambda(\lambda) dx_n \dots dx_1 \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$f_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{\infty} \lambda^n e^{-\lambda x_n} dF_\Lambda(\lambda),$$

falls $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Somit ist (3.3.7) bewiesen.

2. Für beliebige x_1, \dots, x_n gilt aufgrund von $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1} \forall n$:

$$\begin{aligned} & P(T_1 \leq x_1, \dots, T_n \leq x_n) \\ &= P(\sigma_1 \leq x_1, \sigma_2 - \sigma_1 \leq x_2, \dots, \sigma_n - \sigma_{n-1} \leq x_n) \\ &\stackrel{(3.3.7)}{=} \int \dots \int f_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(y_1, \dots, y_n) dy_n \dots dy_1, \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Gleichheit das Gebiet

$$A = \{y_1, \dots, y_n : y_1 \leq x_1, y_2 - y_1 \leq x_2, \dots, y_n - y_{n-1} \leq x_n\}$$

verwendet wurde. Wendet man darauf die Substitution

$$t_1 = y_1, t_2 = y_2 - y_1, \dots, t_n = y_n - y_{n-1}$$

an, aus der folgt, dass

$$y_1 = t_1, y_2 = t_1 + t_2, \dots, y_n = t_1 + \dots + t_n,$$

so gilt:

$$\begin{aligned} & P(T_1 \leq x_1, \dots, T_n \leq x_n) \\ &= \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda y_n} dF_\Lambda(\lambda) dt_n \dots dt_1 \\ &= \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda(t_1 + \dots + t_n)} dF_\Lambda(\lambda) dt_n \dots dt_1 \\ &= \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1 \end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda(t_1 + \dots + t_n)} dF_\Lambda(\lambda)$$

und (3.3.8) ist bewiesen.

3. Definieren wir zunächst die bedingte Dichte von zwei Zufallsvariablen: Setzen wir voraus, dass die gemeinsame Verteilung von zwei Zufalls-

variablen X und Y eine Dichte $f_{XY}(x, y)$ hat. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 P(Y \in B \mid X \in A) &= \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(X \in A)} \\
 &= \frac{\int_A \int_B f_{XY}(x, y) dy dx}{\int_A \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y) dy dx} \\
 &= \int_B \frac{\int_A f_{XY}(x, y) dx}{\int_A f_X(x) dx} dy \\
 &= \int_B f_{Y|x}(y \mid A) dy,
 \end{aligned}$$

woraus folgt, dass

$$f_{Y|x}(y \mid A) = \frac{\int_A f_{XY}(x, y) dx}{\int_A f_X(x) dx}.$$

Analog dazu definiere man für $A = \{x\}$:

$$f_{Y|x}(y \mid x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Es bedeutet, dass die Verteilung von $Y|X$ (als zufälliges Maß $P(Y \in \cdot \mid X)$) auf der Menge der Elementarereignisse $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ eine Dichte $f_{Y|x}(y \mid x)$ hat:

$$P(Y \in B \mid X = x) = \int f_{Y|x}(y \mid x) dy = \frac{\int f_{XY}(x, y) dy}{f_X(x)}$$

Hiermit können wir nun 3) beweisen: Für $0 < x_1, x_2, \dots, x_n < t$ gilt:

$$\begin{aligned}
 &P(\sigma_1 \leq x_1, \dots, \sigma_n \leq x_n \mid N(t) = n) \\
 &= \frac{P(\sigma_1 \leq x_1, \dots, \sigma_n \leq x_n, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\
 &= \frac{P(\sigma_1 \leq x_1, \dots, \sigma_n \leq x_n, \sigma_{n+1} > t)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dF_\Lambda(\lambda)} \\
 (3.3.7) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{\int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \int_t^\infty g(\lambda, t_1, \dots, t_{n+1}) dt_{n+1} dt_n \dots dt_1}{\frac{t^n}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \lambda^n dF_\Lambda(\lambda)}
 \end{aligned}$$

Dabei sei $g(\lambda, t_1, \dots, t_{n+1})$ wie folgt definiert:

$$g(\lambda, t_1, \dots, t_{n+1}) = \int_0^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} \mathbf{1}(0 < t_1 < \dots < t_{n+1}) dF_{\Lambda}(\lambda)$$

wobei zu beachten ist, dass $\mathbf{1}(t_{n+1} > t_n)$ immer gilt, da $t_{n+1} > t > x_n$.
Da folgendes gilt

$$\int_t^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda t_{n+1}} dt_{n+1} = \lambda^n e^{-\lambda t},$$

können wir den Beweis wie folgt fortführen:

$$\begin{aligned} & P(\sigma_1 \leq x_1, \dots, \sigma_n \leq x_n \mid N(t) = n) \\ &= \frac{\int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}(0 < t_1 < \dots < t_n) dt_n \dots dt_1 \int_0^{\infty} \lambda^n e^{-\lambda t} dF_{\Lambda}(\lambda)}{\int_0^{\infty} \lambda^n e^{-\lambda t} dF_{\Lambda}(\lambda)} \\ &= \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}(t_1 < \dots < t_n) dt_n \dots dt_1 \\ &= \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} f_{\sigma_1, \dots, \sigma_n \mid N(t)}(t_1, \dots, t_n \mid n) dt_n \dots dt_1, \end{aligned}$$

Insgesamt folgt, dass

$$f_{\sigma_1, \dots, \sigma_n \mid N(t)}(t_1, \dots, t_n \mid n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{für } 0 < t_1 < \dots < t_n$$

□

Folgerung 3.3.1. 1. Die Zwischenankunftszeiten T_1, \dots, T_n eines gemischten Poisson-Prozesses sind, im Gegensatz zum homogenen Poisson-Prozess, nicht mehr unabhängig voneinander. Es gilt:

$$\text{Cov}(T_i, T_j) = \text{Var}(1/\Lambda), \quad \forall i, j.$$

2. Im Falle eines homogenen Poisson-Prozesses vereinfachen sich die Formeln (3.3.7) und (3.3.8) zu

$$\begin{aligned} f_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}(x_1, \dots, x_n) &= \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda x_n}, & 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ f_{T_1, \dots, T_n}(x_1, \dots, x_n) &= \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)}, & x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Eigenschaft 3) des Satzes 3.3.2 ist gleich der Eigenschaft 2b) der homogenen Poisson-Prozesse aus dem Satz 3.2.1: Unter der Bedingung $\{N(t) = n\}$ hat $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ dieselbe Verteilung wie ein Vektor der Ordnungsstatistiken von n unabhängigen über $[0, t]$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

Folgerung 3.3.2. Für einen gemischten Poisson-Prozess mit Mischungsvariable Λ gilt:

1. Die Dichte von σ_n ist

$$f_{\sigma_n}(x) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dF_{\Lambda}(\lambda) = \frac{n}{x} p_n(x), \quad x > 0$$

– die Dichte der Erlang-Verteilung (d. h., von σ_n für einen homogenen Poisson-Prozess) integriert bezüglich $F_{\Lambda}(\lambda)$.

Weiterhin gilt

$$\hat{l}_{\sigma_n}(s) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^n dF_{\Lambda}(\lambda)$$

und daher

$$E \sigma_n = nE(1/\Lambda) \quad \text{Var } \sigma_n = n^2 \text{Var}(1/\Lambda) + nE(1/\Lambda^2).$$

2. Die Dichte von T_n ist

$$f_{T_n}(x) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dF_{\Lambda}(\lambda) = \frac{p_1(x)}{x}, \quad x > 0$$

– die Dichte der $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung (d. h., von σ_n für einen homogenen Poisson-Prozess) integriert bezüglich $F_{\Lambda}(\lambda)$ und daher

$$E T_n = E(1/\Lambda) \quad \text{Var } T_n = \text{Var}(1/\Lambda) + E(1/\Lambda^2).$$

Übungsaufgabe 3.3.6. Beweisen Sie die Folgerung 3.3.2.

Die Größen $E(1/\Lambda)$, $E(1/\Lambda^2)$ und $\text{Var}(1/\Lambda)$ müssen nicht unbedingt endlich sein.

3.4 Markovsche Prozesse

In diesem Abschnitt behandeln wir eine allgemeine Klasse der stochastischen Prozesse, die sogenannten *inhomogenen Markov-Ketten in stetiger Zeit*, die ihre Anwendung in der Lebens- und Rentenversicherung finden. Gleichzeitig liefern sie neue Modelle der Schadenanzahlprozesse, die eine bestimmte

Abhängigkeitsstruktur haben. Am Ende des Abschnittes werden wir zeigen, dass der gemischte Poisson-Prozess einen Spezialfall der Markov-Ketten bildet.

Im Kapitel 5 wird das sogenannte *Bonus-Malus-Prämienkalkulationsprinzip* aus der Kfz-Versicherung behandelt werden, das auch von den Markov-Ketten Gebrauch macht.

Zunächst werden wir den Prozess heuristisch beschreiben, so dass später die strikten mathematischen Definitionen verständlich werden. Sei $E = \{E_1, E_2, \dots\}$ ein (*höchstens abzählbarer*) Zustandsraum. Später werden wir statt E_i einfach i als Bezeichnung benutzen. Die Entwicklung eines Markov-Prozesses $\{X(t) : t \geq 0\}$ wird folgendermaßen beschrieben: Falls zum Zeitpunkt s , $X(s) = i$ gilt, so hängt die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von X zum Zeitpunkt t in den Zustand j , $p_{ij}(s, t)$ nicht von der Vergangenheit des Prozesses $X = \{X(u), u < s\}$ ab:

$$\begin{aligned} P(X(t) = j \mid X(s) = i, X(u_k) = i_k, \dots, X(u_0) = i_0) \\ &= P(X(t) = j \mid X(s) = i) \\ &= p_{ij}(s, t) \quad \forall u_0 \leq \dots \leq u_k \leq s, \quad \forall i_0, \dots, i_n, i, j \in E \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten heißen *Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette X* . Falls $p_j(t) = P(X(t) = j)$, $j \in E$, so heißt $\{p_j(0) : j \in E\}$ die *Anfangsverteilung von X* .

Seien eine Anfangsverteilung $\{p_i(0) : i \in E\}$ und entsprechende Übergangswahrscheinlichkeiten $\{p_{ij}(s, t) : i, j \in E, s, t \geq 0\}$ gegeben, so ist die Verteilung der Markov-Kette X eindeutig festgelegt: In der Tat ist für beliebige $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ und $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ die endlich-dimensionale Verteilung von X

$$\begin{aligned} P(X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n) \\ &= p_{i_0}(t_0) \cdot p_{i_0, i_1}(t_0, t_1) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1}, i_n}(t_{n-1}, t_n) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

durch $\{p_i(0) : i \in E\}$ und $\{p_{ij}(s, t) : i, j \in E, s, t \geq 0\}$ eindeutig festgelegt und somit auch (nach dem Satz von Kolmogorov) die Verteilung von X .

Die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit liefert uns folgende Gleichungen für $\{p_{ij}(s, t) : i, j \in E, s, t \geq 0\}$, die *Chapman-Kolmogorov-Gleichungen* heißen:

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(s, u) \cdot p_{kj}(u, t), \quad \forall i, j \in E, 0 \leq s \leq u \leq t. \quad (3.4.2)$$

Wenn man die Matrix $P(s, t) = \{p_{ij}(s, t) : i, j \in E\}$ einführt, so schreibt sich (3.4.2) in Matrix-Form als

$$P(s, t) = P(s, u) \cdot P(u, t) \quad (3.4.3)$$

Diese Matrizen heißen *stochastische Matrizen* und erfüllen folgende Bedingungen:

$$p_{ij}(s, t) \geq 0, \quad \forall i, j \in E \quad \text{und} \quad \sum_{j \in E} p_{ij}(s, t) = 1, \quad \forall i \in E$$

Es gilt zusätzlich, dass

$$P(t, t) = \mathbf{I}, \quad \forall t \geq 0$$

Jetzt sind wir bereit, präzise mathematische Definitionen anzugeben:

Definition 3.4.1. Eine Matrix $P = (p_{ij})_{i, j \in E}$ heißt *stochastisch*, falls

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in E \quad \text{und} \quad \sum_{j \in E} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in E.$$

Definition 3.4.2. Sei eine Familie von stochastischen Matrizen $P(s, t) = \{p_{ij}(s, t) : i, j \in E\}$ für $s, t \geq 0$ und $s \leq t$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

1. $P(t, t) = \mathbf{I}, \quad \forall t \geq 0$
2. $\forall 0 \leq s \leq u \leq t$ gelte (3.4.3).

Dann heißt die Familie $\{P(s, t), s, t \geq 0, s \leq t\}$ *Matrizen-Übergangsfunktion*.

Definition 3.4.3. Ein stochastischer Prozess $\{X(t) : t \geq 0\}$ mit Zustandsraum E (wobei E höchstens abzählbar ist) heißt (*inhomogener*) *Markov-Prozess*, falls eine Matrizen-Übergangsfunktion $\{P(s, t) : s, t \geq 0, s \leq t\}$ und eine Anfangsverteilung $P(0) = \{p_i(0) : i \in E\}$ existiert, so dass $\forall n \in \mathbb{N}, i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ und $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ (3.4.1) gilt:

Solche Prozesse (natürlich in einer viel einfacheren Form) wurden zum ersten Mal von dem *russischen Mathematiker Andrei Andreyerich Markov* (1856 – 1922) betrachtet, der mit ihrer Hilfe die Häufigkeiten von verschiedenen Buchstaben-Muster im Gedicht „Eugen Onegin“ von A. Puschkin analysierte.

Der allgemeine Begriff „Markov-Prozesse“ bezieht sich auf Prozesse mit allgemeinem (d. h., nicht abzählbarem) Zustandsraum E . Von einer Markov-Kette spricht man, wenn E höchstens abzählbar ist. Falls die Zeit t diskret/stetig ist, so spricht man von einem Markov-Prozess $\{X(t) : t \geq 0\}$ in diskreter/stetiger Zeit.

Definition 3.4.4. Ein Markov-Prozess heißt *homogen*, falls

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(t - s), \quad \forall i, j \in E, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Im nächsten Satz formulieren wir eine zu Definition 3.4.3 äquivalente Definition eines Markov-Prozesses, die die *Markov-Eigenschaft (3.4.4)* benutzt:

Satz 3.4.1. *Ein E -wertiger stochastischer Prozess $\{X(t) : t \geq 0\}$ ist ein Markov-Prozess genau dann, wenn eine Matrizen-Übergangsfunktion $\{P(s, t) : 0 \leq s \leq t\}$ existiert, so dass $\forall n \in \mathbb{N}, i_0, i_1, \dots, i_n \in E$ und $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ folgendes gilt:*

$$\begin{aligned} P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0) \\ &= P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}) \\ &= p_{i_{n-1}, i_n}(t_{n-1}, t_n) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

vorausgesetzt, dass

$$P(X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0) > 0.$$

Beweis. 1. „ \Rightarrow “: Falls $X(t)$ eine Markov-Kette ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0) \\ &= \frac{P(X(t_n) = i_n, \dots, X(t_0) = i_0)}{P(X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0)} \\ &\stackrel{(3.4.1)}{=} \frac{p_{i_0}(t_0) \cdot p_{i_0 i_1}(t_0, t_1) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1}, i_n}(t_{n-1}, t_n)}{p_{i_0}(t_0) \cdot p_{i_0 i_1}(t_0, t_1) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-2}, i_{n-1}}(t_{n-2}, t_{n-1})} \\ &= p_{i_{n-1}, i_n}(t_{n-1}, t_n). \end{aligned}$$

2. „ \Leftarrow “: Induktion nach n :

Für $n = 1$ gilt nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p_{i_0}(t_0) = 0 \\ p_{i_0}(t_0) \cdot p_{i_0 i_1}(t_0, t_1), & \text{falls } p_{i_0}(t_0) > 0 \end{cases}$$

Für $n = k - 1$ sei (3.4.1) richtig.

Für $n = k$: Sei

$$P(X(t_0) = i_0, \dots, X(t_{k-1}) = i_{k-1}) = 0,$$

dann ist auch

$$P(X(t_0) = i_0, \dots, X(t_k) = i_k) = 0.$$

Sei nun

$$P(X(t_0) = i_0, \dots, X(t_{k-1}) = i_{k-1}) > 0.$$

Dann gilt folgendes

$$\begin{aligned}
 & P(X(t_0) = i_0, \dots, X(t_k) = i_k) \\
 &= P(X(t_k) = i_k \mid X(t_{k-1}) = i_{k-1}, \dots, X(t_0) = i_0) \cdot \\
 &\quad \cdot P(X(t_0) = i_0, \dots, X(t_{k-1}) = i_{k-1}) \\
 &= \underbrace{p_{i_{k-1}, i_k}(t_{k-1}, t_k)}_{\text{nach (3.4.4)}} \cdot \underbrace{p_{i_0 i_1}(t_0, t_1) \cdot \dots \cdot p_{i_{k-2}, i_{k-1}}(t_{k-2}, t_{k-1})}_{\text{nach Induktionsschritt}} \\
 &= p_{i_0}(t_0) \cdot p_{i_0 i_1}(t_0, t_1) \cdot \dots \cdot p_{i_{k-1}, i_k}(t_{k-1}, t_k),
 \end{aligned}$$

und (3.4.4) ist bewiesen. □

Beispiele

1. Zufällige Irrfahrt auf \mathbb{Z} :

Sei $E = \mathbb{Z}$ und die Zeit $t \in \mathbb{N}$ diskret. Es wird der Prozess der zufälligen Wanderung eines Teilchens auf ganzzahligen Positionen betrachtet. Sei am Anfang ($t = 0$) das Teilchen in Position i_0 gewesen. In jedem Schritt wird es nach rechts mit Wahrscheinlichkeit p und nach links mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ um eine Position verschoben. Sei $X(t)$ die Position des Teilchens nach t Schritten. Laut der Markov-

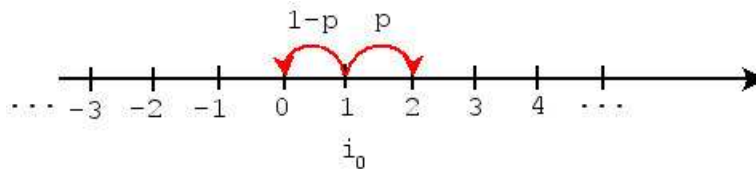


Abbildung 3.4.1: Position des Teilchens nach einem Schritt

Eigenschaft (3.4.4) des Prozesses $X(t)$ gilt aber: Die Position $X(t)$ des Teilchens hängt nur von der letzten Position $X(t-1)$ und nicht von $X(0), \dots, X(t-2)$ ab. Weiterhin gilt, dass

$$p_{ij}(t) = 0, \quad \text{für } |i - j| > t.$$

Dann kann das Teilchen den Zustand j aus i in t Schritten nur erreichen, wenn t und $|i - j|$ entweder beide gerade oder beide ungerade sind, d. h.,

$$m = \frac{t + |i - j|}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Falls $j \geq i$ ist, wird der Zustand j nur dann erreicht, wenn $t - |i - j| = 2k$ gilt, d. h., man macht $|i - j| + k = m$ Schritte nach rechts. Die

Wahrscheinlichkeit davon ist dann

$$p_{ij}(t) = \binom{t}{m} p^m q^{t-m}$$

– die $Bin(t, p)$ -Verteilung. Genauso kann man zeigen, dass für $j \leq i$

$$p_{ij}(t) = \binom{t}{m} p^{t-m} q^m$$

– die $Bin(t, q)$ -Verteilung gilt.

2. Bonus–Malus–System in der Kfz–Versicherung:

Das Bonus–Malus–System ist ein bekanntes Prinzip der Prämienkalkulation auf der Basis einer homogenen Markov–Kette in diskreter Zeit mit endlichem Zustandsraum E . Jede Police kann einer der l möglichen *Tarifgruppen* angehören, und die Prämienhöhe, die der Versicherte im laufenden Jahr zu bezahlen hat, hängt von dieser Tarifgruppe ab. Die Aufteilung in Tarifgruppen ändert sich von Jahr zu Jahr, je nach Anzahl der Schäden, die von der Police stammen: Bei einem *unfallfreien Jahr* erhält der Kunde einen *Bonus*, d. h., er geht in eine Tarifklasse mit einem niedrigeren jährlichen Prämienatz über. Bei k *Unfällen im Jahr* erhält der Versicherte einen *Malus*, d. h., er bekommt eine Tarifklasse mit einem höheren jährlichen Prämienatz zugewiesen.

Seien die Tarifklassen so durchnummeriert, dass die erste Klasse *Superbonusklasse* und die letzte, l -te Klasse *Supermalusklasse* heißt. Dementsprechend sind die Prämienhöhen $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \dots \leq \pi_l$. Bezeichnen wir die ursprüngliche Klasse, mit der ein neuer Kunde zu rechnen hat, wenn er den Führerschein erst vor kurzem gemacht hat, mit i_0 .

Seien X_0, X_1, X_2, \dots die *konsequenten Tarifklassennummern* einer Police nach Jahren geordnet. Wir werden jetzt zeigen, dass $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ eine *homogene Markov–Kette in diskreter Zeit mit Zustandsraum* $E = \{1, \dots, l\}$ ist. Sei Y_n die Anzahl der Schäden im Jahr n , die aus der gegebenen Police entstanden sind und dem Versicherer gemeldet worden sind. Wir setzen voraus, dass $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge von uiv Zufallsvariablen mit der Verteilung $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ ist, wobei $p_k = P(Y_i = k)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sei

$$t_{ij}(k) = \begin{cases} 1, & \text{falls die Police von der Klasse } i \text{ nach } j \text{ übergeht} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

und es sei vorausgesetzt, dass im laufenden Jahr k Schäden gemeldet worden sind.

Es ist leicht zu sehen, dass folgende rekursive Gleichung gilt:

$$\begin{cases} X_n = \varphi(X_{n-1}, Y_n) n \in \mathbb{N}, \text{ wobei } \varphi(i, k) = j \Leftrightarrow t_{ij}(k) = 1 \\ X_0 = i_0. \end{cases}$$

Der Übergangsmechanismus φ , der von $t_{ij}(\cdot)$ eindeutig festgelegt ist, verrät die Markov-Struktur des Prozesses $\{X_n\}_{n=0}^\infty$, siehe folgende

Übungsaufgabe 3.4.1. *Beweisen Sie:*

Ein stochastischer Prozess $X = \{X_n\}_{n=0}^\infty$ mit (höchstens abzählbarem) Zustandsraum E ist eine homogene Markov-Kette genau dann, wenn eine Update-Funktion $\varphi : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ und eine Folge $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ von iiv Zufallsvariablen existiert, so dass der stochastische Prozess $X' = \{X'_n\}_{n=0}^\infty$ mit

$$X'_0 \stackrel{d}{=} X_0 \quad \text{und} \quad X'_n = \varphi(X'_{n-1}, Y_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.4.5)$$

stochastisch äquivalent zu X ist, d. h., wenn alle endlichdimensionalen Verteilungen von X und X' gleich sind. Für Markov-Ketten ist diese Anforderung äquivalent dazu, dass die Anfangsverteilungen von X und X' und die Matrizen-Übergangsfunktionen gleich sind.

Beweis. Der Beweis der Aussage ist im Buch [20] §7.1.3, Seite 276-277 zu finden. \square

Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(1)$ der Bonus-Malus-Markovkette sind somit

$$p_{ij}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t_{ij}(k),$$

was aus der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit folgt. In der Praxis ist $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ oft eine Poisson-Verteilung mit Parameter $p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Somit ist

$$p_{ij}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{ij}(k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

In den Tabellen 3.4.1 und 3.4.2 sind die Besonderheiten des deutschen Bonus-Malus-Systems (bis zum Jahr 2002) dargestellt.

So wurden 18 Tarifklassen ausgegliedert, die *Schadenfreiheitsklassen* genannt werden. Dabei können sich die Tarifprozentsätze von Versicherungsunternehmen zu Versicherungsunternehmen stark unterscheiden. In dem Beispiel erhält ein Kunde mit frisch gemachtem Führerschein die Tarifklasse 14 ($\approx 130\%$). Die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(1)$ sind in der Tabelle 3.4.2 dargestellt. Seit 2002 gibt es in der Haftpflicht- sowohl wie auch (seit 2003) in der Vollkaskoversicherung 25 Schadenfreiheitsklassen plus drei zusätzliche Malus-Klassen 1/2, 0 und M, siehe Tabelle 3.4.3.

Ähnlich wie beim Bonus-Malus-System werden auch jährlich alle Fahrzeuge in die Typ- und Regionalklassen vom *Gesamtverband der Versicherungswirtschaft* eingestuft, je nach der Anzahl der Unfälle bei

Tarifklasse	Prämienatz	Tarifklasse nach 1 Jahr (nach Schadenanzahl)				
		0	1	2	3	4, 5...
18	200	13	18	18	18	18
17	200	13	18	18	18	18
16	175	13	17	18	18	18
15	175	13	16	17	18	18
14	125	13	16	17	18	18
13	100	12	14	16	17	18
12	85	11	13	14	16	18
11	70	10	13	14	16	18
10	65	9	12	13	14	18
9	60	8	11	13	14	18
8	55	7	11	13	14	18
7	50	6	11	13	14	18
6	45	5	11	13	14	18
5	40	4	10	12	13	18
4	40	3	9	11	13	18
3	40	2	8	11	13	18
2	40	1	7	11	13	18
1	40	1	7	11	13	18

Tabelle 3.4.1: Deutsches Bonus–Malus–System (bis 2002)

$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18				
1	{0}	{1}	.	.	.	{2}	.	{3}	{4, 5, .}				
2	{0}	{1}	.	.	.	{2}	.	{3}	{4, 5, .}				
3	.	{0}	{1}	.	.	{2}	.	{3}	{4, 5, .}				
4	.	.	{0}	{1}	.	{2}	.	{3}	{4, 5, .}				
5	.	.	.	{0}	{1}	.	{2}	{3}	{4, 5, .}				
6	{0}	{1}	.	{2}	{3}	.	.	.	{4, 5, .}				
7	{0}	{1}	.	{2}	{3}	.	.	{4, 5, .}				
8	{0}	{1}	.	{2}	{3}	.	{4, 5, .}				
9	{0}	{1}	.	{2}	{3}	{4, 5, .}				
10	{0}	{1}	{2}	{3}	{4, 5, .}				
11	{0}	{1}	{2}	{3}	{4, 5, .}			
12	{0}	{1}	{2}	{3}	{4, 5, .}		
13	{0}	{1}	{2}	{3}	{4, 5, .}	
14	{0}	{1}	{2}	{3, 4, .}	
15	{0}	{1}	{2}	{3, 4, .}
16	{0}	{1}	{2, 3, .}
17	{0}	{1, 2, .}
18	{0}	{1, 2, .}

Bezeichnung:

- $\cdot = 0$
- $\{k\} = p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\{k, k+1, \cdot\} = \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$

Tabelle 3.4.2: Entsprechende Übergangswahrscheinlichkeiten $\{p_{ij}(1)\}$

Haftpflicht			Vollkasko		
SF-Klasse	Beitrags-satz	SF-Rück-stufung nach 1 Schaden	SF-Klasse	Beitrags-satz	SF-Rück-stufung nach 1 Schaden
25	30	18	25	30	23
24	30	15	24	30	15
23	30	15	23	30	15
22	30	15	22	35	14
21	30	11	21	35	13
20	30	11	20	35	12
19	30	11	19	35	11
18	30	10	18	35	10
17	35	7	17	40	9
16	35	7	16	40	9
15	35	6	15	40	9
14	40	6	14	40	8
13	40	5	13	45	8
12	40	5	12	45	7
11	40	5	11	45	6
10	45	4	10	50	6
9	45	4	9	50	5
8	50	4	8	55	4
7	50	3	7	60	4
6	55	2	6	60	3
5	60	2	5	65	2
4	65	1	4	70	2
3	75	1	3	80	1
2	85	1/2	2	85	1
1	100	1/2	1	100	1/2
1/2	125	S	1/2	115	0
S	155	M	0	125	M
0	240	M	M	160	M
M	245	M			

Bleibt: Haftpflicht-Staffel bis SF 25

Erweitert: Statt bis SF 18 geht es jetzt bis SF-Klasse 25

Tabelle 3.4.3: Deutsches Bonus-Malus-System (ab 2003)

Fünf Pkw-Modelle: So teuer sind die Typklassen

Fahrzeug	VK	TypK	TK	TypK
Typklassen bestehender Verträge bis 31.12.2003				
Toyota Yaris 1.0 (48 kW)	748,80	15	94,60	18
Golf 1.6 (74 kW)	672,50	14	147,50	25
BMW 318 l (85 kW)	1056,30	18	171,10	27
Mercedes E 240 (120 kW)	1227,60	20	221,90	32
Renault Mégane Cabrio 2.0 (103 kW)	1417,20	22	339,90	35
Typklassen bestehender Verträge ab 01.01.2004				
Toyota Yaris 1.0 (48 kW)	771,20	15	127,30	22
Golf 1.6 (74 kW)	771,20	15	168,80	26
BMW 318 l (85 kW)	1088,10	18	151,90	25
Mercedes E 240 (120 kW)	1459,60	22	228,60	32
Renault Mégane Cabrio 2.0 (103 kW)	1264,40	20	350,10	35
Typklassen für neu zugelassene Fahrzeuge				
Toyota Yaris 1.0 (48 kW)	787,50	16	132,80	16
Golf 1.6 (74 kW)	721,50	15	149,60	17
BMW 318 l (85 kW)	968,60	18	149,60	17
Mercedes E 240 (120 kW)	1458,60	23	203,10	20
Renault Mégane Cabrio 2.0 (103 kW)	1342,10	22	281,60	23

VK: Vollkasko, TK: Teilkasko, TypK: Typklasse

So wurde gerechnet: Zulassungsort Köln; Jahresfahrleistung 15000 km; Nutzung privat; Nutzerkreis: Versicherungsnehmer und Partner (beide über 25 Jahre); Garage; SF-Klasse 1 (100%) in Haftpflicht (HK) und Vollkasko (VK); Neufahrzeug; Nomaltarif; VK: 300 Euro, TK: 150 Euro SB; kein Wohneigentum

Tabelle 3.4.4: Fünf Pkw-Modelle im Vergleich

Fahrzeugen gleicher Bauart im letzten Jahr, siehe Tabelle 3.4.4. Die Einstufungen folgen auch einer Markov-Kette.

3. Radioaktiver Zerfall:

Es ist bekannt, dass Radium-Atome mit der Zeit in Radon-Atome übergehen: $Ra \rightarrow Rn + \alpha$. Bei diesem radioaktiven Zerfall wird ein α -Teilchen, der Atomkern von Helium, erzeugt. Falls jedes Radium-Atom unabhängig von den anderen bis zur Zeit t mit Wahrscheinlichkeit $p(t)$ in ein Radon-Atom verwandelt wird, so wird die Anzahl $N(t)$ der zerfallenen Atome von Radium bis zur Zeit t gleich der Anzahl der α -Teilchen sein. $N(t)$ ist nach der Poisson-Approximation der Binomialverteilung poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = np(t)$, wobei n die ursprüngliche Anzahl der Radium-Atome ist:

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Sei $X(t) = n - N(t)$ die restliche Anzahl der Ra-Atome. Falls $X(s) = i$, so ist die Anzahl $N(t) - N(s)$ der im Zeitintervall (s, t) erzeugten α -Teilchen unabhängig von der Vergangenheit und $Poisson(ip(t-s))$ -verteilt. Somit ist $X(t)$ eine *homogene Markov-Kette* in stetiger Zeit mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij}(s, t) = \begin{cases} \frac{\lambda_1^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\lambda_1}, & \text{falls } j \leq i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{wobei } \lambda_1 = ip(t-s).$$

Weiterhin werden in diesem Abschnitt ausschließlich Markov-Ketten in stetiger Zeit mit dem Zustandsraum $E = \mathbb{N} \cup \{0\}$ behandelt. Setzen wir voraus, dass folgendes für die Matrizen-Übergangsfunktion $P(t, s)$ von X gilt:

(a) $P(s, t)$ ist *stetig* in t , $\forall t \geq 0$, d. h.,

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} P(0, t) = \mathbf{I}, \quad \lim_{s \rightarrow t_+} P(s, t) = \lim_{s \rightarrow t_-} P(s, t) = \mathbf{I}, \quad \forall t > 0. \quad (3.4.6)$$

(b) Für fast alle $t > 0$ existieren die Grenzwerte

$$Q(t) = \lim_{s \rightarrow t_-} \frac{P(t, s) - \mathbf{I}}{s - t} = \lim_{s \rightarrow t_+} \frac{P(s, t) - \mathbf{I}}{t - s}. \quad (3.4.7)$$

Für alle anderen $t > 0$ setzen wir $Q(t) = 0$. Die Matrix $Q(t) = (q_{ij}(t))_{i, j \in E}$ heißt *Matrizen-Intensitätsfunktion* von X .

Sie hat folgende offensichtliche Eigenschaften: $\forall t > 0$

$$\begin{aligned} q_{ij}(t) &= \lim_{s \rightarrow t_+} \frac{p_{ij}(t, s)}{s - t} \geq 0, \quad i \neq j \\ q_{ii}(t) &= \lim_{s \rightarrow t_+} \frac{p_{ii}(t, s) - 1}{s - t} \leq 0, \quad \forall i \in E \\ \sum_{j \in E} q_{ij}(t) &= 0, \text{ d. h., } -q_{ii}(t) = \sum_{j \neq i} q_{ij}(t). \end{aligned}$$

Die letzte Eigenschaft folgt aus der Additivität des Limes. Bezeichnen wir mit $q_i(t)$ die Summe

$$q_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \neq i} q_{ij}(t) = -q_{ii}(t).$$

Die Forderungen (3.4.6) und (3.4.7) sind wesentlich, und es existieren Markov-Ketten, für die sie nicht erfüllt sind.

Beispiel 3.4.1. *Betrachten wir eine Markov-Kette mit zwei Zuständen 1 und 2, abhängig von der Dauer der Lebenszeit T des Versicherten:*

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T > t \\ 2, & \text{falls } T \leq t \end{cases}$$

Die Zufallsvariable $T \geq 0$ kann beliebig verteilt sein: Falls $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, so ist $X(t)$ eine homogene Markov-Kette mit Matrizen-Intensitätsfunktion

$$Q(t) \equiv Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.8)$$

Falls die Verteilung von T durch

$$P(T > t) = \exp\left(-\int_0^t m(x) dx\right)$$

gegeben ist, wobei $m(x)$ eine gültige Hazardratefunktion ist (vgl. Definition 2.2.4), so ist $X(t)$ eine nicht-homogene Markov-Kette mit den folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(s, t) = \begin{pmatrix} e^{-\int_s^t m(x) dx} & 1 - e^{-\int_s^t m(x) dx} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.9)$$

und Matrizen-Intensitätsfunktion

$$Q(t) = \begin{pmatrix} -m(t) & m(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.10)$$

Die Matrix $Q(t)$ existiert, wenn $m(t)$ stetig in t ist (hinreichende Bedingung!).

Übungsaufgabe 3.4.2. *Beweisen Sie dies und die Formeln (3.4.8) bis (3.4.10).*

Die letzte Forderung, die an die Markov-Kette $\{X(t), t \geq 0\}$ gestellt werden muss, ist die *Stabilität all ihrer Zustände*, d. h.,

$$(c) \quad q_i(t) < \infty, \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ohne auf die technischen Details einzugehen, hat die Forderung (c) folgende Bedeutung: Wenn die Kette $X(t)$ im Moment Null ($t = 0$) in einem stabilen Zustand i $X(0) = i$ ist ($q_i(t) < \infty, \forall t, i$), dann bedeutet dies, dass die Zeit $\tau_i = \inf\{t \geq 0 : X(t) \neq i, X(0) = i\}$, die der Prozess im Zustand i verbringt, fast sicher positiv ist:

$$P(\tau_i > 0 \mid X(0) = i) = 1.$$

Wenn dies für alle Zustände $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt, so hat es zur Folge, dass die Kette $X(t)$ in jedem endlichen Zeitintervall (s, t) eine endliche Anzahl von Zustandsänderungen mit Wahrscheinlichkeit 1 erlebt. Das heißt, dass die Kette $X(t)$ in einem endlichen Zeitintervall nicht in die Unendlichkeit gehen kann. Wenn umgekehrt $q_i(t) = \infty$ für ein $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist, so folgt daraus, dass

$$P(\tau_i > 0 \mid X(0) = i) = 1,$$

d. h., dass die Kette $X(t)$ den Zustand i sofort nach der Ankunft verlässt. Zusätzlich kann gezeigt werden, dass $X(t)$ auf jedem Zeitintervall $(0, \Delta t)$ für $\Delta t \rightarrow 0$ unendlich oft in den Zustand i zurückkehrt und ihn wieder verlässt.

Die Voraussetzungen (a)-(c) sind erforderlich, um folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.4.2. *Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ eine Markov-Kette, die die Voraussetzungen (a)-(c) erfüllt. Dann existieren für alle $i, j \in E, \forall 0 \leq s < t$, für die (3.4.7) gilt, partielle Ableitungen $\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s}$ und $\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t}$, und es gelten folgende Systeme von Differentialgleichungen:*

1. Vorwärtsgleichungen von Kolmogorov:

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t} = \sum_{k \in E} p_{ik}(s,t) q_{kj}(t), \quad \forall i, j \in E \quad (3.4.11)$$

In Matrixform:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(s,t)}{\partial t} = P(s,t) \cdot Q(t) \\ P(s,s) = \mathbf{I}, \quad \forall s \geq 0 \end{cases}$$

2. Rückwärtsgleichungen von Kolmogorov:

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial s} = - \sum_{k \in E} q_{ik}(s) p_{kj}(s, t), \quad \forall i, j \in E \quad (3.4.12)$$

In Matrixform:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} = -Q(s) \cdot P(s, t) \\ P(t, t) = \mathbf{I}, \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Beweis. Beweisen wir nun (3.4.11). Der Beweis von (3.4.12) geht analog dazu.

Für beliebiges $\Delta t > 0$ folgt aus den Kolmogorov-Chapman-Gleichungen (3.4.2), dass

$$\begin{aligned} p_{ij}(s, t + \Delta t) - p_{ij}(s, t) &= \sum_{k \in E} p_{ik}(s, t) p_{kj}(t, t + \Delta t) - p_{ij}(s, t) \\ &= p_{ij}(s, t) (p_{jj}(t, t + \Delta t) - 1) \\ &\quad + \sum_{k \neq j} p_{ik}(s, t) p_{kj}(t, t + \Delta t) \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(s, t + \Delta t) - p_{ij}(s, t)}{\Delta t} \\ &= p_{ij}(s, t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{p_{jj}(t, t + \Delta t) - 1}{\Delta t} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(s, t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{p_{kj}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= p_{ij}(s, t) q_{jj}(t) + \sum_{k \neq j} p_{ik}(s, t) q_{kj}(t) \\ &= \sum_{k \in E} p_{ik}(s, t) q_{kj}(t). \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Reihenfolge von \lim und $\sum_{k \neq j}$ ist möglich, weil

$$\sum_{k \neq j} p_{ik}(s, t) p_{kj}(t, t + \Delta t)$$

in Δt gleichmäßig konvergiert. Dies gilt aufgrund der folgenden Eigenschaften:

1. $p_{ik}(s, t) p_{kj}(t, t + \Delta t) \leq p_{ik}(s, t)$ und $\sum_{k \neq j} p_{ik}(s, t) = 1 - p_i$.
2. $p_{ij}(s, t)$ ist in s und t stetig, siehe (3.4.6).

Im Beweis von (3.4.12) wird außer (3.4.2) noch die Stetigkeit von (3.4.6) gebraucht, vgl. das Buch von [20], S.32-34. \square

Bemerkung 3.4.1. Die Forderung (c) garantiert, dass die Gleichungssysteme (3.4.11) und (3.4.12) eine eindeutige Lösung haben. Im allgemeinen ist es nicht der Fall.

Beispiele:

1. **Geburts- und Todesprozesse** entstehen dann, wenn $\forall i \in E$ $q_{ij}(t) \equiv 0$ für alle $j \neq i-1, i, j+1$ ist. Dies bedeutet, dass aus dem Zustand i der Prozess $X(t)$ entweder in i bleibt oder nach $i \pm 1$ geht. Der Übergang $i \mapsto i+1$ wird als eine Geburt und $i \mapsto i-1$ wird als Tod interpretiert. Falls $q_{i,i-1}(t) = 0, \forall i \in E$, so heißt $\{X(t), t \geq 0\}$ ein reiner Geburtsprozess. Geburtsprozesse sind dafür geeignet, die Schadenanzahl $\{N(t), t \geq 0\}$ zu modellieren.

Falls ein Geburtsprozess (a)-(c) erfüllt, so folgt daraus, dass

$$q_{i,i-1}(t) = -q_{ii}(t) = q_i(t) < \infty, \quad \forall i \in E,$$

und die Vorwärtsgleichungen von Kolmogorov sehen folgendermaßen aus:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial t} = p_{ij-1}(s, t) q_{j-1}(t) - p_{ij}(s, t) q_j(t), & i \neq j \\ \frac{\partial p_{jj}(s, t)}{\partial t} = -p_{jj}(s, t) q_j(t), & i = j \\ p_{ij}(s, s) = \delta_{ij}, & \forall i, j \in E \end{cases}$$

Wenn man die Bezeichnung

$$\alpha_i(t) = p_{0i}(0, t), \quad \forall t \geq 0, i \in E$$

einführt, so folgt aus dem obigen Gleichungssystem für $s = 0, i = 0$ und $j = i$, dass

$$\begin{cases} \alpha'_i(t) = q_{i-1}(t) \alpha_{i-1}(t) - q_i(t) \alpha_i(t), & i \in \mathbb{N} \\ \alpha'_0(t) = -q_0(t) \alpha_0(t), & i = 0 \\ \alpha_i(0) = \delta_{i0} \end{cases} \quad (3.4.13)$$

2. Ein **Polya-Prozess** ist ein Geburtsprozess aus Punkt 1) mit Intensitäten

$$q_i(t) = \frac{a+i}{b+t}, \quad i \in E, \quad t \geq 0,$$

wobei $a, b \geq 0$ konstante Parameter sind. Dann sieht das System (3.4.13) folgendermaßen aus:

$$\begin{cases} \alpha'_i(t) = \frac{a+i-1}{b+t} \alpha_{i-1}(t) - \frac{a+i}{b+t} \alpha_i(t), & i \in \mathbb{N} \\ \alpha'_0(t) = -\frac{a}{b+t} \alpha_0(t) \\ \alpha_0(0) = \delta_{i0} \end{cases}$$

Übungsaufgabe 3.4.3. Zeigen Sie, dass das obige Gleichungssystem folgende Lösung hat:

$$\alpha_i(t) = \binom{a+i-1}{i} \left(\frac{b}{t+b}\right)^a \left(\frac{t}{t+b}\right)^i, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, t \geq 0$$

Dies ist äquivalent dazu, dass $\{\alpha_i(t), i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ eine Negativbinomialverteilung $NB(a, \frac{t}{t+b})$ besitzt.

3. Ein **Homogener Poisson-Prozess** $\{N(t) : t \geq 0\}$ mit Intensität λ ist offensichtlich ein homogener Geburtsprozess mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_{ij}(s, t) &= P(N(t) = j \mid N(s) = i) \\ &= \begin{cases} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i \\ 0, & j < i \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_{ij}(t-s) = p_{0, j-i}(t-s) = \alpha_{j-i}(t-s), & j \geq i \\ 0, & j < i \end{cases} \end{aligned}$$

Daraus kann man leicht berechnen, dass

$$q_{ij}(t) = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1 \\ -\lambda, & j = i, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.4.14)$$

Umgekehrt gilt das folgende Lemma:

Lemma 3.4.1. Sei $\{X(t) : t \geq 0\}$ ein homogener Geburtsprozess mit Intensitätsfunktion (3.4.14), für den (3.4.6) und $p_{ij}(t) = \alpha_{j-i}(t-s)$ gelten. Daraus folgt, dass

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i, \forall t \geq 0 \\ 0, & j < i \end{cases}$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass nach Satz 3.4.2 das Gleichungssystem (3.4.13) gilt. Mit Hilfe von (3.4.14) kann es wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{cases} \alpha'_0(t) = -\lambda \alpha_0(t) \\ \alpha'_i(t) = \lambda \alpha_{i-1}(t) - \lambda \alpha_i(t), \quad i \in \mathbb{N} \\ \alpha_i(0) = \delta_{i0} \end{cases}$$

Wenn man die Substitution $y_i(t) = e^{\lambda t} \alpha_i(t)$ vornimmt, gilt somit:

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= \lambda y_0(t) + e^{\lambda t} \alpha_0'(t) = \lambda y_0(t) - \lambda e^{\lambda t} \alpha_0(t) \\ &= \lambda(y_0(t) - y_0(t)) = 0 \\ y_i'(t) &= \lambda y_i(t) + e^{\lambda t} \alpha_i'(t) \\ &= \lambda y_i(t) + \lambda e^{\lambda t} \alpha_{i-1}(t) - \lambda e^{\lambda t} \alpha_i(t) \\ &= \lambda y_i(t) + \lambda y_{i-1}(t) - \lambda y_i(t) = \lambda y_{i-1}(t) \\ y_0(0) &= 1, \quad y_i(0) = 0 \end{aligned}$$

Oder kurz geschrieben:

$$\begin{cases} y_0'(t) = 0 \\ y_i'(t) = \lambda y_{i-1}(t), \quad i \in \mathbb{N} \\ y_0(0) = 1, \quad y_i(0) = 0 \end{cases}$$

Dieses rekursive Gleichungssystem besitzt die folgende eindeutige Lösung:

$$y_0(t) = 1, \quad y_1(t) = \lambda t, \dots, \quad y_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \dots$$

und somit

$$\alpha_i(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

□

4. Ein **Gemischter Poisson-Prozess** ist auch ein inhomogener Geburtsprozess. Dies Behauptung formulieren und beweisen wir im folgenden Satz:

Satz 3.4.3. *Sei $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein gemischter Poisson-Prozess mit Mischungsvariable Λ , die die Laplace-Transformation $\hat{l}_\Lambda(s)$ besitzt. Dann ist $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein Geburtsprozess mit Intensitätsfunktionen*

$$q_i(t) = -\frac{\hat{l}_\Lambda^{(i+1)}(t)}{\hat{l}_\Lambda^{(i)}(t)}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Beweis. Nach dem Satz 3.4.1 muss man zeigen, dass eine gültige Matrizen-Übergangsfunktion $P(s, t)$ existiert, so dass $\forall n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t$ gilt:

$$\begin{aligned} P(N(t_n) = i_n \mid N(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, N(t_1) = i_1) \\ &= P(N(t_n) = i_n \mid N(t_{n-1}) = i_{n-1}) \\ &= p_{i_{n-1}, i_n}(t_{n-1}, t_n) \end{aligned}$$

(Formel (3.4.4)), wobei $i_m = k_m + \dots + k_1$, $\forall m = 1, \dots, n$, $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}
& P(N(t_n) = i_n \mid N(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, N(t_1) = i_1) \\
&= \frac{P(N(t_n) = i_n, \dots, N(t_1) = i_1)}{P(N(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, N(t_1) = i_1)} \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{\prod_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i}}{k_i!} \cdot (-1)^{i_n} \cdot \widehat{l}_\Lambda^{(i_n)}(t_n)}{\prod_{i=1}^{n-1} \frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i}}{k_i!} \cdot (-1)^{i_{n-1}} \cdot \widehat{l}_\Lambda^{(i_{n-1})}(t_{n-1})} \\
&= \frac{(t_n - t_{n-1})^{k_n}}{k_n!} \cdot (-1)^{k_n} \cdot \frac{\widehat{l}_\Lambda^{(i_n)}(t_n)}{\widehat{l}_\Lambda^{(i_{n-1})}(t_{n-1})} \\
&\stackrel{(3.3.4)}{=} \frac{P(N(t_n) = i_n, N(t_{n-1}) = i_{n-1})}{P(N(t_{n-1}) = i_{n-1})} \\
&= P(N(t_n) = i_n \mid N(t_{n-1}) = i_{n-1})
\end{aligned}$$

(*) gilt aufgrund von

$$\begin{aligned}
& P(N(t_m) = i_m, \dots, N(t_1) = i_1) \\
&= P(N(t_m) = k_m + \dots + k_1, \dots, N(t_1) = k_1) \\
&= P\left(\bigcap_{i=1}^m \{N(t_i) - N(t_{i-1}) = k_i\}\right) \\
&\stackrel{(3.3.4)}{=} \prod_{i=1}^m \frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i}}{k_i!} \cdot (-1)^{k_1 + \dots + k_m} \cdot \widehat{l}_\Lambda^{(k_1 + \dots + k_m)}\left(\sum_{i=1}^m (t_i - t_{i-1})\right) \\
&= \prod_{i=1}^m \frac{(t_i - t_{i-1})^{k_i}}{k_i!} \cdot (-1)^{i_m} \cdot \widehat{l}_\Lambda^{(i_m)}(t_m) \\
&> 0, \quad \text{für beliebiges } m \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit mit $N(t_0) = N(0) = 0$ gilt. Setzen wir nun

$$p_{ij}(s, t) = \begin{cases} P(N(t) = j \mid N(s) = i), & \forall 0 \leq s \leq t, j \geq i \\ 0, & j < i \end{cases}$$

so folgt aus der obigen Rechnung, dass für $j \geq i$ gilt:

$$p_{ij}(s, t) = (-1)^{j-i} \frac{(t-s)^{j-i}}{(j-i)!} \cdot \frac{\widehat{l}_\Lambda^{(j)}(t)}{\widehat{l}_\Lambda^{(i)}(s)}. \quad (3.4.15)$$

Offensichtlich gilt für $P(s, t) = (p_{ij}(s, t))_{i, j \in E}$, dass $P(t, t) = \mathbf{I}$ und

$$P(s, t) = P(s, u) \cdot P(u, t) \quad \forall 0 \leq s \leq u \leq t:$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=i}^j p_{ik}(s, u) \cdot p_{kj}(u, t) \\ &= \sum_{k=i}^j (-1)^{k-i+j-k} \cdot \frac{(u-s)^{k-i}}{(k-i)!} \cdot \frac{(t-u)^{j-k}}{(j-k)!} \cdot \frac{\tilde{l}_\Lambda^{(k)}(u)}{\tilde{l}_\Lambda^{(i)}(s)} \cdot \frac{\tilde{l}_\Lambda^{(j)}(t)}{\tilde{l}_\Lambda^{(k)}(u)} \\ &= \frac{(-1)^{j-i}}{(j-i)!} \cdot \frac{\tilde{l}_\Lambda^{(j)}(t)}{\tilde{l}_\Lambda^{(i)}(s)} \\ & \quad \cdot \sum_{k=i}^j \frac{(j-i)!}{(j-i-(j-k))!(j-k)!} \cdot (t-u)^{j-k} (u-j)^{j-i-(j-k)} \\ &= p_{ij}(s, t). \end{aligned}$$

Somit ist $P(s, t)$ eine gültige Matrizen-Übergangsfunktion, und $\{N(t) : t \geq 0\}$ ist eine Markov-Kette. Aus $p_{ij}(s, t) = 0$ für $j < i$ und (3.4.15) ist es leicht zu sehen, dass $q_{ij}(t) = 0$ für alle $j \neq i, i+1$ und für alle $t \geq 0$. Somit ist $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein reiner Geburtsprozess. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} q_i(t) &= q_{i,i+1}(t) \\ &= - \lim_{s \rightarrow t^-} \frac{(t-s) \tilde{l}_\Lambda^{(i+1)}(t)}{(t-s) \tilde{l}_\Lambda^{(i)}(s)} \\ &= - \frac{\tilde{l}_\Lambda^{(i+1)}(t)}{\tilde{l}_\Lambda^{(i)}(t)}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gilt, da $\tilde{l}_\Lambda^{(i)}(s)$ stetig ist, weil $\tilde{l}_\Lambda^{(i+1)}$ existiert. \square

3.5 Weitere Schadenzahlverteilungen

Sei N eine Zufallsvariable mit Wertebereich \mathbb{Z}_+ , die die Anzahl der Schäden im Portfolio darstellt. Weiterhin benutzen wir die Bezeichnung

$$p_n = P(N = n), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Sei $I_N = \text{Var } N / E N$ der *Dispensionsindex* von N , der ein Maß für die relative Variabilität der Schadenanzahl N ist.

1. *Poisson-Verteilung*: $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, falls

$$p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Es gilt offensichtlich die Gleichung $I_N = 1$.

2. *Binomialverteilung*: $N \sim \text{Bin}(n, p)$, $0 < p < 1$, falls

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Es gilt $EN = np$, $\text{Var } N = np(1-p)$, daher $I_N = 1-p < 1 \Rightarrow$ Die Binomialverteilung ist unterdispersioniert.

Beispiel 3.5.1 (Anwendung der Binomialverteilung). Sei ein homogenes Portfolio mit n Policen gegeben, wobei jede Police den Ausfall einer lebenswichtigen Komponente eines Computernetzwerkes (z.B., eines Servers) deckt. Am Anfang der Versicherungsperiode wurden n neue Server installiert. Sei $p(t) \in (0, 1)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Server bis zur Zeit t (unabhängig von den anderen) ausfällt. Falls $N(t)$ die Anzahl der Ausfälle bis zum Zeitpunkt t ist, so gilt $N(t) \sim \text{Bin}(n, p(t))$. Für große n und kleine $p(t)$ kann die Verteilung von $N(t)$ nach dem Satz von Poisson durch die entsprechende Poisson-Verteilung approximiert werden; vgl. [13], S. 24.

3. *Negative Binomialverteilung*: $N \sim \text{NB}(\alpha, p)$, $\alpha > 0, 0 < p < 1$, falls

$$p_n = \binom{\alpha + n - 1}{n} p^n (1-p)^\alpha, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Übungsaufgabe 3.5.1. Zeigen Sie, dass $EN = \frac{\alpha p}{1-p}$, $\text{Var } N = \frac{\alpha p}{(1-p)^2}$, daher $I_N = (1-p)^{-1} > 1 \Rightarrow$ Die negative Binomialverteilung ist überdispersioniert.

Folgende rekursive Formel zeigt, dass die oben genannten Verteilungen derselben Familie der Verteilungen angehören. Andererseits spielt sie bei der effizienten Berechnung der Gesamtschadenverteilung eine besondere Rolle; vgl. Abschnitt 4.4.

Satz 3.5.1 (Rekursionsformel von Panjer). Sei N eine Zufallsvariable mit Wertebereich \mathbb{Z}_+ . Für ihre Verteilung $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ gilt die Rekursionsformel von Panjer

$$p_k = (a + b/k) p_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{3.5.1}$$

für Konstanten $a < 1$ und $b \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn a) oder b) oder c) oder d) gilt:

- a) $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ mit $\lambda = b > 0$ für $a = 0$.
- b) $N \sim \text{Geo}(p)$ mit $p = a$ für $0 < a < 1$, $b = 0$.
- c) $N \sim \text{NB}(\alpha, p)$ mit $\alpha = 1 + b/a$, $p = a$ für $0 < a < 1$, $b \neq 0$.
- d) $N \sim \text{Bin}(n, p)$ mit $n = -1 - b/a$, $p = a/(a-1)$ für $a < 0$, $b \neq 0$.

Beweis.

„ \Rightarrow “ Falls $a = 0$, dann gilt $p_k = \frac{b}{k} p_{k-1} = \dots = \frac{b^k}{k!} p_0$, wobei $p_0 = e^{-b}$ aus der Eigenschaft

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}$$

folgt. Somit ist $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ mit $\lambda = b > 0$.

Sei nun $a \neq 0$, $b = 0$. Es gilt $p_k = a p_{k-1} = a^k p_0$ für $k \in \mathbb{N}$. Die Größen p_k stellen Wahrscheinlichkeiten nur im Falle $a = p \in (0, 1)$ mit $p_0 = 1 - p$ dar. Sie bilden somit eine geometrische Verteilung.

Im Falle $a < 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} p_k &= \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1} = \frac{a}{k} \left(\frac{b}{a} + k\right) p_{k-1} \\ &= \frac{a}{k} (c + k - 1) p_{k-1} = \frac{a^k}{k!} (c + k - 1) (c + k - 2) \dots c p_0 \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$, wobei $c = b/a + 1$. Berechnen wir p_0 aus der Gleichungskette

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} c(c+1) \dots (c+k-1) \frac{a^k}{k!} = p_0 f(a),$$

wobei die Funktion $f(x)$, die durch ihre Taylor-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c(c+1) \dots (c+k-1) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

gegeben ist, mit $f(x) = (1-x)^{-c}$, $|x| < 1$ gleichgesetzt werden kann. Somit gilt $p_0 = (1-a)^c$ und

$$p_k = \frac{(c+k-1)(c+k-2) \dots c}{k!} (1-a)^c a^k.$$

Falls $a \in (0, 1)$, dann ist $p_k > 0$ für alle $k \Leftrightarrow c = b/a + 1 > 0$, d.h., $b > -a \Rightarrow N \sim NB(c, a)$.

Falls $a < 0$, dann ist $p_k > 0$ für alle $k \Leftrightarrow c < 0$ und $-c \in \mathbb{N}$, d.h., $-b/a - 1 = n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{(-n+k-1)(-n+k-2) \dots (-n)}{k!} (1-a)^{-n} a^k \\ &= (-1)^k \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n}{k!} (-1)^k \left(\frac{-a}{1-a}\right)^k \left(1 - \frac{-a}{1-a}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

wobei $p = -a/(1-a) = a/(a-1) \in (0, 1)$. $\Rightarrow N \sim Bin(n, p)$. \square

Übungsaufgabe 3.5.2. Führen Sie den Beweis in Richtung „ \Leftarrow “ durch.

Bemerkung 3.5.1. Falls Formel (3.5.1) erst für $k \geq 2$ gilt, so wird p_0 zum freien Parameter. Somit hat die Rekursionsformel von Panjer eine zusätzliche Anzahl von Lösungen, z.B. die logarithmische Verteilung.

4. Logarithmische Verteilung: $N \sim \text{Log}(p)$, $0 < p < 1$, falls

$$p_n = \frac{p^n}{-n \log(1-p)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Übungsaufgabe 3.5.3. Zeigen Sie, dass für $N \sim \text{Log}(p)$ Formel (3.5.1) für $k = 2, 3, \dots$ mit $a = p$, $b = -p$ gilt.

5. Delaporte-Verteilung: $N \sim \text{Del}(\lambda, \alpha, p)$, falls $N \stackrel{d}{=} N_1 + N_2$, wobei die Zufallsvariablen $N_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$ und $N_2 \sim \text{NB}(\alpha, p)$ unabhängig sind. Manchmal schreibt man auch

$$\text{Del}(\lambda, \alpha, p) = \text{Poisson}(\lambda) * \text{NB}(\alpha, p),$$

wobei die Operation $*$ die Faltung der beiden Verteilungen bedeutet:

$$P(N = k) = (P_{N_1} * P_{N_2})_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i, j: i+j=k} P(N_1 = i)P(N_2 = j), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Die Faltung zweier Verteilungen als Verteilung der Summe zweier unabhängigen Zufallsvariablen wird in voller Allgemeinheit in Kapitel 4 betrachtet. Die Delaporte-Verteilung entspricht der Verteilung $\{p_k(1)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ eines Delaporte-Prozesses mit $t = 1$, $b = \lambda$, $a = \alpha$, $\eta = (1-p)/p$; vgl. Abschnitt 3.3.

6. Engen-Verteilung: $N \sim \text{Eng}(\theta, p)$, $0 < \theta, p < 1$, falls

$$p_n = \frac{\theta}{1 - (1-p)^\theta} \frac{p^n \Gamma(n-\theta)}{n! \Gamma(1-\theta)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Übungsaufgabe 3.5.4. Beweisen Sie, dass für $N_1 \sim \text{Eng}(\theta, p)$ und $N_2 \sim \text{Log}(p)$ folgendes gilt:

$$P(N_1 = k) \longrightarrow P(N_2 = k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \theta \rightarrow 0,$$

und somit $N_1 \xrightarrow{d} N_2$ für $\theta \rightarrow 0$ (schwache Konvergenz).

Kapitel 4

Gesamtschaden

4.1 Gesamtschadenprozess

Wie in Kapitel 1 eingeführt, ist der *Gesamtschadenprozess* eines Portfolios ein stochastischer Prozess $\{X(t) : t \geq 0\}$ mit

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i,$$

wobei $N(t)$ der *Prozess der Schadenanzahl* bis zur Zeit t ist und die Einzelrisiken U_i die *Schadenhöhen* darstellen. Weiterhin wird angenommen, dass $\{N(t) : t \geq 0\}$ und $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ unabhängig sind und ebenso $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ voneinander unabhängig sind. Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt, dass die Verteilung von $X(t)$ gleich

$$\begin{aligned} P(X(t) \in B) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^n U_k \in B\right) \cdot P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (F_{U_1} * F_{U_2} * \dots * F_{U_n})(B) \cdot p_n(t), \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

wobei hier die Unabhängigkeit von $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ und $\{N(t) : t \geq 0\}$ benutzt wurde, und

$$F_{U_i}(x) = P(U_i \leq x) \quad \text{und} \quad F_{U_i}(B) = P(U_i \in B).$$

In diesem Kapitel gehen wir, wenn nicht anders gesagt wird, davon aus, dass der Gesamtschaden $X(t)$ bis zu einem bestimmten Zeitpunkt t betrachtet wird, z.B. in einem Geschäftsjahr ($t = 1$). Deshalb wird später die Abhängigkeit von $X(t)$ und $N(t)$ von t unterlassen, und wir schreiben

$$X = \sum_{i=1}^N U_i.$$

Die Verteilung des Gesamtschadens X spielt in der Versicherungsmathematik eine zentrale Rolle. In diesem Kapitel behandeln wir die Verteilungsfunktion von X , deren Schranken, Approximationen und Computer-Algorithmen zu deren Berechnung.

4.2 Individuelles und kollektives Modell

Wenden wir uns nun zwei klassischen Modellen der Versicherungsmathematik zu.

1. Das **individuelle Modell** fasst alle Risiken oder Schäden, die aus der Police i , entstehen zu U_i zusammen. Sei ein *Portfolio mit n Policen* gegeben. Dann bezeichnet U_i die Summe aller Schäden über die betrachtete Zeitperiode (z.B. ein Jahr), die aus der Police i entstehen. Somit sind die Zufallsvariablen U_1, \dots, U_n unabhängig, aber nicht identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion $F_{U_i} = P(U_i \leq x)$. Es ist ratsam, F_{U_i} als Mischung zweier Verteilungen darzustellen

$$F_{U_i}(x) = (1 - \theta_i)\delta_0(x) + \theta_i F_{V_i}(x),$$

wobei $0 < \theta_i \leq 1$ die *Wahrscheinlichkeit des Schadens* ist, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass U_i einen positiven Wert $V_i > 0$ annimmt. Diese Wahrscheinlichkeit ist in der Praxis sehr klein. Somit schreibt sich der *Gesamtschaden im individuellen Modell* als

$$X^{ind} = \sum_{i=1}^n U_i.$$

Offensichtlich ist die Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X^{ind} \leq x)$ gleich

$$F_X(x) = (F_{U_1} * F_{U_2} * \dots * F_{U_n})(x). \quad (4.2.1)$$

Definition 4.2.1. Ein *Portfolio* heißt *homogen*, falls U_1, \dots, U_n uiv Zufallsvariable sind:

$$F_{U_1} = \dots = F_{U_n}.$$

Somit hat der in Kapitel 1 eingeführte Begriff eine mathematische Formulierung bekommen.

Falls N_i die zufällige Anzahl der Schäden ist, die aus der Police i stammen, und die uiv Einzelschäden mit $\{V_{ij} : j \in \mathbb{N}\}$ bezeichnet werden, so ist

$$V_i = \sum_{j=1}^{N_i} V_{ij} \quad \text{und} \quad X^{ind} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} V_{ij}.$$

Somit stellt jedes Risiko V_i ein *kollektives Modell* dar, dass im folgenden beschrieben wird.

2. **Kollektives Modell:** Im Gegensatz zum individuellen Modell wird hier ein Portfolio aus einer nicht näher spezifizierten Anzahl von Policen betrachtet, die nicht einzeln behandelt werden können. Man behandelt alle Schäden gleich, egal aus welcher Police sie stammen, und fasst das gesamte Portfolio als eine einzige Police auf. Sei N die zufällige Anzahl der Schäden, die innerhalb einer Periode t auftreten. Seien alle Schadenhöhen $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ uiv und positiv: $U_i > 0$ f.s. und seien weiterhin $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ und N unabhängig voneinander.

Der *Gesamtschaden im kollektiven Modell* ist durch

$$X^{col} = \sum_{i=1}^N U_i$$

gegeben, wobei $X^{col} = 0$, falls $N = 0$. Typischerweise besitzt N in der Praxis eine Poisson-, Binomial- oder Negativbinomialverteilung.

Satz 4.2.1. *Falls der Schadenanzahlprozess $\{N(t) : t \geq 0\}$ unabhängige Zuwächse hat, so hat der Prozess des Gesamtschadens im kollektiven Modell*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i,$$

wobei $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ uiv Zufallsvariable seien, auch unabhängige Zuwächse.

Beweis. Für beliebiges m , beliebige Zeiten $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ und Borelmengen $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} & P \left(\bigcap_{j=1}^m \{X(t_j) - X(t_{j-1}) \in B_j\} \right) \\ &= P \left(\bigcap_{j=1}^m \left\{ \sum_{k=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} U_k \in B_j \right\} \right) \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=n_1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=n_{m-1}}^{\infty} P \left(\bigcap_{j=1}^m \left\{ \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} U_k \in B_j \right\} \right) \\ & \quad \cdot P \left(\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} = n_j\} \right), \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit aufgrund der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit und der Unabhängigkeit von $N(t)$ und U_k gilt. Weiter können wir folgern:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=n_1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=n_{m-1}}^{\infty} P \left(\bigcap_{j=1}^m \left\{ \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} U_k \in B_j \right\} \right) \\
& \quad \cdot P \left(\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} = n_j\} \right) \\
& = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=n_1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=n_{m-1}}^{\infty} P \left(\bigcap_{j=1}^m \{N(t_j) - N(t_{j-1}) = n_j - n_{j-1}\} \right) \\
& \quad \cdot P \left(\bigcap_{j=1}^m \left\{ \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} U_k \in B_j \right\} \right) \\
& = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=n_1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=n_{m-1}}^{\infty} \prod_{j=1}^m \left(P(N(t_j) - N(t_{j-1}) = n_j - n_{j-1}) \right. \\
& \quad \left. \cdot P \left(\sum_{k=1}^{n_j - n_{j-1}} U_k \in B_j \right) \right),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse von $N(t)$ und da $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ uiv Zufallsvariable sind, gilt. Wendet man darauf die Substitution $l_i = n_i - n_{i-1}$ an, so gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=n_1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=n_{m-1}}^{\infty} \prod_{j=1}^m \left(P(N(t_j) - N(t_{j-1}) = n_j - n_{j-1}) \right. \\
& \quad \left. \cdot P \left(\sum_{k=1}^{n_j - n_{j-1}} U_k \in B_j \right) \right) \\
& = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m \left(P(N(t_j) - N(t_{j-1}) = l_j) \cdot P \left(\sum_{k=1}^{l_j} U_k \in B_j \right) \right) \\
& = \prod_{j=1}^m \left(\sum_{l_j=0}^{\infty} P(N(t_j) - N(t_{j-1}) = l_j) \cdot P \left(\sum_{k=1}^{l_j} U_k \in B_j \right) \right) \\
& = \prod_{j=1}^m P(X(t_j) - X(t_{j-1}) \in B_j).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da es sich um dieselbe Folge von Formeln rückwärts handelt. Somit ist bewiesen, dass $X(t)$ unabhängige Zuwächse hat. \square

Folgerung 4.2.1. Falls der Schadenanzahlprozess $\{N(t) : t \geq 0\}$ unabhängig und stationäre Zuwächse hat, so hat auch der Prozess des Gesamtschadens

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$$

unabhängige und stationäre Zuwächse.

Beweis. Nach dem Satz 4.2.1 hat $X(t)$ unabhängige Zuwächse. Man muss nur noch zeigen, dass jeder Zuwachs stationär ist, d. h.

$$P(X(t+h) - X(t) \in B) = P(X(h) \in B)$$

für alle $t, h > 0$ und für eine beliebige Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} & P(X(t+h) - X(t) \in B) \\ &= P\left(\sum_{k=N(t)+1}^{N(t+h)} U_k \in B\right) \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=n+1}^{n+m} U_k \in B\right) \cdot P(N(t) = n) \\ &\quad \cdot P(N(t+h) - N(t) = m) \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n)}_{=1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^m U_k \in B\right) \cdot P(N(h) = m) \\ &\stackrel{(4.1.1)}{=} 1 \cdot P(X(h) \in B). \end{aligned}$$

Dabei gilt die zweite Gleichheit aufgrund der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit, der Unabhängigkeit der Zuwächse von $N(t)$ und der Unabhängigkeit von $\{U_i\}$ und $N(t)$. Die vorletzte Gleichheit folgt aus der Stationarität der Zuwächse von N . \square

4.3 Zusammengesetzte Verteilungen

Die Verteilung des Gesamtschadens

$$X = \sum_{i=1}^N U_i$$

im individuellen ($N = n$) oder kollektiven Modell heißt *zusammengesetzte Verteilung*.

Definition 4.3.1. Sei N eine Zufallsvariable, die Werte aus $\mathbb{N} \cup \{0\}$ annimmt. Sei U_1, U_2, \dots eine Folge von unabhängigen Risiken, die auch von N unabhängig sind. Dann heißt die Verteilung der Zufallsvariable

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^N U_i, & \text{falls } N \geq 1 \\ 0, & \text{falls } N = 0 \end{cases}$$

eine zusammengesetzte Verteilung.

Später nehmen wir an, dass $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ uiv sind und $U_i > 0$ ist (kollektives Modell).

4.3.1 Elementare Eigenschaften

Sei $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ die Verteilung von N : $p_k = P(N = k)$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sei $F_U(x) = P(U_i \leq x)$ die Verteilungsfunktion von U_i . Laut (4.1.1) ist die Verteilungsfunktion von $F_X(x)$ vom Gesamtschaden X wie folgt gegeben:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_U^{*k}(x). \quad (4.3.1)$$

Lemma 4.3.1. Die Laplace-Transformation vom Gesamtschaden X ist durch

$$\widehat{l}_X(s) = \widehat{g}_N(\widehat{l}_U(s)), \quad s \geq 0 \quad (4.3.2)$$

gegeben, wobei $\widehat{g}_N(z)$ die erzeugende Funktion von N ist und $\widehat{l}_U(s)$ die Laplace-Transformation von U_i .

Übungsaufgabe 4.3.1. Beweisen Sie das Lemma.

Bemerkung 4.3.1. Eine direkte Berechnung der Faltungen $F_U^{*k}(x)$ in der Formel (4.3.1) ist nur in Einzelfällen möglich. Deshalb versucht man oft in der Praxis, die Verteilung von X numerisch durch die Umkehrformeln für \widehat{l} zu gewinnen. Deshalb ist die Formel (4.3.2) so wichtig. Numerisch geht die Berechnung \widehat{l}_X mit Hilfe der sogenannten Fast-Fourier-Transformation.

Übungsaufgabe 4.3.2. Sei $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $U_i \sim \text{Exp}(a)$. Prüfen Sie, dass

$$\widehat{l}_X(s) = e^{-\frac{\lambda s}{a+s}}.$$

Folgerung 4.3.1. Falls $EX^2 < \infty$, $EU^2 < \infty$, $EN^2 < \infty$, dann gilt folgendes:

- $EX = EN \cdot EU$ (Spezialfall des Satzes von Wald)
- $\text{Var } X = \text{Var } N \cdot (EU)^2 + EN \cdot \text{Var } U$

Übungsaufgabe 4.3.3. *Beweisen Sie die Folgerung.*

Im nächsten Satz wird gezeigt, dass der Gesamtschaden X schwere Tails hat, falls die Einzelrisiken U_i schwere Tails haben.

Satz 4.3.1. *Sei N eine nicht-ausgeartete Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $N \neq 0$ f. s. und $EN < \infty$. Sei $F_U(x) = P(U_i \leq x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Für den Gesamtschaden $X = \sum_{i=1}^N U_i$ im kollektiven Modell sei $F_X(x) = P(X \leq x)$ seine Verteilungsfunktion. Es gilt:*

a)

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_U(x)} \geq EN, \quad (4.3.3)$$

b) Falls U_i schwere Tails hat, so hat auch X schwere Tails.c) Falls $F_U \in S$, d. h. subexponentiell ist, und $\hat{g}_N(s) < \infty$ für ein $s > 1$, dann gilt die Gleichung in (4.3.3):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_U(x)} = EN. \quad (4.3.4)$$

Beweis. a) Beweisen wir zunächst, dass

$$\frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_U(x)} \geq \frac{1 - \hat{g}_N(F_U(x))}{1 - F_U(x)}$$

gilt:

$$\begin{aligned} F^{*(k)}(x) &= P(U_1 + \dots + U_k \leq x) \\ &\leq P\left(\max_{i=1, \dots, k} U_i \leq x\right) \\ &= F_U^k(x), \end{aligned}$$

weil $\{U_1 + \dots + U_k \leq x\} \subseteq \{\max_{i=1, \dots, k} U_i \leq x\}$ gilt und $\{U_i\}$ unabhängig sind. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} F_X(x) &\stackrel{(4.3.1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_U^{*k}(x) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_U^k(x) \\ &= \hat{g}_N(F_U(x)). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_U(x)} &\geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \hat{g}_N(F_U(x))}{1 - F_U(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \hat{g}_N(F_U(x))}{1 - F_U(x)}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen der Existenz des Grenzwertes gilt. Wenn wir nun die Substitution $y = F_U(x)$ durchführen, so gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \widehat{g}_N(F_U(x))}{1 - F_U(x)} &= \lim_{y \rightarrow 1-0} \frac{1 - \widehat{g}_N(y)}{1 - y} \\ &\stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{y \rightarrow 1-0} \frac{-\widehat{g}'_N(y)}{-1} \\ &= \widehat{g}'_N(1 - 0) \\ &= EN. \end{aligned}$$

Somit ist a) bewiesen.

- b) Aus der Definition des kollektiven Modells folgt, dass $F_{U_i}(0) = 0$, da $U_i > 0$ f.s. Falls U_i schwere Tails hat, dann gilt nach Satz 2.2.1, a), dass

$$\forall b > 0, \forall s_0 > 0, \forall x_0 \geq 0 \exists x \geq x_0 : \overline{F}_U(x) > b e^{-s_0 x},$$

d. h., $\overline{F}_U(x)$ besitzt keine exponentielle Schranke. Sei

$$a = \liminf_{y \rightarrow \infty} \inf_{x \geq y} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_U(x)} \geq EN.$$

Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists y_0 : \forall y > y_0$

$$EN - \varepsilon \leq a - \varepsilon < \inf_{x \geq y} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_U(x)} < a + \varepsilon$$

Somit folgt $\forall x \geq y \geq y_0 :$

$$\frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_U(x)} \geq EN - \varepsilon$$

Wählen wir ein $x_0 \geq y_0$, so folgt:

$$\exists x \geq x_0 : \overline{F}_X(x) \geq (EN - \varepsilon) \overline{F}_U(x) > b (EN - \varepsilon) e^{-s_0 x}$$

Sei nun $b(EN - \varepsilon) = b_1$, so gilt

$$\forall b_1 > 0, \forall s_0 > 0, \forall x_0 \exists x \geq x_0 : \overline{F}_X(x) > b_1 e^{-s_0 x}$$

Nach dem Satz 2.2.1, a) hat auch X einen schweren Tail!

- c) Ohne Beweis.

□

4.3.2 Beispiele

Folgende Spezialfälle sind von besonderer Bedeutung in der Risikotheorie:

1. Zusammengesetzte Poisson-Verteilung

Sei $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Diese Verteilung hat zwei Parameter: $(\lambda, F_U(x))$. Im Abschnitt 4.2 wurde der Gesamtschaden im individuellen Modell durch eine Summe von n Gesamtschäden der unabhängigen kollektiven Modelle ersetzt:

$$X^{ind} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} V_{ij}, \quad \text{wobei} \quad V_i = \sum_{j=1}^{N_i} V_{ij}$$

eine zusammengesetzte Verteilung hat. Nehmen wir an, dass $N_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, $\forall i = 1, \dots, n$, $V_{ij} \sim F_i(x) = P(V_{ij} \leq x)$, $\forall j, \forall i = 1, \dots, n$. Dann besagt der folgende Satz, dass X^{ind} auch eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung besitzt:

Satz 4.3.2 (Abgeschlossenheit der zusammengesetzten Poisson-Verteilung bezüglich der Faltung). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $X = \sum_{i=1}^n X_i$ die Summe unabhängiger Poisson-Schadenssummen X_1, \dots, X_n mit den Parametern $(\lambda_i, F_i(x))$, $i = 1, \dots, n$. Dann hat X eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Parametern $(\lambda, F(x))$, wobei

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{und} \quad F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x).$$

Beweis. Berechnen wir die Laplace-Stiltjes-Transformation von X :

$$\begin{aligned} \widehat{l}_X(s) &= E e^{-sX} = E [e^{-sX_1} \dots e^{-sX_n}] \\ &= \prod_{i=1}^n \widehat{l}_{X_i}(s) \stackrel{(4.3.2)}{=} \prod_{i=1}^n \widehat{g}_{N_i}(\widehat{l}_{V_{ij}}(s)), \end{aligned}$$

wobei bei der vorletzten Gleichheit die Unabhängigkeit der X_i voneinander eine Rolle spielt. Nach der Formel für die erzeugende Funktion einer Poisson-Verteilung gilt weiter:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \widehat{g}_{N_i}(\widehat{l}_{V_{ij}}(s)) &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i(1-\widehat{l}_{V_{ij}}(s))} \\ &= e^{-\lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} \widehat{l}_{V_{ij}}(s)\right)} \\ &= e^{-\lambda(1-\widehat{l}_V(s))}, \end{aligned}$$

wobei $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ und

$$\begin{aligned} \widehat{l}_V(s) &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} \widehat{l}_{V_i}(s) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)\right) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) \quad \text{mit} \quad F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x) \end{aligned}$$

Somit ist $\widehat{l}_X(s)$ die Laplace–Stiltjes–Transformation einer zusammengesetzten Poisson–Verteilung mit den Parametern $(\lambda, F(x))$, weil die Einordnung $X \leftrightarrow \widehat{l}_X(s)$ eindeutig für alle Zufallsvariablen X ist. \square

2. Zusammengesetzte Pascal-Verteilung (oder negative Binomialverteilung):

Sei $N \sim NB(\alpha, p)$. Dann sind die Parameter der Verteilung wie folgt: $(\alpha, p, F_U(x))$.

3. Zusammengesetzte Geometrische Verteilung

Sei $N \sim Geo(p)$. Die Parameter der Verteilung sehen dann wie folgt aus: $(p, F_U(x))$.

Übungsaufgabe 4.3.4. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte der stetigen Komponente der zusammengesetzten Poisson–Pascal- und geometrischen Verteilung, falls $U \sim Exp(a)$. Man beachte, dass diese Verteilungen immer ein Atom in $x = 0$ haben.

4.3.3 Anwendungen

Folgende Anwendungen zeigen, wie wichtig die Kenntnis der Verteilung von X ist.

1. Solvabilität eines Portfolios:

Sei u das Anfangskapital eines Versicherungsunternehmens, $\Pi(t)$ die Prämieinnahmen bis zur Zeit t und $X(t)$ der Gesamtschaden.

Problem: Berechne $\Pi(t)$ so, dass das Portfolio am Ende des Geschäftsjahres kein Defizit aufweist. Falls

$$R(t) = u + \Pi(t) - X(t)$$

die Risikoreserve des Portfolios ist und t_0 der Zeitpunkt vom Ende des Geschäftsjahres, so lautet die mathematische Formulierung des Problems: Berechne $\Pi(t)$ so, dass für eine kleines vorgegebene $\varepsilon > 0$

$$P(R(t_0) < 0) \leq \varepsilon.$$

Es sei bekannt, dass die *Tail-Funktion* von $X(t)$ von oben durch eine bekannte, in x monoton fallende Funktion $\varphi(x, t)$ abgeschätzt werden kann:

$$\overline{F}_{X(t)}(x) = P(X(t) > x) \leq \varphi(x, t), \quad \forall x, \forall t.$$

Es gilt somit:

$$\begin{aligned} \varepsilon \geq P(R(t_0) < 0) &= P(X(t_0) > u + \Pi(t_0)) \\ &= \overline{F}_{X(t_0)}(u + \Pi(t_0)) \\ &\leq \varphi(u + \Pi(t_0), t_0) \end{aligned}$$

Eine hinreichende Bedingung, die $P(R(t_0) < 0) \leq \varepsilon$ gewährleistet, ist offensichtlich $\varphi(u + \Pi(t_0), t_0) \leq \varepsilon$. Wählen wir ein x_0 , so dass $\varphi(x_0, t_0) \leq \varepsilon$. Dann gilt für alle $\Pi(t_0) + u \geq x_0$:

$$P(R(t_0) < 0) \leq \varphi(u + \Pi(t_0), t_0) \leq \varphi(x_0, t_0) \leq \varepsilon.$$

Das heißt, dass $\Pi(t_0) \geq x_0 - u$, wobei für monotone φ gilt, dass $x_0 = \varphi^{-1}(\varepsilon)$ angenommen werden kann.

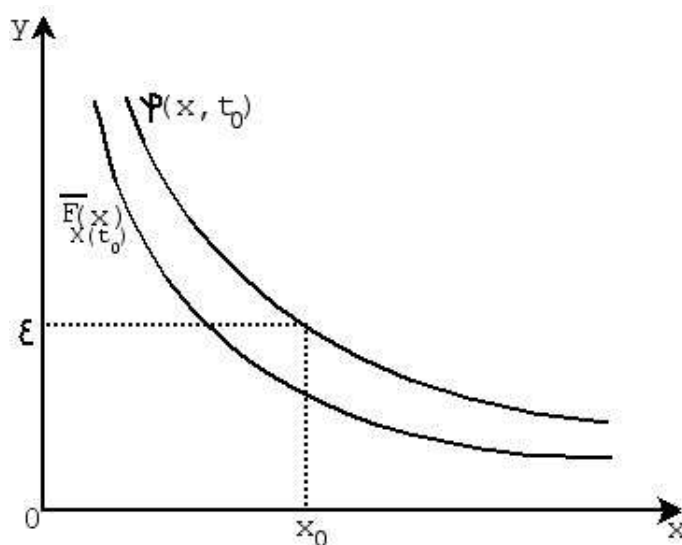


Abbildung 4.3.1: Darstellung von φ und $\overline{F}_{X(t_0)}$

2. Rückversicherung:

Sowohl für die Erhöhung der Versicherungskapazitäten der kleinen Versicherungsunternehmen wie auch bei der Versicherung von Objekten von überdurchschnittlichem Wert (z. B. Schiffe, Gebäudekomplexe)

schließt der Versicherer selbst eine weitere Versicherung ab, d. h. er leitet einen Teil vom Risiko an den *Zweitversicherer* (oder sogenannten *Rückversicherer*) weiter. Dabei heißt der Teil des Gesamtschadens vom Portfolio, der vom *Erstversicherer* übernommen wird, *Selbstbehalt* und wird durch eine *Selbstbehaltfunktion* $h(\cdot)$ beschrieben: Falls $X(t)$ der Gesamtschaden vom Portfolio ist, so ist $h(X(t))$ die Summe, die vom Erstversicherer erstattet wird. Dabei wird die Summe $X(t) - h(X(t))$ vom Rückversicherer beglichen. Eine verbreitete Form des Selbstbehalts ist die sogenannte

(a) **Stop-Loss-Versicherung:**

Sei $a_+ = \max\{a, 0\}$. Für ein gewisses *Selbstbehalt-Niveau* $b > 0$ sei $h(x) = x - (x - b)_+$. Somit wird an den Rückversicherer die Summe $(X(t) - b)_+$ weitergeleitet, die b übersteigt.

Problem: Wie schätzt man die *Nettoprämie* des Zweitversicherers $\tilde{\Pi}(t)$, d. h., die Prämie, die der Erstversicherer dem Zweitversicherer zu leisten hat, ohne Verwaltungskosten, Sicherheitszuschlag oder ähnliches. Per Definition gilt:

$$\tilde{\Pi}(t) = E(X(t) - h(X(t))) = E(X(t) - b)_+ = \int_b^{\infty} (x - b) dF_{X(t)}(x).$$

Die so berechnete Prämie heißt *Stop-Loss-Prämie*. Mit der Substitution $y = x - b$ ergibt sich die entsprechende Formel:

$$\tilde{\Pi}(t) = \int_0^{\infty} y dF_{X(t)}(y + b) = \int_0^{\infty} \bar{F}_{X(t)}(y + b) dy.$$

Falls $\bar{F}_{X(t)}(x)$ explizit bekannt ist oder abgeschätzt werden kann, so kann auch die Prämie $\tilde{\Pi}(t)$ des Erstversicherers abgeschätzt werden.

(b) **Proportionale Rückversicherung:**

Bei einer proportionalen Rückversicherung ist die *Selbstbehaltfunktion* wie folgt gegeben: $h(x) = ax$, $a \in (0, 1)$. Somit ist der Anteil am *Gesamtschaden des Rückversicherers* gleich

$$X(t) - h(X(t)) = (1 - a)X(t).$$

Problem:

1. Wie soll a aus der Sicht des Erstversicherers gewählt werden, um die Nettoprämie an den Zweitversicherer zu minimieren?
2. Wie soll a aus der Sicht des Zweitversicherers gewählt werden, um große Schäden zu vermeiden?

Antwort auf die Frage 1):

a soll so hoch wie möglich gesetzt werden, denn:

$$\tilde{\Pi} = E(X(t) - h(X(t))) = (1 - a)E(X(t)) \longrightarrow 0 \quad \text{für } a \rightarrow 1.$$

Dann aber verschwindet die Notwendigkeit einer Rückversicherung, weil deren Anteil gegen 0 strebt. Somit soll a nicht zu hoch, aber auch nicht zu niedrig gesetzt werden.

Antwort auf die Frage 2):

Jetzt sei $\varphi(x)$ eine in x monoton fallende Funktion, und es gelte zusätzlich

$$\overline{F}_{X(t)}(x) \leq \varphi(x), \quad \forall x.$$

Das Ziel ist es, ein a zu finden, bei dem

$$P((1 - a)X(t) > x_0) \leq \varepsilon$$

für ein vorgegebenes $x_0 > 0$ und ein kleines vorgegebenes $\varepsilon > 0$. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass

$$P\left(X(t) > \frac{x_0}{1 - a}\right) = \overline{F}_{X(t)}\left(\frac{x_0}{1 - a}\right) \leq \varphi\left(\frac{x_0}{1 - a}\right) \leq \varepsilon.$$

Daraus und der Tatsache, dass φ eine monoton fallende Funktion ist, folgt:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\varepsilon) &\leq \frac{x_0}{1 - a} \\ \Rightarrow 1 - a &\leq \frac{x_0}{\varphi^{-1}(\varepsilon)} \\ \text{oder } a &\geq 1 - \frac{x_0}{\varphi^{-1}(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Also soll a nicht zu niedrig gesetzt werden.

4.3.4 Vergleich zusammengesetzter Verteilungen

In diesem Abschnitt werden *Vergleiche des Gesamtschadens* bei verschiedenen Portfolios vorgenommen. Mathematisch ausgedrückt seien zwei unabhängige Portfolios mit den Gesamtschäden

$$X = \sum_{i=1}^N U_i \quad \text{und} \quad X' = \sum_{i=1}^{N'} U'_i$$

gegeben. Falls $N \leq N'$ und $U_i \leq U'_i, \forall i \in \mathbb{N}$, folgt daraus $X \leq X'$? Um diese Frage beantworten zu können, sollten wir präzisieren, in welchem Sinne die

Ungleichungen zu verstehen sind. Abschätzungen des Gesamtschadens sind für die Anwendungen wichtig, weil daraus die oberen bzw. unteren Schranken für die Verteilung des Gesamtschadens herzuleiten sind (vgl. Beispiele im §4.3.2).

Auf dem Raum der Zufallsvariablen führen wir zunächst zwei Ordnungen ein:

Definition 4.3.2. *Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Man sagt, dass*

- (a) $X \leq_{st} Y$, d.h., X ist stochastisch kleiner als Y , falls für alle nicht-fallende Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \leq g(y)$, $\forall x \leq y$, für die $Eg(X)$, $Eg(Y) < \infty$ ist, gilt:

$$Eg(X) \leq Eg(Y).$$

- (b) $X \leq_{sl} Y$, d.h., X ist kleiner als Y bezüglich der Stop-loss-Ordnung, falls $EX_+ < \infty$, $EY_+ < \infty$ und für eine beliebige nicht-fallende, konvexe Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die $Eg(X)$, $Eg(Y) < \infty$, gilt

$$E(g(X)) \leq E(g(Y)).$$

Dabei versteht man unter einer *konvexen* (*konkaven*) Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, für die gilt:

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \alpha g(x_1) + (1 - \alpha)g(x_2) \geq g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2),$$

bzw.

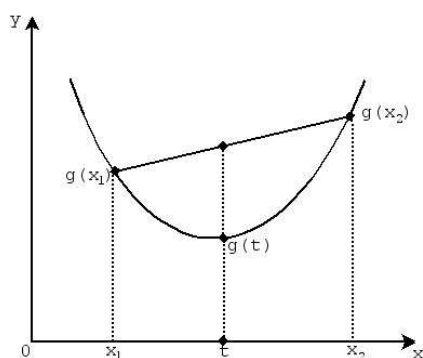
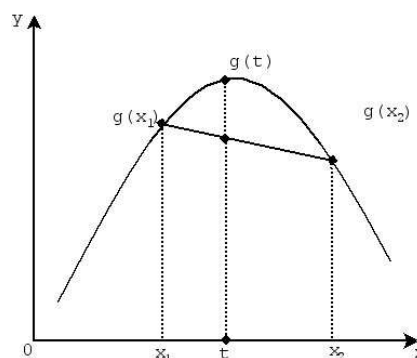
$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \alpha g(x_1) + (1 - \alpha)g(x_2) \leq g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2),$$

siehe Abbildung 4.3.2 und 4.3.3. Dies wird so interpretiert: $g(t)$ ist kleiner oder gleich bzw. größer oder gleich dem Wert an der gleichen Stelle t aus dem Segment $[g(x_1), g(x_2)]$, wobei $t = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in [x_1, x_2]$. Später werden wir sehen, dass die Stop-Loss-Ordnung eng mit der Stop-Loss-Prämienregel verbunden ist. Daher kommt auch der Name selbst.

Zunächst werden wir die Eigenschaften der Ordnungen untersuchen.

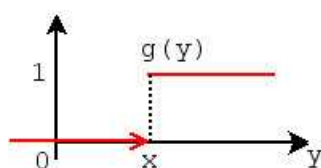
Satz 4.3.3. *Seien X und Y zwei Zufallsvariablen definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $X \leq_{st} Y$
2. *Es existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ und Zufallsvariablen X', Y' definiert auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum so, dass $X' \stackrel{d}{=} X$, $Y' \stackrel{d}{=} Y$ und $X' \leq Y'$ f. s. (Kopplung).*
3. $\forall x \in \mathbb{R} : \bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x)$, wobei $\bar{F}_X(x) = P(X > x)$ und $\bar{F}_Y(x) = P(Y > x)$.

Abbildung 4.3.2: g - konvexAbbildung 4.3.3: g - konkav

Beweis. 1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)

1) \Rightarrow 3): Folgt aus Definition 4.3.2 mit $g(y) = \mathbf{1}\{y \geq x\}$:



In der Tat gilt, da g monoton nicht-fallend ist:

$$\begin{aligned} E g(x) &= E \mathbf{1}\{X \geq x\} = P(X \geq x) \\ &= \bar{F}_X(x) \leq E g(Y) = \dots = \\ &= \bar{F}_Y(x). \end{aligned}$$

3) \Rightarrow 2): Sei Z eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω', F', P') . Seien $F_X^{-1}(y)$ und $F_Y^{-1}(y)$ die Quantil-Funktionen der Verteilungen von X und Y :

$$\begin{aligned} \bar{F}_X^{-1}(y) &= \inf\{x : F_X(x) \geq y\} \\ \bar{F}_Y^{-1}(y) &= \inf\{x : F_Y(x) \geq y\} \end{aligned}$$

Definieren wir: $X' = F_X^{-1}(Z)$, $Y' = F_Y^{-1}(Z)$. Offensichtlich gilt $X' \stackrel{d}{=} X$, $Y' \stackrel{d}{=} Y$, denn:

$$P(X' \leq x) = P(F_X^{-1}(Z) \leq x) = P(Z \leq F_X(x)) = F_X(x)$$

Für Y' gilt dies genauso. Weiterhin gilt:

$$X' = \inf\{x : F_X(x) \geq Z\} \leq \inf\{x : F_Y(x) \geq Z\} = Y' \quad \text{f.s.},$$

denn aus 3) folgt, dass

$$\begin{aligned}\bar{F}_X(x) &\leq \bar{F}_Y(x) \\ \Rightarrow F_X(x) &\geq F_Y(x) \quad \forall x.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass ein x_0 existiert, so dass:

$$\begin{aligned}Z \leq F_Y(x_0) &\leq F_X(x_0) \\ \inf\{x : F_X(x) \geq Z\} &\leq \inf\{x : F_Y(x) \geq Z\}.\end{aligned}$$

Somit ist 2) bewiesen.

2) \Rightarrow 1): Für alle monoton nicht-fallende Funktionen $g(x)$ gilt:

$$Eg(X) = Eg(X') \leq Eg(Y') = Eg(Y),$$

denn aus 2) folgt, dass $g(X') \leq g(Y')$ f. s. Daraus ergibt sich, dass $X \leq_{st} Y$. \square

Bemerkung 4.3.2. 1. Dieser Satz gibt uns eine Vorstellung davon, warum die stochastische Ordnung in der Risikotheorie eine wichtige Rolle spielt. Und zwar, um die Verteilung des Gesamtschadens X von unten und von oben abzuschätzen, d. h. Verteilungsfunktionen $F_{X_1}(x)$ und $F_{X_2}(x)$ zu finden, so dass $\bar{F}_{X_1}(x) \leq \bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_{X_2}(x)$ gilt, genügt es, Zufallsvariablen X_1 und X_2 zu konstruieren, für die $X_1 \leq_{st} X \leq_{st} X_2$ gilt, und deren Verteilungsfunktionen $F_{X_i}(x)$ explizit berechenbar sind.

2. Die Konstruktion 2) des Satzes 4.3.3 heißt *Kopplung* oder *Coupling* auf Englisch. Es werden nämlich die Zufallsvariablen X und Y dadurch gekoppelt, dass man ihre Versionen X' und Y' auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ konstruiert. Diese Idee spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der stochastischen Prozesse.

Satz 4.3.4. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $X \leq_{sl} Y$
2. Es existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ und Zufallsvariablen X' und Y' definiert auf $(\Omega', \mathcal{F}', P')$, so dass $X' \stackrel{d}{=} X$, $Y' \stackrel{d}{=} Y$ und $X' \leq E(Y' | X')$ f. s. (*Kopplung*).
3. $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $E(X - x)_+ \leq E(Y - x)_+$

Beweis. 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)

1) \Rightarrow 2) Ohne Beweis.

2) \Rightarrow 3)

$$\begin{aligned}
 E (X - x)_+ &= E (X' - x)_+ \\
 &\leq E (E (Y' | X') - x)_+ \\
 &= E (E (Y' - x | X'))_+ \\
 &\leq E (E (\max \{Y' - x, 0\} | X')) \\
 &= E (Y' - x) = E (Y - x)_+,
 \end{aligned}$$

weil für alle Zufallsvariablen ξ gilt:

$$\max \left\{ \int \xi dP \right\} \leq \int \max \{ \xi, 0 \} dP.$$

In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}
 \max \left\{ \int \xi dP, 0 \right\} &= \max \left\{ 0, \int \xi_+ dP - \int \xi_- dP \right\} \\
 &\leq \int \xi_+ dP \\
 &= \int \max \{ \xi, 0 \} dP
 \end{aligned}$$

3) \Rightarrow 1) Sei g eine monoton nicht-fallende, konvexe Funktion.

(a) Nehmen wir zunächst an, dass $g(-\infty) > -\infty$.

Übungsaufgabe 4.3.5. Zeigen Sie, dass für eine nicht-fallende, konvexe Funktion $g(x)$ mit $g(-\infty) > -\infty$ folgendes gilt: Es existiert $\forall x \in \mathbb{R}$ immer eine endliche, rechte Ableitung, die positiv ist:

$$0 \leq g'(x+) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} < \infty \quad \text{und} \quad (4.3.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x+) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x+) \cdot x = 0. \quad (4.3.6)$$

Wir wollen zeigen, dass $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = g(-\infty) + \int_{\mathbb{R}} (x-t)_+ dg'(t+).$$

In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(-\infty) + \int_{-\infty}^x g'(t+) dt \\
&= g(-\infty) + g'(t+) \cdot t \Big|_{-\infty}^x - \int_{-\infty}^x t dg'(t+) \\
&= g(-\infty) + g'(x+) \cdot x - \underbrace{\lim_{t \rightarrow -\infty} g'(t+) \cdot t}_{=0 \text{ aus (4.3.6)}} - \int_{-\infty}^x t dg'(t+) \\
&\stackrel{(4.3.6)}{=} g(-\infty) + x \int_{-\infty}^x dg'(t+) - \int_{-\infty}^x t dg'(t+) \\
&= g(-\infty) + \int_{-\infty}^x (x-t) dg'(t+) \\
&= g(-\infty) + \int_{\mathbb{R}} (x-t)_+ dg'(t+).
\end{aligned}$$

Dann gilt folgendes:

$$\begin{aligned}
E g(X) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X(x) \\
&= g(-\infty) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x-t)_+ dg'(t+) dF_X(x) \\
&\stackrel{Fubini}{=} g(-\infty) + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x-t)_+ dF_X(x) dg'(t+)}_{=E(X-t)_+} \\
&\stackrel{3)}{\leq} g(-\infty) + \int_{\mathbb{R}} E(Y-t)_+ dg'(t) \\
&\stackrel{Fubini}{=} g(-\infty) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x-t)_+ dg'(t) dF_Y(x) \\
&= E g(Y).
\end{aligned}$$

(b) Falls $g(-\infty) = -\infty$, so betrachten wir

$$g_n(t) = \max\{-n, g(t)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich ist $g_n(t)$ monoton nicht-fallend und konvex und $g_n(-\infty) = -n > -\infty$. Dann gilt mit dem Satz von Lévy über die monotone Konvergenz und nach a):

$$E g(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dF_X(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dF_Y(x) = E g(Y)$$

Daraus ergibt sich, dass $E g(X) \leq E g(Y)$.

□

Bemerkung 4.3.3. Seien X und Y die Gesamtschäden eines Erstversicherers. Dann bedeutet $X \leq_{sl} Y$ genau $E(X - a)_+ \leq E(Y - a)_+$, $\forall a \geq 0$, d. h. die Stop-Loss-Prämie des Rückversicherers für die Versicherung von X ist kleiner als die Stop-Loss-Prämie für die Versicherung von Y .

Satz 4.3.5. Seien $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ und $\{U'_i : i \in \mathbb{N}\}$ zwei Folgen von iiv Risiken und N und N' seien die Schadenanzahlen in den Portfolios mit den Schadenhöhen U_i und U'_i , unabhängig von $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ und $\{U'_i : i \in \mathbb{N}\}$. Seien $X = \sum_{i=1}^N U_i$ und $X' = \sum_{i=1}^{N'} U'_i$ die entsprechenden Gesamtschäden. Dann gilt:

1. Falls $U_i \leq_{st} U'_i, \forall i \in \mathbb{N}, N \leq_{st} N' \Rightarrow X \leq_{st} X'$
2. Falls $U_i \leq_{sl} U'_i, \forall i \in \mathbb{N}, N \leq_{sl} N' \Rightarrow X \leq_{sl} X'$

Beweis. (a) Beweisen wir die Aussagen 1) und 2) zunächst für $N = N' = n = \text{const.}$ Teil 1) kann leicht und direkt mit dem Kopplung-Argument bewiesen werden, vgl. Satz 4.3.3 2). Wir werden hier allerdings einen allgemeinen Ansatz angeben, der sowohl für \leq_{st} wie auch für \leq_{sl} funktioniert. Sei $g(x)$ eine monoton wachsende (konvexe) Funktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned} E g\left(\sum_{i=1}^n U_i\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y_1 + \dots + y_n) dF_{U_1}(y_1) \dots dF_{U_n}(y_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} g(a + y_n) dF_U(y) dF_U(y_{n-1}) \dots dF_U(y_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(g(a + U_n)) dF_U(y_{n-1}) \dots dF_U(y_1), \end{aligned}$$

wobei $a = \sum_{i=1}^{n-1} y_i$ sei. Dann gilt weiter mit Hilfe der Definition 4.3.2:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(g(a + U_n)) dF_U(y_{n-1}) \dots dF_U(y_1) \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E(g(a + U'_n)) dF_U(y_{n-1}) \dots dF_U(y_1) \\
& = \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) dF_{U'}(y_n) dF_U(y_{n-1}) \dots dF_U(y_1) \\
& = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} E g\left(\sum_{i=1}^{n-2} y_i + y_n + U_{n-1}\right) dF_{U'}(y_n) dF_U(y_{n-2}) \dots dF_U(y_1) \\
& \leq \dots \leq \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) dF_{U'_1}(y_1) \dots dF_{U'_n}(y_n) \\
& = E g\left(\sum_{i=1}^n U'_i\right).
\end{aligned}$$

Beim vorletzten Rechenschritt wurde dabei eine Induktion nach n vorgenommen. Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^n U_i \leq_{st/sl} \sum_{i=1}^n U'_i \quad (4.3.7)$$

(b) Beweisen wir nun den Satz für allgemeine N und N' :

1) Für alle monoton wachsenden Funktionen $g(x)$ ist

$$\varphi(n) = E g\left(\sum_{i=1}^n U_i\right)$$

eine nicht-fallende Funktion in n . Somit gilt:

$$E g(X) = E g\left(\sum_{i=1}^N U_i\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) p_k = E \varphi(N).$$

Mit Definition 4.3.2 gilt dann:

$$E \varphi(N) \leq E \varphi(N') = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) p'_k.$$

Aus (4.3.7) folgt:

$$\varphi(k) = E g\left(\sum_{i=1}^k U_i\right) \leq E g\left(\sum_{i=1}^k U'_i\right) = \varphi'(k)$$

und somit ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) p'_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi'(k) p'_k = E g \left(\sum_{i=1}^{N'} U'_i \right) = E X'$$

Hiermit wurde gezeigt, dass

$$X \leq_{st} X'.$$

- 2) Sei $g(x)$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion. Dann ist auch $\varphi(n)$ wachsend. Beweisen wir, dass φ konvex ist:

$$\frac{1}{2}(\varphi(n) + \varphi(n+2)) \geq \varphi\left(\frac{n+(n+2)}{2}\right) = \varphi(n+1)$$

oder äquivalent dazu

$$\varphi(n) + \varphi(n+2) \geq 2\varphi(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Übungsaufgabe 4.3.6. Zeigen Sie, dass für eine konvexe Funktion $h(x)$ gilt:

$$\forall x, y \geq 0: h(x+y) + h(0) \geq h(x) + h(y). \quad (4.3.8)$$

Wenn wir

$$h(x) = E g \left(\sum_{i=1}^n U_i + x \right)$$

setzen, so ist sie auch konvex, weil $g(x)$ konvex ist. Für $x = U_{n+1}$ und $y = U_{n+2}$ gilt mit (4.3.8) und mit Hilfe des Erwartungswerts:

$$E h(U_{n+1} + U_{n+2}) + h(0) \geq E h(U_{n+1}) + E h(U_{n+2})$$

oder äquivalent dazu

$$\varphi(n+2) + \varphi(x) \geq \varphi(n+1) + \varphi(n+1).$$

Somit ist die Konvexität von φ bewiesen. Der Rest des Beweises ist Standard:

Mit $N \leq_{sl} N'$ folgt, dass

$$E \varphi(N) \leq E \varphi(N')$$

und aus $U_i \leq_{sl} U'_i$ ergibt sich $\forall i$:

$$\varphi(n) = E g \left(\sum_{i=1}^n U_i \right) \leq E g \left(\sum_{i=1}^n U'_i \right) = \varphi'(n).$$

Hieraus können wir nun folgern:

$$\begin{aligned} E g(X) &= E g\left(\sum_{i=1}^N U_i\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) p_k = E \varphi(N) \\ &\leq E \varphi(N') = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) p'_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi'(k) p'_k \\ &= E g\left(\sum_{i=1}^{N'} U'_i\right) = E X' \end{aligned}$$

und somit haben wir gezeigt, dass

$$X \leq_{st} X'.$$

□

4.3.5 Die größeren Schäden eines Portfolios

Ähnlich zum Fall der subexponentiellen Risiken, gibt es oft einen *einzelnen großen Schaden*, der einen beträchtlichen Einfluss auf die Gesamtschadenshöhe des Portfolios hat. Deshalb besitzt ein Aktuar großes Interesse an der Verteilung von größeren Schäden eines Portfolios.

Um dies zu präzisieren, seien $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots > 0$ die positiven Risiken eines Portfolios, die alle uiv mit Verteilungsfunktion $F_U(x) = P(U_i \leq x)$ sind. Um ein kollektives Modell der Risikothorie zu betrachten, bezeichnen wir mit N die zufällige *Schadenanzahl* im Portfolio, wobei N und $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ unabhängige Zufallsvariablen seien.

Seien $U_{(1)}, \dots, U_{(N)}$ die *Ordnungsstatistiken der Schadenhöhen*, d. h. $U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \dots \leq U_{(N)}$. Uns interessiert die Verteilung des k -größten Schaden $U_{(N-k+1)}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Zum Beispiel ist der größte Schaden $U_{(N)}$ durch $k = 1$ gegeben, der zweitgrößte Schaden ist $U_{(N-1)}$, usw. Für $N \leq k - 1$ setzen wir $U_{(N-k+1)} = 0$. Der Einfachheit wegen betrachten wir zunächst den Fall eines deterministischen $N = n$, z. B. eines individuellen Modells. Im Folgenden machen wir von Lemma 4.3.2 Gebrauch, das in Statistik bewiesen wurde:

Lemma 4.3.2 (Verteilung der Ordnungsstatistiken). *Seien U_1, \dots, U_n eine Stichprobe von uiv Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F_U(x)$. Für jedes $m \in \{1, \dots, n\}$ gilt:*

$$P(U_{(m)} \leq x) = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} F_U^k(x) (1 - F_U(x))^{n-k} \quad (4.3.9)$$

bzw.

$$P(U_{(m)} \leq x) = \frac{n!}{(n-m)!(m-1)!} \int_0^{F_U(x)} y^{m-1}(1-y)^{n-m} dy \quad (4.3.10)$$

Dabei kann die letzte Formel auch wie folgt geschrieben werden:

$$P(U_{(m)} \leq x) = \binom{n}{m} \int_0^{F_U(x)} (1-y)^{n-m} dy^m$$

Übungsaufgabe 4.3.7. Beweisen Sie das obige Lemma.

Hinweis:

Formel (4.3.9) folgt aus der Binomialverteilung von $V_n(x) = \#\{i : U_i \leq x\}$.

Formel (4.3.10) kann durch Induktion nach n bewiesen werden.

Folgerung 4.3.2. Im Einzelnen gilt:

$$\begin{aligned} P(U_{(1)} \leq x) &= 1 - (1 - F_U(x))^n \\ P(U_{(n)} \leq x) &= F_U^n(x). \end{aligned}$$

Indem wir das obige Lemma benutzen, können wir Ergebnisse über die Verteilung von $U_{(N-k+1)}$ für eine allgemeine Zufallsvariable N beweisen:

Satz 4.3.6. Sei $EN^m < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\forall k \geq 1$ und $\forall x \geq 0$:

$$P(U_{(N-k+1)} \leq x) = 1 - \frac{1}{(k-1)!} \int_{F_U(x)}^1 \hat{g}_N^{(k)}(y)(1-y)^{k-1} dy. \quad (4.3.11)$$

Falls alle U_i absolut stetig verteilt sind, dann kann (4.3.11) wie folgt geschrieben werden:

$$P(U_{(N-k+1)} \leq x) = 1 - \frac{1}{(k-1)!} \int_x^\infty \hat{g}_N^{(k)}(F_U(y))(1-F_U(y))^{k-1} dF_U(y).$$

Beweis. Mit Hilfe des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit gilt $\forall k \geq 1$ und $\forall x \geq 0$:

$$\begin{aligned} &P(U_{(n-k+1)} \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(U_{(n-k+1)} \leq x) \cdot P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} P(N = n) \\ &\quad + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \int_0^{F_U(x)} y^{n-k}(1-y)^{k-1} dy \cdot P(N = n), \end{aligned}$$

wobei die erste Summe im letzten Ausdruck aufgrund von $U_{(n-k+1)} = 0$ und die zweite Summe mit (4.3.10) gilt, wenn man $m = n - k + 1$ setzt. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{k-1} P(N = n) + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \int_0^{F_U(x)} y^{n-k} (1-y)^{k-1} dy P(N = n) \\
&= 1 - \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} P(N = n)}_{=r_k} \\
&\quad + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{F_U(x)} \underbrace{\left[\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} y^{n-k} P(N = n) \right]}_{=\hat{g}_N^{(k)}(y)} (1-y)^{k-1} dy \\
&= 1 - r_k + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{F_U(x)} \hat{g}_N^{(k)}(y) (1-y)^{k-1} dy, \tag{4.3.12}
\end{aligned}$$

da die erzeugende Funktion $\hat{g}_N(s) = E s^N$, $|s| < 1$ analytisch für $|s| < 1$ ist. Somit gilt die Formel

$$\hat{g}_N^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} s^{n-k} \cdot p_n, \quad |s| < 1$$

auch für $s = 1$, da wir angenommen haben, dass $E N^m < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\hat{g}_N^{(k)}(1) = E [N(N-1) \cdot \dots \cdot N(N-k+1)].$$

Die Reihenfolge der Summation und Integration kann vertauscht werden, da die Reihe für $|y| \leq 1$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} y^{n-k} (1-y)^{k-1} \cdot P(N = n) \\
&\leq \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot P(N = n) \cdot \frac{1}{(k-1)!} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} E [N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-k+1)] \\
&\leq \frac{1}{(k-1)!} E N^k < \infty
\end{aligned}$$

gleichmäßig auf $y \in [0, F_U(x)]$, $\forall x$ und $\forall F_U(x) \leq 1$ konvergiert, wobei bei der ersten Abschätzung die Tatsache verwendet wurde, dass $|y| \leq 1$ ist.

Wenn wir nun in (4.3.12) $x \rightarrow \infty$ nehmen, so erhalten wir:

$$r_k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} \hat{g}_N^{(k)}(y)(1-y)^{n-1} dy,$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} P(U_{(N-k+1)} \leq x) &= 1 - \frac{1}{(k-1)!} \left(\int_0^1 \hat{g}_N^{(k)}(y)(1-y)^{k-1} dy - \int_0^{F_U(x)} \hat{g}_N^{(k)}(y)(1-y)^{k-1} dy \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(k-1)!} \int_{F_U(x)}^1 \hat{g}_N^{(k)}(y)(1-y)^{k-1} dy, \end{aligned}$$

und (4.3.11) ist bewiesen. Falls die Verteilung von U_i absolut stetig ist, dann ist $F_U(x)$ monoton, und wir bekommen nach dem folgenden Wechsel der Variablen $y = F_U(t)$ in (4.3.11):

$$P(U_{(N-k+1)} \leq x) = 1 - \frac{1}{(k-1)!} \int_x^{\infty} \hat{g}_N^{(k)}(F_U(t))(1-F_U(t))^{k-1} dF_U(t).$$

□

Folgerung 4.3.3. (a) $P(U_{(N)} \leq x) = \hat{g}_N(F_U(x))$

(b) Außerdem gilt:

$$E \left(U_{(N-k+1)}^n \right) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} x^n \hat{g}_N^{(k)}(F_U(x))(1-F_U(x))^{k-1} dF_U(x). \quad (4.3.13)$$

In den meisten Fällen ist es nicht trivial (selbst für einfache Verteilungsfunktionen von N und U) die Integrale in (4.3.11) und (4.3.13) explizit zu berechnen (vgl. Übung 4.3.8).

Übungsaufgabe 4.3.8. Zeigen Sie, dass:

(a) Für $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $U_i \sim \text{Exp}(a)$ gilt

$$E U_{(N-k+1)}^n = \frac{\lambda^k}{a^n (k-1)!} \int_0^1 e^{-\lambda x} (-\log x)^n x^{k-1} dx.$$

(b) Für $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $U_i \sim \text{Par}(\alpha)$ gilt

$$E U_{(N-k+1)}^n = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^1 e^{-\lambda x} x^{k-1-n/\alpha} dx$$

Dieses Integral konvergiert nur für $n < \alpha k$

4.4 Rekursive Berechnungsmethoden

In diesem Abschnitt betrachten wir einige rekursive Methoden zur schnellen Berechnung der Verteilung des Gesamtschadens. Wir nehmen innerhalb dieses Kapitels an, dass die Risiken U_i eine diskrete Anzahl an Werten a_0, a_1, a_2, \dots f. s. annehmen. Diese Annahme ist in der Praxis plausibel, da die Schäden meistens auf eine bestimmte Währungseinheit aufgerundet werden, z.B. $a_i = a \cdot i$, wobei $a = 1$ Euro sei. Darüber hinaus müssen bei der digitalen Speicherung von Informationen alle Schäden diskretisiert werden. Später werden wir o.B.d.A. annehmen, dass $a = 1$ ist, d. h. $U_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ f. s.

Warum benötigen wir solche schnellen Algorithmen? Um diese Frage zu beantworten, werden wir die Komplexität von direkten Berechnungsmethoden der Verteilung des Gesamtschadens analysieren. Laut Formel (4.3.1) gilt im kollektiven Modell:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_U^{*k}(x).$$

In der Praxis gilt:

$$\exists n_0 > 0 : p_{n_0} = P(N = n_0) > 0, \quad p_{n_0+k} = 0, \quad \forall k > 0,$$

d. h., die Anzahl der Schäden ist f. s. endlich. Wieviele Operationen (Multiplikationen) werden benötigt, um

$$F_X(n) = \sum_{k=0}^{n_0} p_k F_U^{*k}(n)$$

zu berechnen, unter der Voraussetzung, dass alle Schäden U_i diskrete Zufallsvariablen sind? Zuerst sollen wir

$$F_U^{*k}(n) = \sum_{i=1}^n q_i^{*k}, \quad \forall k = 0, \dots, n_0, \quad \forall n \leq n_0$$

berechnen, wobei

$$\begin{aligned} q_i^{*k} &= P\left(\sum_{j=1}^k U_j = i\right) \\ &= \sum_{l=1}^i P(U_k = l) \cdot P\left(\sum_{j=1}^{k-1} U_j = n-l\right) \\ &= \sum_{l=0}^i q_l \cdot q_{n-l}^{*(k-1)}. \end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichheit wurde die diskrete Faltungsformel verwendet. Für die Berechnung aller q_i^{*k} , $i = 1, \dots, n$ benötigt man $\underline{O}(n^2)$ Operationen $\forall k \geq 1$: Vorausgesetzt, dass $q_j^{*(k-1)}$ berechnet worden sind, besitzt die Berechnung von q_i^{*k} die Komplexität i , $i = 1, \dots, n$. Damit ergibt sich, dass wir eine Komplexität von

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \underline{O}(n^2).$$

an Operationen benötigen, um q_i^{*k} zu berechnen. Die Berechnung von $F_U^{*k}(n)$, $\forall k = 0, \dots, n_0$ benötigt dieselbe Komplexität $\underline{O}(n^2)$ an Operationen. Damit ist die gesamte Komplexität an Berechnungen für jedes $k = 0, \dots, n_0$ durch

$$\underline{O}\left(\sum_{k=1}^n k^2\right) = \underline{O}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \underline{O}(n^3)$$

gegeben. Falls $n = 100.000$ Euro (eine durchaus plausible Summe als Schadenhöhe) ist, so benötigt man $\underline{O}(n^3) \approx 3,3 \cdot 10^{14}$ Multiplikationen und zusätzlich ungefähr 10^{10} Additionen.

Fazit: Die direkte Berechnung von $F_X(n)$ benötigt $\underline{O}(n^3)$ Operationen. Wie können wir dies verbessern?

Exakte, schnelle, rekursive Berechnungsmethoden:

Algorithmen von De Pril, Panjer, usw. haben eine Komplexität von $\underline{O}(n^2)$.

Näherungen

sind sehr schnell, aber nicht genau. Durch den Fortschritt der Computertechnologie haben diese Näherungen den Vorteil der Zeitersparnis verloren und sind kaum noch in Gebrauch.

Im folgenden werden wir exakte Algorithmen betrachten.

4.4.1 Individuelles Modell: Algorithmus von De Pril

In einem Portfolio mit n Schäden/Policen werden alle Risiken in ab Gruppen S_{ij} , $i = 1, \dots, a$, $j = 1, \dots, b$ eingeteilt. Jede Klasse S_{ij} enthält n_{ij} Policen U_{ijk} , $k = 1, \dots, n_{ij}$, die uiv Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion

$$F_{ij}(\cdot) = (1 - \theta_j)\delta_0(\cdot) + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} p_k^{(i)} \delta_k(\cdot)$$

sind, wobei $\theta_j = P(U_{ijk} > 0)$ die *Wahrscheinlichkeit eines positiven Schadens* mit $1 - \theta_j = P(U_{ijk} = k)$, $k = 1, \dots, m_i$ ist, m_i die *maximale Schadenhöhe* darstellt und $p_k^{(i)} = P(U_{ijk} = k)$, $k = 1, \dots, m_i$ die *Wahrscheinlichkeit* ist, k positive Schäden zu produzieren, unter der Bedingung, dass ein positiver Schaden auftritt.

Aus dieser Notation ergibt sich, dass

$$n = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij}$$

ist und der Gesamtschaden wie folgt dargestellt werden kann:

$$X^{ind} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} U_{ijk}.$$

Wenn wir durch

$$m = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij} m_i,$$

die maximale Gesamtschadensumme bezeichnen, so ist diese erreichbar. Da alle U_{ijk} uiv innerhalb jeder Klasse S_{ij} und auch unabhängig über alle Klassen sind, gilt für die erzeugende Funktion $\hat{g}(s)$ von X^{ind} :

$$\hat{g}(s) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \left(1 - \theta_j + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} p_k^{(i)} s^k \right)^{n_{ij}}$$

In der Tat gilt:

$$\hat{g}(s) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^{n_{ij}} \hat{g}_{U_{ijk}}(s),$$

wobei

$$\hat{g}_{U_{ijk}}(s) = (1 - \theta_j)s^0 + \theta_j \sum_{l=1}^{m_i} p_l^{(i)} s^l.$$

Beispiel 4.4.1. In der Lebensversicherung haben die oben eingeführten Variablen die folgende Bedeutung:

- U_{ijk} – Summe, die an die Familie im Falle des Todes der versicherten Person gezahlt wird
 n – Anzahl der versicherten Personen
 $m_i = i$ – Deckungssumme der Police von der Gruppe i , $i = 1, \dots, a$
 a – Anzahl der verschiedenen Deckungssummen
 θ_j – Wahrscheinlichkeit im Alter j , $j = 1, \dots, b$ zu sterben
 b – erlaubtes Höchstalter
 n_{ij} – Anzahl der Policen in der Altersgruppe j mit Deckungssumme m_i
 $p_k^{(i)} = \delta_{ik}$ – die ganze Summe wird auf einmal zum Zeitpunkt des Todes ausbezahlt

Folgender Algorithmus ermöglicht die rekursive Berechnung von Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(X^{ind} = k)$, $k = 0, \dots, m$.

Satz 4.4.1. Für die Wahrscheinlichkeiten $\{p_k\}_{k=0}^m$ von X^{ind} gilt:

$$p_0 = \prod_{j=1}^b (1 - \theta_j)^{\sum_{i=1}^a n_{ij}} \quad \text{und}$$

$$p_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij} v_{ij}(k), \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.4.1)$$

wobei

$$v_{ij}(k) = \begin{cases} \frac{\theta_j}{1 - \theta_j} \sum_{l=1}^{m_i} p_l^{(i)} (l p_{k-l} - v_{ij}(k-l)), & k = 1, \dots, m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $p_r = v_{ij}(r) \equiv 0$, für alle $r < 0$.

Beweis.

$$p_0 = \hat{g}(0) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (1 - \theta_j)^{n_{ij}} = \prod_{j=1}^b (1 - \theta_j)^{\sum_{i=1}^a n_{ij}}$$

Für den Rest des Beweises siehe [20] S.116-117. □

Bemerkung 4.4.1. In der Summe (4.4.1) läuft l von 1 bis $\min\{k, m_i\}$, wegen $p_{k-l} = v_{ij}(k-l) \equiv 0$ für $k-l < 0$.

Folgerung 4.4.1. Im Beispiel 4.4.1 (Lebensversicherung) gilt: $p_i^{(i)} = 1$ und somit berechnet sich $v_{ij}(k)$ aus (4.4.1) wie folgt:

$$v_{ij}(k) = \frac{\theta_j}{1 - \theta_j} (i p_{k-i} - v_{ij}(k - i)), \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.4.2)$$

Dies ist eine numerisch effizientere Umformulierung (vgl. Übungsaufgabe 4.4.1) (die auf Waldmann (1994) zurückgeht) von folgendem Algorithmus von DePril:

Folgerung 4.4.2 (Algorithmus von DePril). *Im Falle $p_i^{(i)} = 1$, $i = 1, \dots, a$ ist p_k durch folgende Formel zu berechnen:*

$$p_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\min\{a,k\}} \sum_{l=1}^{\lfloor k/i \rfloor} c_{il} p_{k-l,i}, \quad (4.4.3)$$

wobei

$$c_{il} = (-1)^{l+1} i \sum_{j=1}^b n_{ij} \left(\frac{\theta_j}{1 - \theta_j} \right)^l$$

und

$$\lfloor x \rfloor = \max\{p \in \mathbb{N} : p \leq x\}$$

der ganze Teil von $x \in \mathbb{R}$ ist. Nach wie vor ist p_0 dem Satz 4.4.1 zu entnehmen.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0 &= p_0 = \prod_{j=1}^b (1 - \theta_j)^{\sum_{i=1}^a n_{ij}} \\ \tilde{p}_k &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\min\{a,k\}} \sum_{l=1}^{\lfloor k/i \rfloor} c_{il} \tilde{p}_{k-l,i} \end{aligned}$$

eingeführt wie in (4.4.3). Beweisen wir, dass sie mit p_k von (4.4.1)-(4.4.2) übereinstimmen. Setzen wir c_{il} ein:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_k &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\min\{a,k\}} \sum_{l=1}^{\lfloor k/i \rfloor} (-1)^{l+1} i \sum_{j=1}^b n_{ij} \left(\frac{\theta_j}{1 - \theta_j} \right)^l \tilde{p}_{k-l,i} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\min\{a,k\}} \sum_{j=1}^b n_{ij} i \underbrace{\sum_{l=1}^{\lfloor k/i \rfloor} (-1)^{l+1} \left(\frac{\theta_j}{1 - \theta_j} \right)^l}_{=\tilde{v}_{ij}(k)} \tilde{p}_{k-l,i}, \end{aligned}$$

und für alle $k \notin \{1, \dots, n\}$ setzen wir $\tilde{v}_{ij}(k) = 0$. Da $v_{ij}(k) = 0$ für $k - i < 0$ in (4.4.2), geht die Summe in (4.4.1) von $i = 1$ bis $\min\{a, k\}$.

Beweisen wir, dass $\tilde{v}_{ij}(k)$ und \tilde{p}_k denselben rekursiven Formeln wie $v_{ij}(k)$

und p_k genügen, und somit $\tilde{v}_{ij}(k) = v_{ij}(k)$ und $\tilde{p}_k = p_k$ für alle k gilt. In der Tat ist:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{ij}(k) &= \frac{\theta_j}{1-\theta_j} \left(i \tilde{p}_{k-i} - i \sum_{l=2}^{\lfloor k/i \rfloor} (-1)^{(l-1)+1} \left(\frac{\theta_j}{1-\theta_j} \right)^{l-1} \tilde{p}_{k-i-(l-1),i} \right) \\ &= \frac{\theta_j}{1-\theta_j} \left(i \tilde{p}_{k-i} - i \underbrace{\sum_{l_1=1}^{\lfloor \frac{k}{i} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{k-i}{i} \rfloor} (-1)^{l_1+1} \left(\frac{\theta_j}{1-\theta_j} \right)^{l_1} \tilde{p}_{k-i-l_1,i}}_{\tilde{v}_{ij}(k-i)} \right) \\ &= \frac{\theta_j}{1-\theta_j} (i \tilde{p}_{k-i} - \tilde{v}_{ij}(k-i)) = v_{ij}(k),\end{aligned}$$

wobei bei der zweiten Gleichheit die Substitution $l_1 = l - 1$ vorgenommen wurde. \square

Bemerkung 4.4.2. Manchmal wird unter dem Algorithmus von DePril ein Algorithmus zur rekursiven Berechnung von EX^{col} verstanden, vgl. [21], Seite 123.

Übungsaufgabe 4.4.1. Beweisen Sie, dass für die Berechnung von p_k die folgende Anzahl von Multiplikationen R benötigt wird (Komplexität):

- (a) Satz 4.4.1: $R = \underline{Q}(b + a b k^2)$
- (b) Folgerung 4.4.1: $R = \underline{Q}(b + a b k)$
- (c) Folgerung 4.4.2: $R = \underline{Q}(b + \min\{a, k\} k^2 b)$

4.4.2 Kollektives Modell: Algorithmus von Panjer

In diesem Abschnitt betrachten wir das *kollektive Modell* mit uiv Risiken U_i , $i \in \mathbb{N}$, die auch null sein können: $q_0 = P(U_i = 0) > 0$. Dies ist eine Verallgemeinerung der Annahmen, die sonst für das kollektive Modell gelten ($U_i > 0$ f.s.). O.B.d.A. wird auch angenommen, dass $P(U_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}) = 1$. Sei N mit Verteilung $p_k = P(N = k)$ die Schadenanzahl unabhängig von $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$. Sie soll die *Rekursionsformeln von Panjer* erfüllen:

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k} \right) p_{k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad a < 1, \quad b \in \mathbb{R}$$

Aus dem Satz 3.5.1 folgt, dass

$$N \sim \begin{cases} \text{Poisson}(\lambda) \\ \text{Bin}(n, p) \\ \text{NB}(a, p) \end{cases}$$

Sei $q_k = P(U_i = k)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen wir, dass, die Verteilung vom Gesamtschaden $X^{col} = \sum_{i=1}^N U_i$

$$p_k^X = P(X^{col} = k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

folgendermaßen rekursiv berechnet werden kann:

Satz 4.4.2 (Diskreter Algorithmus von Panjer). *Unter den obigen Voraussetzungen gilt:*

$$p_j^X = \begin{cases} \widehat{g}_N(q_0), & j = 0 \\ \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{k=1}^j \left(a + \frac{b_k}{j}\right) q_k p_{j-k}^X, & j \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.4.4)$$

wobei

$$\widehat{g}_N(q_0) = \begin{cases} e^{-\lambda(1-q_0)}, & \text{falls } N \sim \text{Poisson}(\lambda) \\ (1 - p - pq_0)^n, & \text{falls } N \sim \text{Bin}(n, p) \\ \left(\frac{p}{1 - q_0 + pq_0}\right)^\alpha, & \text{falls } N \sim \text{NB}(\alpha, p) \end{cases} \quad (4.4.5)$$

Falls $q_0 = 0$, dann ist $p_0^X = \widehat{g}_N(0) = p_0$.

Beweis. Für $j = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} p_0^X &= P(X^{col} = 0) \\ &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n U_i = 0 \mid N = n\right) p_n \\ &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P(U_i = 0, \forall i = 1, \dots, n) p_n \\ &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_0^n \cdot p_n \\ &= \widehat{g}_N(q_0), \end{aligned}$$

wobei $q_0 = P(U_i = 0)$, $\forall i$. Die konkrete Form von $\widehat{g}_N(q_0)$ in (4.4.5) kommt aus der erzeugenden Funktion für jede Verteilung von N .

Für $j > 0$ gilt, wobei an der Stelle (*) die Panjer-Rekursion für $\{p_n\}$

eingesetzt wird.

$$\begin{aligned}
p_j^X &= P(X^{col} = j) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n U_i = j \mid N = n\right) p_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} q_j^{*(n)} p_n \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} q_j^{*(n)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + b E\left(\frac{U_1}{j} \mid \sum_{i=1}^n U_i = j\right)\right) p_{n-1} q_j^{*(n)},
\end{aligned}$$

weil

$$\frac{1}{n} = E\left(\frac{U_i}{j} \mid \sum_{i=1}^n U_i = j\right).$$

In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}
j &= E\left(\sum_{k=1}^n U_k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j\right) \\
&= \sum_{k=1}^n E\left(U_k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j\right) \\
&= nE\left(U_1 \mid \sum_{i=1}^n U_i = j\right),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Tatsache folgt, dass alle U_i uiv sind. Weiterhin gilt, dass

$$\begin{aligned}
P\left(U_1 = k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j\right) &= \frac{P\left(U_1 = k, \sum_{i=1}^n U_i = j\right)}{P\left(\sum_{i=1}^n U_i = j\right)} \\
&= \frac{P\left(U_1 = k, \sum_{i=2}^n U_i = j - k\right)}{q_j^{*(n)}} \\
&= \frac{P(U_1 = k) \cdot P\left(\sum_{i=2}^n U_i = j - k\right)}{q_j^{*(n)}} \\
&= \frac{q_k \cdot q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*(n)}}.
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit gilt aufgrund der Unabhängigkeit von U_i . Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} E \left(U_1 \mid \sum_{i=1}^n U_i = j \right) &= \sum_{k=0}^j k P \left(U_1 = k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j \right) \\ &= \sum_{k=0}^j k \frac{q_k \cdot q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*(n)}}. \end{aligned}$$

Insgesamt bekommen wir somit

$$\begin{aligned} p_j^X &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a \underbrace{\sum_{k=0}^j P \left(U_1 = k \mid \sum_{i=1}^n U_i = j \right)}_{=1} + b \sum_{k=0}^j \frac{k}{j} \frac{q_k \cdot q_{j-k}^{*(n-1)}}{q_j^{*(n)}} \right) p_{n-1} q_j^{*(n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j \left(a + b \frac{k}{j} \right) q_k q_{j-k}^{*(n-1)} p_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^j q_k \left(a + b \frac{k}{j} \right) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} q_{j-k}^{*(n-1)} p_{n-1}}_{=p_{j-k}^X} \\ &= \sum_{k=0}^j \left(a + b \frac{k}{j} \right) q_k p_{j-k}^X \\ &= a q_0 p_j^X + \sum_{k=1}^j \left(a + b \frac{k}{j} \right) q_k p_{j-k}^X \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} p_j^X (1 - a q_0) &= \sum_{k=1}^j \left(a + b \frac{k}{j} \right) q_k p_{j-k}^X \\ \implies p_j^X &= \frac{1}{1 - a q_0} \sum_{k=1}^j \left(a + b \frac{k}{j} \right) q_k p_{j-k}^X \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.4.3. 1. Um in (4.4.4) eine sinnvolle Lösung zu bekommen, die nicht identisch 0 ist, muss $p_0^X \neq 0$ sein, d.h. entweder $q_0 > 0$, oder $q_0 = 0$, $p_0 > 0$. Dies ist aber in der Praxis stets erfüllt, weil ein Portfolio immer mit einer positiven Wahrscheinlichkeit schadenfrei bleibt. Allerdings geht diese Wahrscheinlichkeit $p_0^X \rightarrow 0$ für sehr große Bestände n . Z. B. für $n = 10.000$ ist in der Praxis $p_0^X \approx 10^{-626}$.

2. Die Komplexität der Berechnung von p_n^X aus (4.4.4), falls p_0^X, \dots, p_{n-1}^X schon berechnet worden sind, ist $\underline{Q}(n)$. Somit ist der Gesamtaufwand für die Berechnung von p_n^X von Anfang an $\underline{Q}(n^2)$ Multiplikationen.

Beispiel 4.4.2. Betrachten wir einen Bestand von 100.000 Policen aus der Lebensversicherung. Versichert sind Personen zwischen 30 und 49 Jahren. Die Versicherungssumme beträgt 10.000 bis 50.000 Euro. Versicherungssummen, die zum Ende eines Geschäftsjahres ausgezahlt werden müssen, können

1. eine Auszahlung im Todesfall in diesem Jahr
2. eine einzelne Auszahlung, falls die Mitglieder einer Risikogruppe für t Jahre überleben
3. eine Pension/Annuität, die für die überlebenden Mitglieder einer Risikogruppe in diesem Jahr gezahlt wird,

sein. Dabei ist eine Risikogruppe eine Gruppe an Menschen, die bestimmte statistische Angaben gemeinsam haben, z. B., wenn sie im selben Jahr geboren wurden. In diesem Beispiel betrachten wir nur die Auszahlung, die in 1) und 2) erwähnt wurden, da sie Einzelzahlungen voraussetzen, während es sich in 3) um regelmäßige Pensionszahlungen handelt.

Betrachten wir jeweils eine Versicherungsperiode von einem Geschäftsjahr. Das Alter, die entsprechende „rechnungsmäßige“ oder „theoretische“ Sterbewahrscheinlichkeit und die Anzahl der Versicherten in diesem Alter sind in Tabelle 4.4.1 angegeben. Die Verteilung der Schadensumme in jeder Altersgruppe ist gleich (vgl. Tabelle 4.4.2). Am Ende des Geschäftsjahres hat man festgestellt, dass die eingetretenen Sterbewahrscheinlichkeiten ungefähr um die Hälfte kleiner sind, als die theoretischen Werte.

Da die tatsächlichen Sterbewahrscheinlichkeiten nur halb so groß sind, wie die „rechnungsmäßigen“, gehen wir in unseren Betrachtungen von einem in der Lebensversicherung üblichen Überschussbeteiligungssystem aus, dem Todesfallbonus. Im Falle des Todes wird die doppelte Todesfallsumme fällig:

$q_i \setminus i$	0	1	2	3	4	5	($\times 20.000$ Euro)
q_i	0	0,35	0,25	0,2	0,15	0,05	

Die Diskretisierung erfolgt in 20.000-Euro-Schritten. Somit ist die mittlere Schadenanzahl (berechnet mit den „tatsächlichen“ Sterbewahrscheinlichkeiten) $EN = 167,34$, $EX = 3.848.800 \cdot 2 = 7.697.600$ Euro.

Alter	Sterbewahr- scheinlichkeit	Anzahl der Policen
30	0,00220	10.000
31	224	9.000
32	230	8.000
33	238	7.000
34	249	6.000
35	0,00259	5.000
36	272	5.000
37	288	5.000
38	306	5.000
39	326	5.000
40	0,00344	4.000
41	366	4.000
42	390	4.000
43	418	4.000
44	452	4.000
45	0,00493	3.000
46	542	3.000
47	601	3.000
48	664	3.000
49	789	3.000

Tabelle 4.4.1: „rechnungsmäßige“ Sterbewahrscheinlichkeiten und Anzahl der Policen

Versicherungs- summe in in 10⁴ Euro	Häufigkeit
1	0,35
2	0,25
3	0,20
4	0,15
5	0,05

Tabelle 4.4.2: Verteilung der Versicherungssummen in allen Altersgruppen

x in Euro $x \cdot 10^7$	$P(X = x)$	$F_X(x)$	x in Euro $x \cdot 10^7$	$P(X = x)$	$F_X(x)$
5,00	0,00000130	0,00000888	7,00	0,00826691	0,19301596
5,01	0,00000000	0,00000888	7,01	0,00000000	0,19301596
5,02	0,00000151	0,00001039	7,02	0,00847951	0,20149547
5,03	0,00000000	0,00001039	7,03	0,00000000	0,20149547
5,04	0,00000175	0,00001214	7,04	0,00868925	0,21018472
5,05	0,00000000	0,00001214	7,05	0,00000000	0,21018472
5,06	0,00000202	0,00001416	7,06	0,00889567	0,21908039
5,07	0,00000000	0,00001416	7,07	0,00000000	0,21908039
5,08	0,00000234	0,00001650	7,08	0,00909833	0,22817871
5,09	0,00000000	0,00001650	7,09	0,00000000	0,22817871
5,10	0,00000270	0,00001920	7,10	0,00929678	0,23747549
	7,11	0,00000000	0,23747549
			7,12	0,00949057	0,24696606
6,00	0,00042244	0,00462821	7,13	0,00000000	0,24696606
6,01	0,00000000	0,00462821	7,14	0,00967928	0,25664534
6,02	0,00045928	0,00508749	7,15	0,00000000	0,25664534
6,03	0,00000000	0,00508749	7,16	0,00986246	0,26650780
6,04	0,00049875	0,00558624	7,17	0,00000000	0,26650780
6,05	0,00000000	0,00558624	7,18	0,01003971	0,27654750
6,06	0,00054099	0,00612723	7,19	0,00000000	0,27654750
6,07	0,00000000	0,00612723	7,20	0,01021060	0,28675810
6,08	0,00058612	0,00671335	7,21	0,00000000	0,28675810
6,09	0,00000000	0,00671335	7,22	0,01037474	0,29713284
6,10	0,00063428	0,00734763	7,23	0,00000000	0,29713284
	7,24	0,01053174	0,30766458

Tabelle 4.4.3: Verteilung des Schadens nach Anwendung des Algorithmus von Panjer – Teil 1

x in Euro $x \cdot 10^7$	$P(X = x)$	$F_X(x)$	x in Euro $x \cdot 10^7$	$P(X = x)$	$F_X(x)$
7,25	0,00000000	0,30766458	7,50	0,01178179	0,45502794
7,26	0,01068124	0,31834581	7,51	0,00000000	0,45502794
7,27	0,00000000	0,31834581	7,52	0,01180933	0,46683727
7,28	0,01082288	0,32916869	7,53	0,00000000	0,46683727
7,29	0,00000000	0,32916869	7,54	0,01182647	0,47866374
7,30	0,01095632	0,34012501	7,55	0,00000000	0,47866374
7,31	0,00000000	0,34012501	7,56	0,01183318	0,49049692
7,32	0,01108125	0,35120626	7,57	0,00000000	0,49049692
7,33	0,00000000	0,35120626	7,58	0,01182949	0,50232641
7,34	0,01119739	0,36240365	7,59	0,00000000	0,50232641
7,35	0,00000000	0,36240365	7,60	0,01181544	0,51414185
7,36	0,01130444	0,37370809	7,61	0,00000000	0,51414185
7,37	0,00000000	0,37370809	7,62	0,01179109	0,52593294
7,38	0,01140217	0,38511026	7,63	0,00000000	0,52593294
7,39	0,00000000	0,38511026	7,64	0,01175653	0,53768947
7,40	0,01149034	0,39660060	7,65	0,00000000	0,53768947
7,41	0,00000000	0,39660060	7,66	0,01171190	0,54940137
7,42	0,01156876	0,40816936	7,67	0,00000000	0,54940137
7,43	0,00000000	0,40816936	7,68	0,01165732	0,56105869
7,44	0,01163725	0,41980661	7,69	0,00000000	0,56105869
7,45	0,00000000	0,41980661	7,70	0,01159299	0,57265168
7,46	0,01169566	0,43150228	7,71	0,00000000	0,57265168
7,47	0,00000000	0,43150228	7,72	0,01151908	0,58417077
7,48	0,01174387	0,44324615	7,73	0,00000000	0,58417077
7,49	0,00000000	0,44324615	7,74	0,01143583	0,59560659

Tabelle 4.4.3: Verteilung des Schadens nach Anwendung des Algorithmus von Panjer – Teil 2

Nach der Anwendung des Algorithmus von Panjer bekommt man entsprechende Werte für die Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(X = k)$ und $F_X(k) = P(X \leq k)$, vgl. Tabelle 4.4.3. Zum Beispiel für den gerundeten Erwartungswert $EX \approx 7.700.000$ Euro bekommt man $F_X(EX) = 0,5611$, was dem Unternehmen keinesfalls Sicherheit bietet, solvent zu sein.

Über welches Sicherheitspolster soll das Versicherungsunternehmen verfügen, um mit Wahrscheinlichkeit 0,99 zahlungsfähig zu sein? Die Antwort dafür gibt uns das 0,99-Quantil der Verteilung $F_X(x)$. Die Grafik von $F_X(x)$ ist in der Abbildung 4.4.1 dargestellt. Man kann nun berechnen, dass $Q_{F_X}(0,99) = 9.320.000$ Euro, $Q_{F_X}(0,999) = 9.880.000$ Euro. Wenn man von einem Nettoprämien-Modell ausgeht, d. h., Prämieinnahmen = EX , so braucht das Unternehmen zusätzlich eine Risikoreserve von $Q_{F_X}(0,99) - EX = 1.620.000$ Euro in Eigenkapital, um solvent zu sein.

Jetzt vergleichen wir die Rechenzeiten mit der Faltungsformel und dem Panjer-Algorithmus:

	Panjer-Algorithmus	Faltungsformel
Additionen	15.000	1.126.000.000
Multiplikationen	60.000	6.750.000.000
CPU-Zeit	1,5 Sek.	4.000 Sek.
Reale Zeit	5 Sek.	> 5 St.

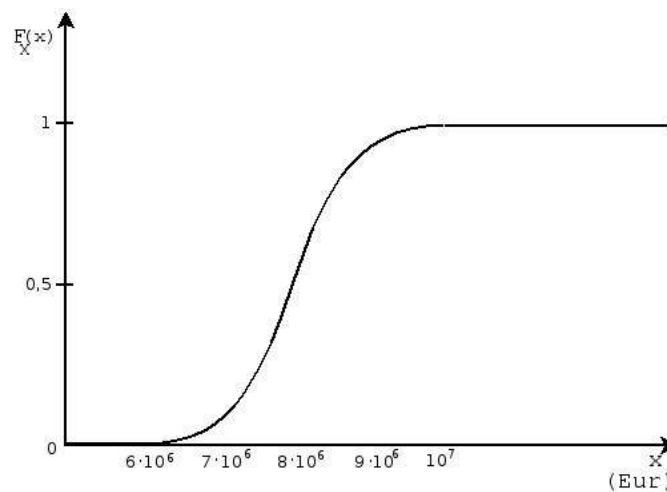


Abbildung 4.4.1: Verteilung des Gesamtschadens des großen Musterbestands

4.4.3 Stetige Version des Algorithmus von Panjer

Jetzt befreien wir uns von der Annahme, dass alle U_i diskret verteilt sind.

Satz 4.4.3. *Erfülle, nach wie vor, die Verteilung von N die Panjer-Rekursion mit Parameter a und b :*

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} \quad n \in \mathbb{N},$$

und seien U_i i.i.v mit Verteilungsfunktion $F_U(x)$. Für $x > 0$ erfüllt die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ des Gesamtschadens folgende Integralgleichung:

$$F_X(x) = p_0 + a F_U * F_X(x) + b \int_0^x \int_0^{x-v} \frac{v}{v+y} dF_X(y) dF_U(v). \quad (4.4.6)$$

Falls $F_U(0) = \alpha > 0$ ist, dann gilt:

$$F_X(0) = \begin{cases} \left(\frac{1-a}{1-a\alpha}\right)^{\frac{a+b}{a}} & \text{falls } a \neq 0 \\ e^{(\alpha-1)b} & \text{falls } a = 0 \end{cases} \quad (4.4.7)$$

Beweis. Sei $F_U(0) = \alpha > 0$. Laut (4.3.1), ist $\forall x > 0$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_U^{*n}(x) p_n \\ &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} F_U^{*n}(x) \\ &= p_0 + a \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_U^{*(n+1)}(x) + b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n+1} F_U^{*(n+1)}(x) \\ &= p_0 + a F_U * F_X(x) + b G(x), \end{aligned}$$

wobei

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n+1} F_U^{*(n+1)}(x).$$

Dabei wurde bei der zweiten Gleichheit die Panjer-Rekursion und bei der dritten Gleichheit ein Variablenshift von n nach $n+1$ vorgenommen.

Per Definition gilt dann:

$$\begin{aligned} F_U^{*(n+1)}(x) &= E \mathbf{1}(U_1 + \dots + U_{n+1} \leq x) \\ &= E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n+1} U_i}{\sum_{i=1}^{n+1} U_i} \mathbf{1} \left(\sum_{i=1}^{n+1} U_i \leq x \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} E \left[\frac{U_j}{\sum_{i=1}^{n+1} U_i} \mathbf{1} \left(\sum_{i=1}^{n+1} U_i \leq x \right) \right]. \end{aligned}$$

Da alle U_i uiv sind können wir weiter schließen:

$$\begin{aligned}
F_U^{*(n+1)}(x) &= \sum_{j=1}^{n+1} E \left[\frac{U_j}{\sum_{i=1}^{n+1} U_i} \mathbf{1} \left(\sum_{i=1}^{n+1} U_i \leq x \right) \right] \\
&= (n+1) E \left[\frac{U_1}{\sum_{i=1}^{n+1} U_i} \mathbf{1} \left(\sum_{i=1}^{n+1} U_i \leq x \right) \right] \\
&= (n+1) \int_0^\infty y E \left[\frac{1}{y + \sum_{i=2}^{n+1} U_i} \mathbf{1} \left(\sum_{i=2}^{n+1} U_i \leq x - y \right) \right] dF_U(y) \\
&= (n+1) \int_0^\infty y \int_0^\infty \frac{\mathbf{1}(y+v \leq x)}{y+v} dF_U^{*n}(v) dF_U(y) \\
&= (n+1) \int_0^x \int_0^{x-y} \frac{y}{y+v} dF_U^{*n}(v) dF_U(y).
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{n=0}^\infty p_n \int_0^x \int_0^{x-y} \frac{y}{y+v} dF_U^{*n}(v) dF_U(y) \\
&= \int_0^x \int_0^{x-y} \frac{y}{y+v} d \left(\sum_{n=0}^\infty p_n F_U^{*n}(v) \right) dF_U(y) \\
&= \int_0^x \int_0^{x-y} \frac{y}{y+v} dF_X(v) dF_U(y),
\end{aligned}$$

wobei die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty p_n F_U^{*n}(v)$$

gleichmäßig in \mathbb{R} konvergiert, da

$$\sum_{n=0}^\infty p_n = 1 \quad \text{und} \quad (F_U^{*n}(v)) \leq 1.$$

Somit haben wir bewiesen, dass

$$F_X(x) = p_0 + a F_U * F_X(x) + b \int_0^x \int_0^{x-y} \frac{y}{y+v} dF_X(v) dF_U(y),$$

d. h., (4.4.6) gilt.

Sei nun $F_U(0) = \alpha > 0$. Dann gilt mit der Panjer-Rekursion:

$$\begin{aligned}
 F_X(0) &= \widehat{g}_N(\alpha) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n p_n \\
 &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} \alpha^n \\
 &= p_0 + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(a + \frac{b}{n+1}\right) p_n \alpha^n \\
 &= p_0 + \alpha a \widehat{g}_N(\alpha) + b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} p_n \\
 &= p_0 + \alpha a \widehat{g}_N(\alpha) + b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\alpha} x^n dx\right) p_n \\
 &= p_0 + \alpha a \widehat{g}_N(\alpha) + b \int_0^{\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n p_n\right) dx \\
 &= p_0 + \alpha a \widehat{g}_N(\alpha) + b \int_0^{\alpha} \widehat{g}_N(x) dx
 \end{aligned}$$

Bei der vorletzten Gleichheit können wir Integration und Summation vertauschen, da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n p_n = \widehat{g}_N(x)$$

gleichmäßig auf $x \in [0, 1]$ konvergiert. Somit erhalten wir die Gleichung

$$\widehat{g}_N(\alpha) = p_0 + \alpha a \widehat{g}_N(\alpha) + b \int_0^{\alpha} \widehat{g}_N(x) dx.$$

Durch Differenzieren dieser Gleichung nach α erhalten wir:

$$\widehat{g}'_N(\alpha) = a \widehat{g}_N(\alpha) + \alpha a \widehat{g}'_N(\alpha) + b \widehat{g}_N(\alpha).$$

Diese Differentialgleichung können wir auch als das folgende Cauchy-Problem schreiben:

$$\begin{cases} \widehat{g}'_N(\alpha) = \left(\frac{a+b}{1-\alpha a}\right) \widehat{g}_N(\alpha) \\ \widehat{g}_N(1) = 1 \end{cases}$$

1. Sei $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\widehat{g}'_N(\alpha)}{\widehat{g}_N(\alpha)} d\alpha &= (b+a) \int \frac{d\alpha}{1-a\alpha} + c \\ \Rightarrow \log \widehat{g}_N(\alpha) &= -\frac{b+a}{a} \log(1-a\alpha) + c \\ \Leftrightarrow \widehat{g}_N(\alpha) &= e^c (1-a\alpha)^{-\frac{b+a}{a}} \end{aligned}$$

Da $\widehat{g}_N(1) = 1 = e^c (1-a)^{-\frac{b+a}{a}}$ gilt, folgt somit $e^c = (1-a)^{\frac{b+a}{a}}$.
Insgesamt erhalten wir somit

$$\widehat{g}_N(\alpha) = \left(\frac{1-a}{1-a\alpha} \right)^{\frac{b+a}{a}}.$$

2. Sei nun $a = 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{g}'_N(\alpha) &= b \widehat{g}_N(\alpha) \\ \Rightarrow \widehat{g}_N(\alpha) &= c e^{b\alpha} \end{aligned}$$

Hieraus und aus $\widehat{g}_N(1) = c e^b = 1$ folgt dann, dass $c = e^{-b}$, und insgesamt ergibt sich

$$\widehat{g}_N(\alpha) = e^{b(\alpha-1)}.$$

Wenn wir unsere Erkenntnisse zusammenfassen, so erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$F_X(0) = \begin{cases} \left(\frac{1-a}{1-a\alpha} \right)^{\frac{b+a}{a}}, & a \neq 0 \\ e^{b(\alpha-1)}, & a = 0 \end{cases}$$

□

Im folgenden wollen wir den Fall betrachten, dass die Risiken U_i stetig mit der Dichte $f_U(\cdot)$ sind:

$$F_U(x) = \int_0^x f_U(y) dy.$$

Sei f_U eine beschränkte Funktion. Dann hat die Verteilung von X ein Atom in Null und eine stetig verteilte Komponente mit Dichte $f_X(\cdot)$:

$$F_X(x) = p_0 \mathbf{1}(x \geq 0) + \int_0^x f_X(y) dy,$$

wobei

$$f_X(y) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k f_U^{*k}(y).$$

Satz 4.4.4. Seien die Risiken U_i stetig verteilt mit beschränkter Dichte $f_U(y)$. Falls die Verteilung der Schadenanzahl $\{p_i : i \geq 0\}$ die Rekursion von Panjer erfüllt, dann ist die Dichte $f_X(y)$ die eindeutige Lösung der folgenden Integralgleichung

$$f_X(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (ax + by) f_U(y) f_X(x-y) dy + p_1 f_U(x) \quad (4.4.8)$$

auf dem Raum $L^1(0, \infty)$.

Beweis. siehe [20], S. 122-123. □

Beispiel 4.4.3. In diesem Beispiel vergleichen wir die Genauigkeit des diskreten mit dem stetigen Panjer-Algorithmus.

Sei die Schadenanzahl $N \sim NB(2, p)$, wobei p so gewählt wird, dass $EN = 100$ gilt. Somit können wir p bestimmen:

$$100 = EN = \frac{2p}{1-p} \Rightarrow p = 50 - 50p \Rightarrow p = \frac{50}{51}.$$

Seien die Einzelschäden $U_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda = 1$. Dann folgt aus der Übung 4.3.4, dass

$$\overline{F}_X(x) = e^{-(1-p)\lambda x} (1 - (1-p)^2 + p^2(1-p)\lambda x) \quad x \geq 0.$$

Um den diskreten Algorithmus von Panjer anwenden zu können, müssen wir die Schadenhöhen U_i diskretisieren: $\overline{U}_i = a \left[\frac{U_i}{a} \right]$, wobei a die Währungseinheit sei. In diesem Beispiel setzen wir $a = 0,01$. Für den stetigen Algorithmus von Panjer brauchen wir folgende Konvention:

$$\begin{aligned} \overline{F}_X(ka) &= \int_{ka}^{\infty} f_X(t) dt \\ &= \int_{(k-1)a}^{\infty} f_X(t) dt - \int_{(k-1)a}^{ka} f_X(t) dt \\ &\approx \overline{F}_X((k-1)a) - a f_X(ka) \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

wobei

$$\int_{(k-1)a}^{ka} f_X(t) dt \approx a f_X(ka)$$

aufgrund des Mean-Value-Theorems gilt.

Zuerst müssen die Werte $f_X(ka)$ für $1 \leq k \leq 1000$ berechnet werden, indem die entsprechenden Integrale in (4.4.8) diskretisiert werden. Dann wird die rekursive Formel (4.4.9) benutzt, um $\bar{F}_X(ka)$ zu berechnen. Diese Ergebnisse sind in der Tabelle 4.4.4 angegeben. Es ist leicht zu sehen, dass der diskrete Algorithmus von Panjer viel bessere Ergebnisse liefert als sein stetiges Analogon. Dies liegt wahrscheinlich in dem mehrfachen Diskretisierungsfehler in den Integralen (4.4.8) und (4.4.9) begründet.

$\mathbf{x} = \mathbf{k} \mathbf{a}$	$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (theoretisch)	$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (diskreter Panjer)	$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (stetiger Panjer)
0,2	0,9994576849	0,9994670538	0,9990879445
0,4	0,9992857597	0,9992971743	0,9989156727
0,6	0,9990998702	0,9991134705	0,9987294395
0,8	0,9989001291	0,9989160536	0,9985293566
1,0	0,9986866458	0,9987050343	0,9983155350
2,0	0,9974169623	0,9974497336	0,9970441967
4,0	0,9939091415	0,9939807697	0,9935332344
6,0	0,9891960212	0,9893194873	0,9888171510
8,0	0,9833754927	0,9835632134	0,9829937890
10,0	0,9765397011	0,9768035345	0,9761552479

Tabelle 4.4.4: Diskreter und stetiger Panjer-Algorithmus im Vergleich ($a = 0,01$)

4.5 Approximationen durch das kollektive Modell

In diesem Kapitel betrachteten wir zwei grundlegende Ansätze zur Modellierung des Gesamtschadens: das *individuelle Modell*

$$X^{ind} = \sum_{i=1}^n U_i,$$

wobei alle U_i unabhängig und meist nicht identisch verteilt sind mit

$$U_i \sim (1 - \theta_i)\delta_0(\cdot) + \theta_i F_{V_i}(\cdot)$$

mit $V_i > 0$ f. s. und das *kollektive Modell*

$$X^{col} = \sum_{i=1}^N U_i',$$

wobei U_i' i.i.v., $U_i' > 0$ f. s. und $\{U_i' : i \in \mathbb{N}\}$ unabhängig von N sind.

In der Praxis sind die Daten meistens in der Form von einem Portfolio mit n Policen gegeben, also können sie in das individuelle Modell angepasst werden. Aus der Theorie wissen wir aber, dass das kollektive Modell einfacher handzuhaben ist. Jetzt stellen wir uns vor, dass wir ein gegebenes *individuelles Modell durch ein passendes kollektives Modell* ersetzen, so, dass

$$E X^{ind} = E X^{col}.$$

Welchen Fehler machen wir dann in der Verteilung des Gesamtschadens? Um diese Frage zu beantworten, werden wir den Begriff einer Metrik auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße ein. Die *Totalvariation* für zwei beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße F und G ist wie folgt definiert:

$$d(F, G) = \sup_{B \in \mathcal{m}\mathcal{B}(\mathbb{R})} |F(B) - G(B)|$$

wobei $\mathcal{m}\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel- σ -Algebra der Mengen auf \mathbb{R} ist. Die drei *Eigenschaften einer Metrik* werden erfüllt:

$$\left\{ \begin{array}{l} d(F, G) = 0 \Leftrightarrow F = G \\ d(F, G) = d(G, F) \\ d(F, G) \leq d(F, H) + d(H, G) \end{array} \right.$$

für alle Wahrscheinlichkeitsmaße F, G und H auf \mathbb{R} . Äquivalent dazu kann man schreiben:

$$d(F, G) = \sup_{B \in \mathcal{m}\mathcal{B}(\mathbb{R})} (F(B) - G(B)),$$

da die folgende Ungleichung gilt:

$$F(B) - G(B) \leq |F(B) - G(B)| = \max\{F(B) - G(B), G(B) - F(B)\},$$

wobei

$$G(B) - F(B) = 1 - F(B) - (1 - G(B)) = F(B^c) - G(B^c).$$

Dies führt zu folgender Aussage:

$$\begin{aligned} \sup_{B \in \mathcal{m}\mathcal{B}(\mathbb{R})} (F(B) - G(B)) &\leq \sup_{B \in \mathcal{m}\mathcal{B}(\mathbb{R})} |F(B) - G(B)| \\ &\leq \sup_{B \in \mathcal{m}\mathcal{B}(\mathbb{R})} (F(B) - G(B)). \end{aligned}$$

Weiter werden wir $d(X, Y)$ an Stelle von $d(F_X, F_Y)$ schreiben, wobei $F_X(x) = P(X \in B)$ und $F_Y(x) = P(Y \in B)$ die Verteilungen für die Zufallsvariablen X und Y sind.

Das zentrale Problem der folgenden Betrachtungen liegt in der *Schätzung von $d(X^{ind}, X^{col})$* für bestimmte kollektive Approximationen für das individuelle Modell.

Lemma 4.5.1. *Seien X_1, \dots, X_n und Y_1, \dots, Y_n unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt:*

$$d\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n d(X_i, Y_i), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Für beliebiges n wird der Beweis durch Induktion geführt. Zeigen wir die Aussage für $n = 2$.

$$\begin{aligned} & d(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) \\ &= \sup_{B \in \mathcal{mB}(\mathbb{R})} \left| \int_{\mathbb{R}} F_{X_1}(B-x) F_{X_2}(dx) - \int_{\mathbb{R}} F_{Y_1}(B-x) F_{Y_2}(dx) \right| \\ &= \sup_{B \in \mathcal{mB}(\mathbb{R})} \left| \int_{\mathbb{R}} F_{X_1}(B-x) F_{X_2}(dx) - \int_{\mathbb{R}} F_{Y_1}(B-x) F_{X_2}(dx) \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mathbb{R}} F_{X_2}(B-x) F_{Y_1}(dx) - \int_{\mathbb{R}} F_{Y_2}(B-x) F_{Y_1}(dx) \right|. \end{aligned}$$

Dabei sind im letzten Term die beiden Summanden

$$\int_{\mathbb{R}} F_{Y_1}(B-x) F_{X_2}(dx) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} F_{X_2}(B-x) F_{Y_1}(dx)$$

gleich, da

$$\int_{\mathbb{R}} F(B-x) dG = \int_{\mathbb{R}} G(B-x) dF.$$

Somit gilt weiter:

$$\begin{aligned} & d(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) \\ &= \sup_{B \in \mathcal{mB}(\mathbb{R})} \left| \int_{\mathbb{R}} F_{X_1}(B-x) F_{X_2}(dx) - \int_{\mathbb{R}} F_{Y_1}(B-x) F_{Y_2}(dx) \right| \\ &\leq \sup_{B \in \mathcal{mB}(\mathbb{R})} \left| \int_{\mathbb{R}} (F_{X_1}(B-x) - F_{Y_1}(B-x)) F_{X_2}(dx) \right| \\ & \quad + \sup_{B \in \mathcal{mB}(\mathbb{R})} \left| \int_{\mathbb{R}} (F_{X_2}(B-x) - F_{Y_2}(B-x)) F_{Y_1}(dx) \right| \\ &\leq d(X_1, Y_1) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} F_{X_2}(dx)}_{=1} + d(X_2, Y_2) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} F_{Y_1}(dx)}_{=1} \\ &= \sum_{i=1}^2 d(X_i, Y_i) \end{aligned}$$

□

Im folgenden werden wir drei verschiedene Näherungen für das individuelle Modell

$$X^{ind} = \sum_{i=1}^n U_i \quad \text{mit} \quad U_i \sim (1 - \theta_i)\delta_0(\cdot) + \theta_i F_{V_i}(\cdot)$$

für $i = 1, \dots, n$ betrachten.

Beispiel 4.5.1 (Zusammengesetzte Poissonapproxiamtion). *Wir werden jedes Risiko U_i durch eine zusammengesetzte, poissonverteilte Zufallsvariable*

$$Y_i = \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}$$

mit den Parametern (θ_i, F_{V_i}) approximieren. Seien Y_1, \dots, Y_n unabhängig voneinander. Dann ist laut Satz 4.3.2

$$X^{col} = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}$$

wieder eine zusammengesetzte, poissonverteilte Zufallsvariable mit Parametern (θ, F) , wobei

$$\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i \quad \text{und} \quad F(\cdot) = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i}{\theta} F_{V_i}(\cdot) \quad (4.5.1)$$

Beispiel 4.5.2 (zusammengesetzte Binomialapproximation). *Ähnlich zum obigen Beispiel setzen wir*

$$X^{col} = \sum_{i=1}^N U_i'$$

wobei $N \sim \text{Bin}(n, p)$ mit $p = \frac{\theta}{n}$ und $U_i' \sim F(\cdot)$. θ und $F(\cdot)$ sind wie in Formel (4.5.1) gegeben.

Beispiel 4.5.3 (zusammengesetzte Negativbinomialapproximation). *Hier setzen wir*

$$X^{col} = \sum_{i=1}^N U_i'$$

wobei $N \sim \text{NB}(n, \frac{p}{1+p})$ und $U_i' \sim F(\cdot)$ mit Parametern p und $F(\cdot)$ wie in den Beispielen 4.5.1 und 4.5.2.

Übungsaufgabe 4.5.1. *Zeigen Sie, dass die folgenden Feststellungen stimmen:*

1. In den Beispielen 4.5.1 - 4.5.3 gilt:

$$\begin{aligned} E X^{ind} &= E X^{col} = \sum_{i=1}^n \theta_i E V_i \\ \text{Var } X^{ind} &< \text{Var } X^{col} \\ \text{Var } X^{ind} &= \sum_{i=1}^n \theta_i E V_i^2 - \sum_{i=1}^n \theta_i^2 (E V_i)^2 \end{aligned}$$

2. Speziell ist die Varianz von X^{col} wie folgt gegeben:

$$\text{Var } X^{col} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \theta_i E V_i^2, & \text{im Poisson-Fall} \\ \sum_{i=1}^n \theta_i E V_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \theta_i E V_i \right)^2, & \text{im Binomial-Fall} \\ \sum_{i=1}^n \theta_i E V_i^2 + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \theta_i E V_i \right)^2, & \text{im Negativbinomial-Fall} \end{cases}$$

und somit folgt aus der Dispersionierung der Verteilungen

$$\text{Var } X_{Bin}^{col} < \text{Var } X_{Poi}^{col} < \text{Var } X_{NB}^{col}$$

Satz 4.5.1. Es gilt die folgende Fehlerschranke für die Poisson-Approximation aus Beispiel 4.5.1:

$$d(X^{ind}, X^{col}) \leq \sum_{i=1}^n \theta_i^2. \quad (4.5.2)$$

Beweis. Da $X^{ind} = \sum_{i=1}^n U_i$ und $X^{col} = \sum_{i=1}^n Y_i$ benutzen wir Lemma 4.5.1 um

$$d(X^{ind}, X^{col}) \leq \sum_{i=1}^n d(U_i, Y_i)$$

zu erhalten. Jetzt müssen wir noch zeigen, dass

$$d(U_i, Y_i) \leq \theta_i^2, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

ist. Tatsächlich gilt:

$$d(U_i, Y_i) \leq \sup_{B \in \mathcal{m}\mathcal{B}(\mathbb{R})} (F_{U_i}(B) - F_{Y_i}(B)),$$

wobei

$$\begin{aligned} F_{U_i}(B) - F_{Y_i}(B) &= (1 - \theta_i)\delta_0(B) + \theta_i F_{V_i}(B) \\ &- \left(e^{-\theta_i}\delta_0(B) + \theta_i e^{-\theta_i} F_{V_i}(B) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\theta_i^k}{k!} e^{-\theta_i} F_{V_i}^{*k}(B) \right), \end{aligned}$$

wobei wir hier die Tatsache benutzt haben ,dass

$$Y_i = \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij} \quad \text{mit} \quad N_i \sim \text{Poisson}(\theta_i) \quad \text{und} \quad Y_{ij} \sim F_{V_i}(\cdot).$$

Da die Summe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\theta_i^k}{k!} e^{-\theta_i} F_{V_i}^{*k}(B)$$

positiv ist, können wir die folgende Abschätzung vornehmen:

$$\begin{aligned} F_{U_i}(B) - F_{Y_i}(B) &\leq (1 - \theta_i - e^{-\theta_i}) \delta_0(B) + \theta_i (1 - e^{-\theta_i}) F_{V_i}(B) \\ &\leq \theta_i (1 - e^{-\theta_i}) F_{V_i}(B), \end{aligned}$$

wobei beim letzten Rechenschritt die Ungleichung $1 - x - e^{-x} \leq 0, \forall x \geq 0$ benutzt wurde. Es kann bewiesen werden, dass $f(x) = 1 - x - e^{-x}$ eine monoton fallende Funktion mit $f(0) = 0$ ist. Wenn wir nun noch einmal die Tatsache benutzen, dass $1 - e^{-x} \leq x$ ist, so sehen wir, dass

$$\begin{aligned} F_{U_i}(B) - F_{Y_i}(B) &\leq \theta_i (1 - e^{-\theta_i}) F_{V_i}(B) \\ &\leq \theta_i^2 F_{V_i}(B) \leq \theta_i^2. \end{aligned}$$

Somit haben wir bewiesen, dass

$$d(U_i, Y_i) \leq \theta_i^2.$$

□

Laut Satz 4.5.1 ist der *Approximationsfehler* in (4.5.2) klein, falls $\theta_i \ll \frac{1}{\sqrt{n}}$ sind, d. h.:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i^2 \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Für große Portfolios bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeiten θ_i des Eintretens eines Schadens sehr klein sind. Die Schranke (4.5.2) kann verbessert werden, falls ein homogenes Portfolio vorliegt, d. h. die V_i sind iiv Zufallsvariable ($F_{V_i}(\cdot) = F_V(\cdot), \forall i = 1, \dots, n$), und $\sum_{i=1}^n \theta_i > 1$ gilt:

Satz 4.5.2. *Für ein homogenes Portfolio gilt für die zusammengesetzte Poissoapproximation von X^{ind} :*

$$d(X^{col}, X^{ind}) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \theta_i^2}{\sum_{i=1}^n \theta_i}$$

Beweis. siehe [20], S.135-137. □

In der Praxis wird die Bedingung $\sum_{i=1}^n \theta_i > 1$ für große n (d. h., $\frac{1}{n} < \theta_i \ll \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall i$) oft erfüllt.

Bemerkung 4.5.1. *In der Literatur sind wesentlich bessere Approximationen gegeben, wie z. B. die Kornya-Approximation auf Basis der Fourier-Transformation, siehe [3], [8], [11] und [20] für weitere Einzelheiten. Nichtsdestoweniger hat die Bedeutung von diesen Approximationen mit der immer besser werdenden Computertechnologie abgenommen, da effiziente Berechnungsmethoden wie der Algorithmus von Panjer bessere Ergebnisse erzielt.*

Kapitel 5

Simulation

In Kapitel 4 haben wir gesehen, dass selbst unter sehr eingeschränkten Voraussetzungen die Berechnung der Verteilung des Gesamtschadens nicht immer analytisch möglich ist. In der Praxis werden oft komplizierte Versicherungsmodelle betrachtet, die z.B. mehrere Versicherungssparten, Inflation, dynamische Management-Kontrolle, usw. berücksichtigen. Bei der Analyse solcher Modelle versagen meistens die analytischen Methoden, auf die wir uns bisher beschränkt haben. Als Hilfsmittel kann in solchen Situationen eine Simulationsstudie durchgeführt werden. So erfolgt auf dem Rechner die Art der Zufälle, die das Versicherungsmodell beeinflussen, als Simulation. Auf dieser Simulation werden Schritt für Schritt kompliziertere Objekte aufgebaut, wie etwa die simulierten Schadenhöhen, Schadenanzahl, Inflationsrate, usw. Zum Schluss werden die Ergebnisse mehrerer Simulationen als Geschäftsergebnisse mehrerer Jahre interpretiert und mit den Standardmethoden der deskriptiven Statistik untersucht um z.B. die empirische Verteilungsfunktion des Gesamtschadens zu zeichnen. Somit können unterschiedliche Management- und Prämien-Strategien (wie z.B. neue Versicherungsprodukte, Anpassung der bereits bestehenden Versicherungsprodukte an die neuen gesetzlichen Regelungen, Abschluss einer Rückversicherung für das Portfolio mit der Auswirkung auf die Prämienberechnung, usw.) virtuell getestet werden und deren Ergebnisse verglichen werden.

In diesem Kapitel gehen wir auf die Simulationstechniken ein, die bei der Analyse des Gesamtschadens hilfreich sind. Sie werden oft auch *Monte-Carlo-Methoden* genannt. Dieser Begriff kann auf Analogien zu Glücksspielen zurückgeführt werden.

5.1 Simulation der Schadenhöhen

Zunächst untersuchen wir die Frage, wie ein Risiko X auf dem Rechner simuliert werden kann. Die Basis solcher Simulationen bilden sogenannte *pseudozufällige Zahlen*, die als unabhängige Realisierungen einer auf $(0, 1)$

gleichverteilten Zufallsvariable interpretiert werden.

5.1.1 Pseudozufallszahlen

Es mag überraschend erscheinen, dass auf einem Rechner, der selbst keine Zufälle zulässt, zufällige Zahlen simuliert werden können. In der Tat liefert der Rechner eine periodische Folge von deterministischen Zahlen, wobei die Periode jedoch ausreichend groß ist. Somit wiederholen sich die Werte der *pseudozufälligen* Zahlen selbst bei relativ langen Simulationsstudien nicht. Man sagt, dass eine Folge von pseudozufälligen Zahlen ein gewisses Risiko *simuliert*, wenn sie dieselben statistischen Eigenschaften aufweist wie eine Stichprobe von unabhängigen Realisierungen dieses Risikos. Dies kann mit Hilfe statistischer Tests auf Gleichverteiltheit wie z.B. dem Kolmogorov–Smirnov–Test, χ^2 –Test, usw. nachgewiesen werden.

Wie kann man eine $U(0, 1)$ –Zufallsvariable simulieren? Auf dem Rechner wird diese absolut stetige Verteilung durch eine diskrete Gleichverteilung ersetzt, die diese ausreichend gut approximiert. Wenn wir z.B. pseudozufällige Zahlen bis auf d Dezimalstellen kennen wollen, so kann der Wertebereich dieser diskreten Gleichverteilung als

$$\{k/10^d : k = 1, \dots, 10^d - 1\}$$

gewählt werden. Jeder Wert $k/10^d$ wird mit Wahrscheinlichkeit

$$p_k = \frac{1}{10^d - 1}$$

angenommen.

Es gibt viele Methoden (sog. *Generatoren* pseudozufälliger Zahlen), die solche Verteilungen simulieren können. Sie unterscheiden sich in ihren Eigenschaften und in ihrer Komplexität. Hier werden wir zwei einfache Generatoren kennen lernen.

1. Seien $a, n \in \mathbb{N}$, wobei n und $(n - 1)/2$ Primzahlen sind. Es gelte zusätzlich $a^{(n-1)/2} \equiv -1 \pmod{n}$. Definiere die Folge

$$u_k = au_{k-1} \pmod{n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.1.1)$$

wobei die Anfangszahl $u_0 \in \{1, \dots, n - 1\}$ der *Keim* der Folge (engl. *seed*) heißt. Somit werden $x_k = u_k/n$ als unabhängige Realisierungen der Zufallsvariable $X \sim U(0, 1)$ interpretiert. Man kann beweisen, dass die Folge $\{u_k\}$ für beliebiges u_0 die Periode $n - 1$ hat. Somit kann x_k höchstens $n - 1$ Werte annehmen. Beispielsweise erfüllen $a = 1000$ und $n = 2001179$ die obigen Voraussetzungen.

Wie genau ist der Generator (5.1.1)? Sei U_0 eine auf $\{1, \dots, n - 1\}$ gleichverteilte Zufallsvariable. Somit erzeugt die Relation (5.1.1) die

Folge $U_k \equiv aU_{k-1} \pmod{n}$ von Zufallsvariablen, auf deren Basis eine neue Folge $X_k = U_k/n$ konstruiert wird, die mit $X \sim U(0,1)$ verglichen werden soll. Man kann zeigen, dass alle X_k identisch verteilt sind mit Mittelwert

$$E X_k = E X = 1/2$$

und Varianz

$$Var X_k = \frac{n-2}{12n} \rightarrow \frac{1}{12} = Var X,$$

falls $n \rightarrow \infty$. Die Zufallsvariablen X_k sind offensichtlich nicht unabhängig voneinander. Man kann zeigen, dass der Korrelationskoeffizient

$$Corr(X_k, X_{k+1}) = \frac{Cov(X_k, X_{k+1})}{\sqrt{Var X_k Var X_{k+1}}} \approx 1/a$$

und somit nicht Null ist.

2. Seien $a = 10^m + 1$ für $m \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ nicht teilbar durch 2 oder 5, und sei $n = 10^d$ für $d \in \mathbb{N}$. Definiere die Folge

$$u_k = au_{k-1} + b \pmod{n}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (5.1.2)$$

für eine Keimzahl u_0 . Die Periode der Folge (5.1.2) ist $n = 10^d$. Setze $x_k = u_k/n$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Um bei unterschiedlichen Simulationsvorgängen verschiedene Folgen (5.1.1)–(5.1.2) zu bekommen, soll deren Keimzahl u_0 so oft wie möglich geändert werden. Eine Ausnahme aus dieser Regel bilden Berechnungen, bei denen dieselbe Folge von Pseudozufallszahlen verwendet werden soll.

Im Folgenden nehmen wir an, dass wir ausreichend gute unabhängige Realisierungen des Risikos $U \sim U(0,1)$ generieren können. Um andere Risiken auf Basis einer Gleichverteilung simulieren zu können, gibt es eine Reihe von Methoden wie z.B. die *Umkehrmethode* oder die *Akzeptanz- und Verwerfungsmethode*.

5.1.2 Umkehrmethode

Sei X ein Risiko mit Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X \leq x)$ und Quantilfunktion $Q_X(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq y\}$. Um X mit Hilfe der Umkehrmethode simulieren zu können, sind zwei Schritte notwendig:

- Simuliere $U \sim U(0,1)$ (vgl. Abschnitt 5.1.1)
- Liefere $\tilde{X} = Q_X(U)$

Falls F_X eine eindeutige Funktion ist, so gilt $Q_X = F_X^{-1}$ und daher $\tilde{X} = F_X^{-1}(U)$. Deshalb wird diese Methode auch *Umkehrmethode* genannt. Es ist sofort klar, dass $\tilde{X} \stackrel{d}{=} X$, da

$$F_{\tilde{X}}(x) = P(\tilde{X} \leq x) = P(Q_X(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 5.1.1.

- Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$: Falls die Schadenhöhe $X \sim Exp(\lambda)$, so gilt $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ und $Q_X(y) = F_X^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - y)$. Somit

$$\tilde{X} = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U) \stackrel{d}{=} -\frac{1}{\lambda} \log U,$$

weil $1 - U \stackrel{d}{=} U \sim U(0, 1)$.

- Bernoulli-Verteilung $Ber(\theta)$: Im individuellen Modell ist die Schadenhöhe X einer Police das Produkt YV , wobei

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \theta, \\ 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - \theta \end{cases}$$

eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Parameter θ ist und $V > 0$ f.s. die tatsächliche Schadenhöhe darstellt. Parameter θ wird als Schadenwahrscheinlichkeit interpretiert. In der Lebensversicherung ist z.B. $V = v_0$ eine deterministische Todesfallsumme. Um $Y \sim Ber(\theta)$ zu simulieren, kann die Umkehrmethode verwendet werden. Es gilt

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ 1 - \theta, & x \in [0, 1), \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

und somit $Q_Y(y) = \mathbf{1}(y \geq 1 - \theta)$. Daher simuliere

$$\tilde{X} = \mathbf{1}(U \geq 1 - \theta) \stackrel{d}{=} \mathbf{1}(U > 1 - \theta) \stackrel{d}{=} \mathbf{1}(U \leq \theta) \stackrel{d}{=} \mathbf{1}(U < \theta)$$

für $U \sim U(0, 1)$.

Übungsaufgabe 5.1.1 (Pareto-Verteilung).

Prüfen Sie, dass für $X \sim Par(\alpha, c)$, $\alpha, c > 0$ gilt $X \stackrel{d}{=} cU^{-1/\alpha}$, wobei $U \sim U(0, 1)$.

Um die Umkehrmethode anwenden zu können, braucht man die analytische Form der Quantilfunktion Q_X . Sie kann aber oft (wie z.B. im Falle der Normalverteilung) nicht explizit angegeben werden. Daher sind weitere Methoden notwendig, um solche Fälle zu behandeln.

5.1.3 Akzeptanz- und Verwerfungsmethode

Sei X eine Zufallsvariable, die absolut stetig verteilt ist mit Dichte f_X . Betrachten wir die Klasse der auf \mathbb{R} integrierbaren Funktionen $f \geq 0$, die proportional zu f_X sind: $f(x) = cf_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ für ein $c > 0$. Somit gilt

$$f_X(x) = \frac{f(x)}{\int_{\mathbb{R}} f(y) dy}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.1.3)$$

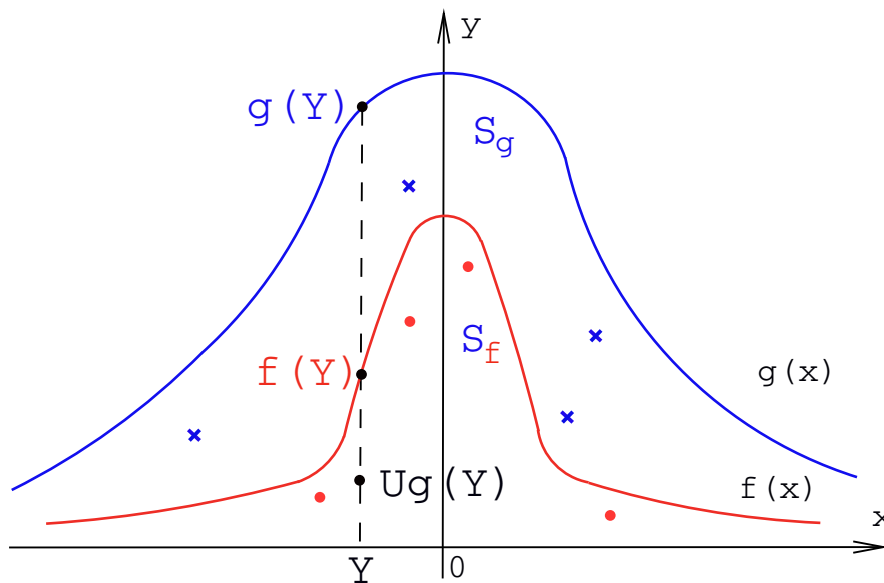


Abbildung 5.1.1: Akzeptanz- und Verwerfungsmethode

Nun wählen wir eine konkrete Funktion f aus dieser Klasse aus.

Nehmen wir an, dass eine auf \mathbb{R} integrierbare Funktion $g \geq 0$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

- $g(x) \geq f(x)$ für alle x
- Wir können die Zufallsvariable Y , die absolut stetig verteilt ist mit Dichte

$$g_Y(x) = \frac{g(x)}{\int_{\mathbb{R}} g(y) dy}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.1.4)$$

simulieren.

Die *Akzeptanz- und Verwerfungsmethode* besteht aus den folgenden Schritten:

1. Simuliere die Zufallsvariablen Y und $U \sim U(0, 1)$ unabhängig voneinander.
2. Falls $Ug(Y) \leq f(Y)$, liefere Y .
3. Andernfalls, gehe zu 1.

Sie wird in Abbildung 5.1.1 illustriert. Die Behauptung ist, dass die Zufallsvariable

$$\tilde{X} \stackrel{d}{=} Y \mid \{Ug(Y) \leq f(Y)\} \quad (5.1.5)$$

dieselbe Verteilung wie X hat. Das können wir wie folgt beweisen.

Zunächst führen wir die Gleichverteilung $U(B)$ auf einer beliebigen beschränkten, messbaren Untermenge B von \mathbb{R}^d mit positivem Volumen ein. Die folgende Definition verallgemeinert die Definition der Gleichverteilung $U(0, 1)$.

Definition 5.1.1. Sei B eine beschränkte Borelmenge in \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, mit positivem Volumen $|B| > 0$. Der d -dimensionale Zufallsvektor $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ ist gleichverteilt auf B (man schreibt $Z \sim U(B)$), falls er absolut stetig verteilt ist mit der Dichte $f_Z(x) = \mathbf{1}(x \in B)/|B|$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Dies bedeutet, dass

$$P(Z \in A) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

für eine beliebige Borelmenge A aus \mathbb{R}^d .

Lemma 5.1.1. Sei $Z \sim U(B)$. Falls $B_0 \subset B$, $|B_0| > 0$ eine Borelmenge ist, so ist die bedingte Verteilung des Vektors $Z \mid \{Z \in B_0\}$ eine Gleichverteilung $U(B_0)$ auf B_0 .

Beweis. Für eine beliebige Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$P(Z \in A \mid Z \in B_0) = \frac{P(Z \in A \cap B_0)}{P(Z \in B_0)} = \frac{|A \cap B_0 \cap B|/|B|}{|B_0 \cap B|/|B|} = \frac{|A \cap B_0|}{|B_0|}.$$

□

Für eine beliebige nichtnegative Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ bezeichnen wir ihren *Untergraph* durch $S_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq g(x)\}$.

Satz 5.1.1. Sei g eine nichtnegative, auf \mathbb{R} integrierbare Funktion. Dann gilt folgendes:

1. Falls $(X_1, X_2) \sim U(S_g)$, dann ist X_1 absolut stetig verteilt mit der Dichte

$$g_{X_1}(x) = \frac{g(x)}{\int_{\mathbb{R}} g(y) dy}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.1.6)$$

2. Falls X_1 absolut stetig verteilt ist mit Dichte (5.1.6), dann gilt

$$(X_1, U g(X_1)) \sim U(S_g).$$

Beweis. Für eine beliebige Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} P(X_1 \in B) &= P((X_1, X_2) \in B \times \mathbb{R}) = \frac{|(B \times \mathbb{R}) \cap S_g|}{|S_g|} \\ &= \iint_{(B \times \mathbb{R}) \cap S_g} \frac{1}{|S_g|} dy dx = \frac{\int_B \int_0^{g(x)} dy dx}{\int_{\mathbb{R}} g(x) dx} = \frac{\int_B g(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} g(x) dx}. \end{aligned}$$

Somit ist der erste Punkt der Aussage bewiesen. Weiterhin gilt für eine beliebige Borelmenge B aus \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} P((X_1, Ug(X_1)) \in B) &= E\left(E \mathbf{1}((X_1, Ug(X_1)) \in B) | X_1\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} E \mathbf{1}((x, Ug(x)) \in B \cap S_g) g_{X_1}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(Ug(x) \in B \cap S_g \cap L_x) g_{X_1}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} P\left(U \in \frac{1}{g(x)}(B \cap S_g \cap L_x)\right) g_{X_1}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{g(x)}(B \cap S_g \cap L_x) \right| \frac{g(x)}{|S_g|} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|B \cap S_g \cap L_x|}{|S_g|} dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{|B \cap S_g|}{|S_g|}, \end{aligned}$$

wobei L_x die Achse $\{(x, y) : y \in \mathbb{R}\}$ bezeichnet; vgl. Abbildung 5.1.2. Somit gilt $(X_1, Ug(X_1)) \sim U(S_g)$. \square

Warum funktioniert nun die Akzeptanz- und Verwerfungsmethode? Sei $g(x) \geq f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Die Zufallsvariable Y sei absolut stetig verteilt mit Dichte (5.1.4) und $U \sim U(0, 1)$. Nach Satz 5.1.1, Punkt 2 gilt $(Y, Ug(Y)) \sim U(S_g)$. Falls aber $(Y, Ug(Y)) \in S_f \subset S_g$, so gilt $(Y, Ug(Y)) \sim U(S_f)$; vgl. Lemma 5.1.1. Somit hat nach Satz 5.1.1, Punkt 1 die Zufallsvariable Y die Dichte (5.1.3), und die Relation (5.1.5) ist bewiesen. Der geometrische Sinn der obigen Vorgehensweise ist folgender: Falls ein zufälliger Punkt mit Koordinaten, die gleichverteilt auf S_g sind, unter den Graph von f fällt, wird seine x -Koordinate als Ergebnis des Algorithmus ausgegeben. Alle Punkte, die oberhalb des Graphes von f fallen, werden verworfen; vgl. Abbildung 5.1.1.

In jedem Schritt der Akzeptanz- und Verwerfungsmethode wird der Vorschlag Y akzeptiert, falls $Ug(Y) \leq f(Y)$. Sonst wird ein neuer unabhängiger

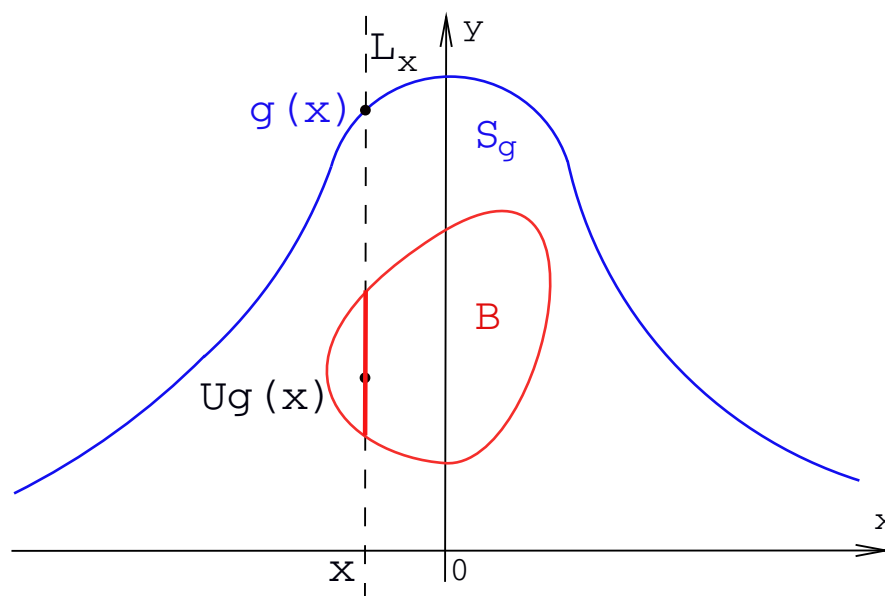


Abbildung 5.1.2: Illustration zum Beweis des Satzes 5.1.1

Wert von Y generiert. Sei M die Anzahl solcher Schritte bis zum Erfolg (Akzeptanz von Y). Die Größe $M - 1$ ist offensichtlich geometrisch verteilt mit Parameter $p = P(Ug(Y) > f(Y))$. Somit ist die Erfolgswahrscheinlichkeit gleich

$$\begin{aligned} 1 - p &= P(Ug(Y) \leq f(Y)) = \int_{\mathbb{R}} P\left(U \leq \frac{f(y)}{g(y)}\right) g_Y(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y) g(y)}{g(y) |S_g|} dy = \frac{|S_f|}{|S_g|}. \end{aligned}$$

Folglich ist die mittlere Anzahl der notwendigen Simulationsschritte gleich

$$EM = E(M - 1) + 1 = \frac{p}{1 - p} + 1 = \frac{1}{1 - p} = \frac{|S_g|}{|S_f|} = \frac{\int_{\mathbb{R}} g(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x) dx} > 1. \quad (5.1.7)$$

Das heißt, je besser die obere Schranke g für f ist, desto schneller ist im Mittel die Simulation. Die Varianz von M ist gleich

$$\begin{aligned} \text{Var } M &= \text{Var}(M - 1) = \frac{p}{(1 - p)^2} = \frac{1 - (1 - p)}{(1 - p)^2} = \frac{1}{(1 - p)^2} - \frac{1}{1 - p} \\ &= \frac{1}{1 - p} \left(\frac{1}{1 - p} - 1 \right) = \frac{|S_g|}{|S_f|} \left(\frac{|S_g|}{|S_f|} - 1 \right). \end{aligned}$$

Beispiel 5.1.2 (Normalverteilung). Die Normalverteilung kann nicht ohne weiteres als Modell für Risiken verwendet werden, weil sie mit positiven Wahrscheinlichkeiten negative Werte zulässt. Sie stellt aber eine wichtige Grundlage für die Erzeugung weiterer Verteilungen von Risiken dar. Als Beispiel sei die Lognormalverteilung genannt, für die gilt $X \sim LN(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow X \stackrel{d}{=} e^{\mu + \sigma Y}$, $Y \sim N(0, 1)$. Ein weiteres Beispiel liefert die abgeschnittene Normalverteilung (siehe Beispiel 5.1.4).

Wie bereits erwähnt wurde, gibt es keinen geschlossenen Ausdruck für die Quantil-Funktion der Standardnormalverteilung. Allerdings kann sie z.B. mit Hilfe der Akzeptanz- und Verwerfungsmethode simuliert werden. Sei $X \sim N(0, 1)$ mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $f_X(x) \leq g(x) = \sqrt{\frac{e}{2\pi}} e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, weil aus

$$x^2 - 2|x| + 1 = (x \pm 1)^2 \geq 0$$

die Ungleichung $e^{-x^2/2} \leq e^{1/2 - |x|}$ folgt. Sei Y absolut stetig verteilt mit einer Dichte, die proportional zu $g(x)$ ist. Dies bedeutet, dass $|Y| \sim \text{Exp}(1)$ und daher $|Y| \stackrel{d}{=} -\log V$ für ein $V \sim U(0, 1)$; vgl. Beispiel 5.1.1. Für ein $U \sim U(0, 1)$ sieht das Akzeptanz-Kriterium $Ug(Y) \leq f_X(Y)$ folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} U \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{1/2 - |Y|} &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|Y|^2/2} \\ U e^{1/2 - (-\log V)} &\leq e^{-(\log^2 V)/2} \\ \log U + \log V + \frac{1}{2} &\leq -\frac{1}{2} \log^2 V \\ 2 \log U &\leq -(\log V + 1)^2 \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Falls die Bedingung (5.1.8) erfüllt ist, wird der Wert von $|\tilde{X}| = -\log V$ akzeptiert. Da die Dichte der Verteilung von $|\tilde{X}|$ symmetrisch zum Ursprung ist, kann das Vorzeichen von \tilde{X} unabhängig mit Wahrscheinlichkeit 0.5 gewählt werden. Mit anderen Worten, es gilt $\tilde{X} = (2W - 1) \log V$, wobei W eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Parameter 0.5 ist; vgl. Beispiel 5.1.1. Somit nimmt die Zufallsvariable $2W - 1$ Werte ± 1 mit Wahrscheinlichkeit 0.5 an.

Zusammengefasst, sieht der Algorithmus zur Simulation von $X \sim N(0, 1)$ wie folgt aus.

1. Simuliere $U, V \sim U(0, 1)$ unabhängig voneinander.
2. Falls $2 \log U \leq -(\log V + 1)^2$ gilt, simuliere $W \sim \text{Ber}(0.5)$ und liefere $\tilde{X} = (2W - 1) \log V$.

3. Sonst, gehe zu Schritt 1.

Dieser Algorithmus ist ziemlich schnell, denn die mittlere Anzahl der Simulationsschritte ist nach (5.1.7) gleich

$$EM = \frac{|S_g|}{|S_{f_X}|} = \frac{\sqrt{\frac{e}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx}{1} = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \approx 1.315$$

mit der Varianz $Var M \approx 1.315(1.315 - 1) = 0.414225$.

Es gibt auch eine andere Methode, um die Standardnormalverteilung zu simulieren. Sie basiert auf folgendem Lemma.

Lemma 5.1.2.

1. Seien (R, Θ) die Polarkoordinaten des Vektors (X_1, X_2) , wobei X_1 und X_2 zwei $N(0, 1)$ -verteilte, unabhängige Zufallsvariablen sind. Dann sind R und Θ unabhängig, und es gilt $R^2 \sim Exp(1/2)$, $\Theta \sim U[0, 2\pi)$.

2. Falls $R^2 \sim Exp(1/2)$ und $\Theta \sim U[0, 2\pi)$ unabhängige Zufallsvariablen sind, dann sind die Zufallsvariablen $X_1 = R \cos \Theta$ und $X_2 = R \sin \Theta$ standardnormalverteilt und unabhängig.

Beweis. 1. Seien $(r, \varphi) = (r(x, y), \varphi(x, y))$ die Polarkoordinaten des Vektors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Für beliebige $z \geq 0$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\begin{aligned} P(R^2 \leq z, \Theta \leq \alpha) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq z \\ \varphi(x,y) \leq \alpha}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^{\sqrt{z}} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\varphi \stackrel{(t=r^2)}{=} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^z \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

Somit ist die Dichte von (R^2, Θ) ein Produkt von zwei Komponenten, die die Dichten der $Exp(1/2)$ - und $U[0, 2\pi)$ -Verteilungen sind.

2. Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
 P(X_1 \leq x, X_2 \leq y) &= P(\sqrt{R^2} \cos \Theta \leq x, \sqrt{R^2} \sin \Theta \leq y) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathbf{1}(\sqrt{t} \cos \varphi \leq x, \sqrt{t} \sin \varphi \leq y) \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} dt d\varphi \\
 &\stackrel{(t=r^2)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathbf{1}(r \cos \varphi \leq x, r \sin \varphi \leq y) r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\varphi \\
 &\stackrel{\left(\begin{smallmatrix} x_1=r \cos \varphi \\ x_2=r \sin \varphi \end{smallmatrix}\right)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}(x_1 \leq x, x_2 \leq y) e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} dx_1 dx_2 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x_1^2}{2}} dx_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{x_2^2}{2}} dx_2.
 \end{aligned}$$

□

Nach Lemma 5.1.2, Punkt 2 kann $X \sim N(0, 1)$ als $R \cos \Theta$ oder $R \sin \Theta$ simuliert werden, wobei $R \stackrel{d}{=} \sqrt{-2 \log U}$ und $\Theta \stackrel{d}{=} 2\pi V$ für $U, V \sim U(0, 1)$. Dadurch erhalten wir einen direkten (nicht-iterativen) Algorithmus zur Simulation von $N(0, 1)$.

Beispiel 5.1.3 (Normalverteilung: nicht-iterativer Algorithmus).

1. Simuliere unabhängige Zufallsvariablen $U, V \sim U(0, 1)$.
2. Liefere $\tilde{X} \stackrel{d}{=} X$, wobei

$$\tilde{X} = \sqrt{-2 \log U} \cos(2\pi V) \text{ oder } \tilde{X} = \sqrt{-2 \log U} \sin(2\pi V).$$

Die Zufallsvariable $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ kann als $\mu + \sigma \tilde{X}$ für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ simuliert werden.

Beispiel 5.1.4 (Abgeschnittene Normalverteilung). Sei $Z \sim N(0, 1)$. Die abgeschnittene Normalverteilung kann als Verteilung der Zufallsvariable $X = Z \mid \{Z \geq a\}$, $a \in \mathbb{R}$, eingeführt werden. Die Dichte der abgeschnittenen Normalverteilung ist gleich

$$f_Z(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{1}(x \geq a)}{\int_a^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy}.$$

In der Risikothorie interessieren wir uns für den Fall $a \geq 0$, weil dadurch Risiken modelliert werden können. Für $a \geq 1$ gilt die Ungleichung $e^{-\frac{x^2}{2}} \leq x e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \geq 1$ und kann benutzt werden, um die Akzeptanz- und Verwerfungsmethode zur Simulation von X zu entwerfen. Seien $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{1}(x \geq a)$ und $g(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{1}(x \geq 0)$. Es gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle x . Das Risiko Y mit Dichte

$$g_Y(x) = \frac{g(x)}{|S_g|} = x e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \geq 0$$

hat die Verteilungsfunktion $F_Y(x) = (1 - e^{-x^2/2}) \mathbf{1}(x \geq 0)$ und es gilt somit $Y^2 \sim \text{Exp}(1/2)$. Nach Beispiel 5.1.1 gilt $Y \stackrel{d}{=} \sqrt{-2 \log V}$ für $V \sim U(0, 1)$. Die Akzeptanz-Regel $Ug(Y) \leq f(Y)$, $U \sim U(0, 1)$ ergibt

$$\begin{aligned} U \sqrt{-2 \log V} &\leq \mathbf{1}(\sqrt{-2 \log V} \geq a), \\ U^2 &\leq \frac{\mathbf{1}(V \leq e^{-2a^2})}{-2 \log V}. \end{aligned}$$

Die mittlere Anzahl der notwendigen Simulationsschritte ist gleich

$$EM = \frac{\int_0^\infty y e^{-\frac{y^2}{2}} dy}{\int_a^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy} = \frac{1}{\int_a^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy}.$$

Übungsaufgabe 5.1.2 (Gamma-Verteilung).

Wie lautet der Akzeptanz- und Verwerfungsalgorithmus zur Simulation von $X \sim \Gamma(a, 1)$, $a > 0$, $a \neq 1$? Verwenden Sie dabei die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x^{a-1} \mathbf{1}(0 \leq x \leq 1) + e^{-x} \mathbf{1}(x \geq 1), & a < 1, \\ \frac{x^{\lambda-1}}{(x^\lambda + a^\lambda)^2} \mathbf{1}(x \geq 0), & a > 1, \end{cases}$$

mit $\lambda = \sqrt{2a-1}$. Geben Sie die mittlere Anzahl und die Varianz der notwendigen Simulationsschritte an.

Bemerkung 5.1.1 (Diskrete Verteilungen).

Die Akzeptanz- und Verwerfungsmethode kann auch für die Simulation von diskret verteilten Risiken verwendet werden. Sei z.B. X ein Risiko mit Verteilung $\{p_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, wobei $p_n = P(X = x_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ für gewisse Werte x_0, x_1, \dots . Für eine stetig verteilte Zufallsvariable Z mit der stückweise konstanten Dichte

$$g_Z(x) = p_{\lfloor x \rfloor}, \quad x \geq 0$$

gilt offensichtlich die Gleichung $X \stackrel{d}{=} x_{\lfloor Z \rfloor}$. Somit kann Z mit Hilfe der Akzeptanz- und Verwerfungsmethode simuliert werden. Danach setzt man $\tilde{X} = x_{\lfloor Z \rfloor}$.

5.2 Simulation der Schadenanzahl

In diesem Abschnitt betrachten wir Simulationsalgorithmen für die Anzahl N der Schäden eines Portfolios. Da N diskret verteilt ist, konzentrieren wir uns zunächst auf die Simulation von diskreten Verteilungen.

Sei X eine diskret verteilte Zufallsvariable, die Werte $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ mit Wahrscheinlichkeiten $p_n = P(X = x_n)$ annimmt. Es gilt $\sum_n p_n = 1$. Sei $P_n = p_0 + \dots + p_n$ für alle n . Die Umkehrmethode liefert den folgenden Ansatz zur Simulation von X .

1. Simuliere $U \sim U(0, 1)$
2. Liefere

$$\tilde{X} = \begin{cases} x_0, & U < P_0, \\ x_1, & P_0 \leq U < P_1, \\ \vdots, & \vdots \\ x_n, & P_{n-1} \leq U < P_n, \\ \vdots, & \vdots \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Es gilt offensichtlich $\tilde{X} \stackrel{d}{=} X$. Diese Methode kann effizient nur für eine relativ kleine Anzahl n von möglichen Werten x_0, \dots, x_n angewandt werden, weil für große n zu viele Fälle unterschieden werden müssen. Als Ausweg aus dieser Situation können *Markov Chain Monte-Carlo-Methoden* genannt werden, die wegen ihrer Komplexität nicht in diesem Vorlesungskurs behandelt werden.

Betrachten wir folgende *ad hoc* Algorithmen für die Simulation der Schadenanzahl N , die teilweise auf speziellen Eigenschaften der Verteilung von N beruhen.

- Poisson-Verteilung: Sei $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Falls N als Schadenanzahl bis zur Zeit $t = \lambda$ eines homogenen Poissonprozesses $\{N(t)\}$ mit Intensität 1 interpretiert wird, so gilt

$$N = \sup\{n \in \mathbb{Z}_+ : \sum_{i=1}^n T_i \leq \lambda\} = \inf\{n \in \mathbb{Z}_+ : \sum_{i=1}^{n+1} T_i > \lambda\} \quad (5.2.2)$$

für uiv Zwischenankunftszeiten $T_i \sim \text{Exp}(1)$. Die Umkehrmethode ergibt $T_i \stackrel{d}{=} -\log U_i$ für $U_i \sim U(0, 1)$, $i \in \mathbb{N}$. Die zweite Bedingung in (5.2.2) kann somit als $-\sum_{i=1}^{n+1} \log U_i > \lambda$ oder $\prod_{i=1}^{n+1} U_i < e^{-\lambda}$ umgeschrieben werden. Fassen wir diese Überlegungen in einem Algorithmus zusammen:

1. Setze $n = 0$, $T = 1$.

2. Simuliere $U \sim U(0, 1)$ und bilde $T = UT$.
3. Falls $T \geq e^{-\lambda}$, setze $n = n + 1$ und gehe zu Schritt 2.
4. Andernfalls, liefere n als Realisierung von N .

Da $EN = \lambda$, ist die mittlere Anzahl M der Simulationsschritte gleich $\lambda + 1$. Das heißt, dass dieser Algorithmus für große λ nicht mehr effizient ist.

Für große λ kann man die Methode (5.2.1) anwenden, wobei die Wahrscheinlichkeiten $p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ durch die Rekursionsformel von Panjer

$$p_n = \frac{\lambda}{n} p_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

schnell berechnet werden können, vgl. Satz 3.5.1. Um die Suche in (5.2.1) für große λ zu optimieren, wird zunächst U mit $P_{\lfloor \lambda \rfloor}$ verglichen, weil $EN = \lambda$ gilt. Falls $U < P_{\lfloor \lambda \rfloor}$ wird weiterhin geprüft, ob $U < P_{\lfloor \lambda \rfloor - 1}$ gilt, usw. Man setzt dann $N = \min\{k : U < P_k\}$. Analog geht man im Falle $U \geq P_{\lfloor \lambda \rfloor}$ vor. Die mittlere Anzahl der Vergleiche ist dabei ungefähr gleich

$$1 + E|N - \lambda| = 1 + \sqrt{\lambda} E \frac{|N - \lambda|}{\sqrt{\lambda}} \stackrel{(5.2.3)}{\approx} 1 + 0.798\sqrt{\lambda}.$$

Man kann auch für $\lambda \geq 100$ die folgende Approximation benutzen:

$$N \approx \lfloor \lambda + 0.5 + \sqrt{\lambda} X \rfloor, \quad X \sim N(0, 1).$$

Die Grundlage dafür bildet der folgende zentrale Grenzwertsatz. Für $\lambda = m$ gilt nämlich $N \stackrel{d}{=} N_1 + \dots + N_m$, wobei $N_i \sim \text{Poisson}(1)$ uiv Zufallsvariablen sind. Für $\lambda = m \rightarrow \infty$ gilt somit

$$\frac{N - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} X \sim N(0, 1) \tag{5.2.3}$$

und daher $N \approx \lambda + \sqrt{\lambda} X$.

Es gibt auch genauere approximative Simulationmethoden wie etwa die *Anscombe-* und *Peizer und Pratt-Approximationen*; vgl. [5], S. 35–37, 142.

- Gemischte Poisson-Verteilung: Bei der Simulation einer Zufallsvariablen, die eine gemischte Poisson-Verteilung besitzt (vgl. Abschnitt 3.3), wird zunächst eine Realisierung λ der Mischungsvariable Λ erzeugt. Danach kann eine Realisierung von der $\text{Poisson}(\lambda)$ -Verteilung wie oben generiert werden.

- Binomialverteilung: Um eine Zufallsvariable $N \sim \text{Bin}(n, p)$ zu simulieren, kann die Darstellung $N \stackrel{d}{=} N_1 + \dots + N_n$ benutzt werden, wobei $N_i, i = 1, \dots, n$ unabhängige $\text{Ber}(p)$ -verteilte Zufallsvariablen sind. Aus Beispiel 5.1.1 folgt, dass $N \stackrel{d}{=} \mathbf{1}(U_1 \leq p) + \dots + \mathbf{1}(U_n \leq p)$, wobei U_1, \dots, U_n unabhängige $U(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen sind. Allerdings ist dieser Ansatz für große n offensichtlich ineffizient.

Für große n kann die Methode (5.2.1) benutzt werden, wobei die Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ durch die Panjer-Rekursion berechnet werden (vgl. Satz 3.5.1). Für kleine $EN = np$ werden die Vergleiche in (5.2.1) in natürlicher Reihenfolge durchgeführt. Für große np ist es effizienter mit $P_{[np]}$ anzufangen.

Alternativ kann man von der Poisson-Approximation Gebrauch machen (vgl. [13], S. 24), und zwar gilt $N \approx \tilde{N} \sim \text{Poisson}(np)$, falls n groß und $p \ll 0.25$ klein ist. Dies ist aber wegen des Approximationsfehlers nur bedingt zu empfehlen.

- Negative Binomialverteilung: Für die Simulation von $N \sim \text{NB}(\alpha, p)$ wird die Methode (5.2.1) in Kombination mit der Panjer-Rekursion (3.5.1) für die Berechnung von p_k benutzt.
- Geometrische Verteilung: Man kann zeigen, dass für $N \sim \text{Geo}(p)$ die Gleichung $N \stackrel{d}{=} \lfloor \log_p U \rfloor$, $U \sim U(0, 1)$ gilt. In der Tat, kann man schreiben

$$\begin{aligned} P(\lfloor \log_p U \rfloor = n) &= P(n \leq \log_p U < n+1) \stackrel{(0 < p < 1)}{=} P(p^{n+1} < U \leq p^n) \\ &= p^n - p^{n+1} = (1-p)p^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

5.3 Simulation des Gesamtschadens

Der Gesamtschaden $X = \sum_{i=1}^N U_i$ im kollektiven Modell kann folgendermaßen simuliert werden:

- Erzeuge eine Realisierung n der Schadenanzahl N
- Erzeuge n unabhängige Realisierungen u_1, \dots, u_n des Risikos $U \stackrel{d}{=} U_i$, das die Schadenhöhe darstellt
- Liefere $u_1 + \dots + u_n$ als Realisierung von X

Offensichtlich ist dieser Algorithmus für große Versicherungsbestände (d.h., für große EN) sehr zeitintensiv.

Für spezielle zusammengesetzte Verteilungen wie z.B. die zusammengesetzte Poisson-Verteilung steht auch eine Reihe von Normalapproximationen zur Verfügung; vgl. die *Approximation von Wilson-Hilferty* in [5], SS. 143–146. Mit deren Hilfe wird die Verteilungsfunktion F_X von X durch eine Transformation der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung approximiert. Auf deren Basis kann X als eine spezielle Transformation von $Y \sim N(0, 1)$ simuliert werden, falls solche Charakteristiken wie Erwartungswert, Varianz und Schiefe von X bekannt sind. Diese sehr effizienten Methoden generieren allerdings Ergebnisse, die mit Approximationsfehlern behaftet sind.

Falls mehrere unabhängig simulierte Realisierungen x_1, \dots, x_m des Gesamtschadens X vorliegen, die als Geschäftsergebnisse von m Jahren interpretiert werden, so kann aus dieser Stichprobe die empirische Verteilungsfunktion von X berechnet werden. Dies ist insbesondere dann interessant, falls F_X nicht explizit bekannt ist. Für große m kann die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_X(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}(x_i \leq x)$ als gute Annäherung an F_X gesehen werden. Selbstverständlich können auch weitere Methoden der deskriptiven Statistik auf die Stichprobe (x_1, \dots, x_m) angewandt werden, um Charakteristiken des Gesamtschadens zu schätzen, die bei der Prämienkalkulation, der Rückversicherung und der Evaluation von Maßnahmen im Rahmen des Risikomanagements eine zentrale Rolle spielen. Beispiele solcher Charakteristiken sind der Erwartungswert, die Varianz oder die Schiefe.

Kapitel 6

Prämienkalkulation

6.1 Einleitung

Ein Mittel zur Gewährleistung der Solvenz eines Versicherers sind die Prämieinnahmen. Sie dienen der Kostendeckung, wobei unter den Kosten der Schaden, der Gewinn und die Verwaltungskosten im breiteren Sinne gemeint sind. Deshalb setzt sich die sog. *Brutto-* oder *Tarifprämie*, die von den Versicherungsnehmern entrichtet wird, aus folgenden Bestandteilen zusammen:

$$\begin{aligned} \text{Bruttoprämie} &= \text{Nettorisikoprämie} + \text{Sicherheitszuschlag} \\ &+ \text{Verwaltungskosten} + \text{Inkassokosten} \\ &+ \text{Gewinnzuschlag.} \end{aligned}$$

Hierbei ist die *Nettorisikoprämie* gleich dem mittleren Gesamtschaden des Portfolios. Der *Sicherheitszuschlag* fängt unerwünschte Schwankungen des tatsächlichen Schadens ab, wenn dieser maßgebend vom Mittel abweicht. Die *Verwaltungskosten* erfassen Abschluss- und Schadenregulierungskosten. *Inkassokosten* stellen sich aus Bank-, Mahn- sowie Portokosten zusammen. Der *Gewinnzuschlag* soll der Erwirtschaftung des gewünschten Gewinns dienen.

Wir befassen uns in diesem Kapitel ausschließlich mit der Bestimmung der ersten beiden Komponenten, da nur diese mathematisch anspruchsvoll sind. In den Bezeichnungen von Abschnitt 1.3 ist $\pi(t)$ die Nettoprämie zzgl. Sicherheitszuschlag (bis zur Zeit t). Der gesamte *Risikoprozess* $\{R(t) : t \geq 0\}$ ist somit gleich

$$R(t) = u + \pi(t) - X(t),$$

wobei u die *Anfangsreserve* und $X(t)$ der *Gesamtschaden* bis zum Zeitpunkt t ist. $R(t)$ wird manchmal auch *Risikoreserve* genannt. Die Prämie $\pi(t)$ soll ausreichend hoch sein, um den technischen Ruin des Portfolios zu vermeiden, und gleichzeitig nicht zu hoch, um auf dem Markt von ähnlichen Versicherungsprodukten wettbewerbsfähig zu bleiben.

Somit stellen sich folgende Fragen:

1. Was ist ein angemessener Preis für die Risikoübernahme durch den Versicherer?
2. Welche Faktoren sind für die Prämienkalkulation entscheidend?
3. Welche Eigenschaften soll eine „gute“ Prämienfunktion $\pi(t)$ haben?

Jetzt sollen diese Fragen eine deutliche, mathematische Formulierung bekommen.

Sei $X(t)$ der Gesamtschaden eines Portfolios mit Verteilungsfunktion $F_{X(t)}$. Wie auch in Kapiteln 4–5, werden wir o. B. d. A. den Zeitparameter t bei den Bezeichnungen weglassen, indem wir die Zeitspanne von z. B. einem Geschäftsjahr betrachten. So schreiben wir X statt $X(t)$ und F_X statt $F_{X(t)}$.

Definition 6.1.1. *Unter einem Prämienkalkulationsprinzip versteht man eine Abbildung $\pi : F_X \mapsto \pi(F_X) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, die einer Verteilungsfunktion des Gesamtschadens eine Prämie zuordnet.*

Somit ist π ein Funktional auf der Menge aller Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen. Später werden wir auch die Bezeichnung $\pi(X)$ für $\pi(F_X)$ benutzen.

In der Praxis ist offensichtlich jede Prämie endlich. Für theoretische Zwecke ist es aber ratsam, auch unendliche Prämien zuzulassen. Somit heißt das Risiko X *versicherbar* unter dem Prämienkalkulationsprinzip π , falls $\pi(X) < \infty$ gilt.

Die Differenz $\pi(X) - EX$ heißt *Sicherheitszuschlag*. Das Hauptproblem der Prämienkalkulation ist nun die Festlegung des Sicherheitszuschlags. Verfügt ein Versicherungsunternehmen über viel Startkapital, so kann der Sicherheitszuschlag geringer bemessen werden, als im Falle eines geringen Startkapitals.

6.2 Eigenschaften von Prämienkalkulationsprinzipien

Bevor wir beginnen, einzelne Prämienkalkulationsprinzipien zu betrachten, sollten wir noch wünschenswerte Eigenschaften definieren, die diese Prinzipien haben sollten. Seien X , Y und Z drei unter π versicherbare Risiken.

Ein „gutes“ Prämienkalkulationsprinzip soll möglichst viele von folgenden Eigenschaften besitzen:

E1. *Positiver Sicherheitszuschlag:* $\pi(X) \geq EX$

E2. *Keine zu hohen Prämien:* $\pi(X) \leq \max(X)$, wobei unter $\max(X)$ der größtmögliche Gesamtschaden zu verstehen ist. Dieser ist ∞ , falls X nicht beschränkt ist.

- E3.** *Kein ungerechtfertigter Sicherheitszuschlag:* $\pi(a) = a$ für alle konstanten $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$.
- E4.** *Konsistenz:* $\pi(X + a) = \pi(X) + a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- E5.** *Additivität:* $\pi(X + Y) = \pi(X) + \pi(Y)$. Diese Eigenschaft bedeutet, dass das Aufspalten oder Zusammenfassen des Portfolios keine Auswirkung auf die Gesamtprämie haben darf. Sie wird normalerweise für unabhängige Risiken X und Y gefordert. Offensichtlich ergibt sich die Eigenschaft E4 aus den Eigenschaften E3 und E5. Manchmal sind die Eigenschaften E4 oder E5 zu restriktiv. Dann fordert man die
- E6.** *Subadditivität:* $\pi(X + Y) \leq \pi(X) + \pi(Y)$. Es bedeutet, dass das Aufspalten des Portfolios in Teilbestände einem Kunden, der einen Versicherungsschutz für mehrere Risiken sucht, keinen Vorteil für die Gesamtprämie bringen darf. Aus der Sicht des Versicherers, dürfen die Einzelprämien nicht steigen, falls das Portfolio größer wird.
- E7.** *Homogenität:* $\pi(aX) = a\pi(X)$ für alle $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Diese Eigenschaft kann folgendermaßen interpretiert werden: Bei einer Inflation wachsen alle Prämienbeiträge proportional mit der Inflationsrate a .
- E8.** *Erhalt der stochastischen Ordnung:* Aus $X \leq_{st} Y$ folgt $\pi(X) \leq \pi(Y)$.
- E9.** *Kompatibilität unter Mischung:* Aus $\pi(X) = \pi(Y)$ folgt

$$\pi(pF_X + (1-p)F_Z) = \pi(pF_Y + (1-p)F_Z)$$

für alle $p \in [0; 1]$ und Risiken Z .

Im folgenden werden diese Eigenschaften an Hand von Beispielen erläutert. Zunächst betrachten wir einfache Kalkulationsprinzipien, die in der Praxis sehr verbreitet sind.

6.3 Praxisnahe Prämienkalkulationsprinzipien

Folgende Prämientypen sind einfach zu berechnen und fordern nur Teilwissen über die stochastische Struktur des Portfolios, wie etwa die Kenntnis des Erwartungswertes, der Varianz oder der Quantilfunktion des Gesamtschadens. Die in Abschnitt 6.5 betrachteten Prämienkalkulationsprinzipien erfordern mehr Wissen über die Verteilung des Gesamtschadens und sind deshalb eher von theoretischem Interesse.

- P1.** *Erwartungswertprinzip:* $\pi(X) = (1+a)EX$ für ein $a \geq 0$. Falls $a = 0$, so ergibt sich das *Nettoprämienprinzip:* $\pi(X) = EX$. Wie im Kapitel 9 gezeigt wird, führt das Nettoprämienprinzip mit Wahrscheinlichkeit

1 zum technischen Ruin des Portfolios für beliebiges endliches Startkapital u . Um die Ruinwahrscheinlichkeit zu verringern, enthält die Erwartungswert-Prämie für $a > 0$ einen positiven Sicherheitszuschlag aEX , der zum Erwartungswert von X proportional ist.

Übungsaufgabe 6.3.1. *Das Erwartungswertprinzip erfüllt die Eigenschaften E1, E5-E9, jedoch E2-E4 nicht.*

Satz 6.3.1. *Sei π ein stetiges Prämienkalkulationsprinzip, d.h., es gilt $\pi(X_n) \rightarrow \pi(X)$, falls $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \rightarrow \infty$. Dann ist π vom Typ P1, d.h., es existiert ein $a \geq 0$: $\pi(X) = (1 + a)EX$ genau dann, wenn*

- $\pi(c) = (1 + a)c$ für eine beliebige Konstante c .
- $\pi(pF_X + (1 - p)F_Y) = p\pi(X) + (1 - p)\pi(Y)$ für alle Risiken X, Y und $p \in [0, 1]$.

Übungsaufgabe 6.3.2. *Beweisen Sie diesen Satz. Vgl. [10], S. 26 – 27.*

Das Erwartungswertprinzip ist ein recht einfaches, aber auch „grobes“ Prinzip. Es berücksichtigt nicht die Variabilität des Portfolios. Zusätzlich hängt die Prämie nur von $EX = EN EU_i$ ab und nicht vom Verhältnis $\frac{EU_i}{EN}$, das für die Höhe der zufälligen Schwankungen des Gesamtschadens eines Portfolios maßgebend ist. Dies kann zu einem übertrieben hohen Sicherheitszuschlag für große Bestände mit relativ kleinen mittleren Einzelschäden führen. Kleinere Bestände mit großen mittleren Einzelschäden können dagegen dramatisch untertarifert werden. So ergibt das Prinzip P1 mit $a = 1$ in Beispiel 4.4.2 die Prämie $\pi(X) = 2EX = 15.400.000$ Euro, wobei die entsprechende Ruinwahrscheinlichkeit 0,0000011 viel zu niedrig ist. Sie deutet auf einen übermäßig hohen Sicherheitszuschlag hin.

P2. *Prinzip des maximalen Schadens: $\pi(X) = pEX + (1 - p)\max(X)$ für $p \in [0, 1]$.*

Offensichtlich beinhaltet P2 beide Extremprinzipien: für $p = 1$ das Netto-Prinzip und für $p = 0$ das Prinzip $\pi(X) = \max(X)$, bei dem sich kaum jemand versichern lässt, weil die Prämien gleich dem höchsten Schaden sind. Dieses Prinzip tritt lediglich in einem *Versicherungsverein auf Gegenseitigkeit* auf, der alle seine Mitglieder zu einer Nachzahlung verpflichtet, sofern die Mittel des Unternehmens nicht ausreichend sind, um das Risiko abzudecken. Somit besteht die Beitragspflicht bis zur Höhe des maximalen Schadens. Die Prämien aber, die die Mitglieder „vorerst“ zu entrichten haben, sind kleiner, da mit dem maximalen Schaden nicht gerechnet wird.

Unter P2 sind diejenigen Risiken versicherbar, die einen endlichen Erwartungswert und eine endliche obere Schranke besitzen.

Übungsaufgabe 6.3.3. *Das Prinzip des maximalen Schadens erfüllt die Eigenschaften E1-E4, E6-E8, aber nicht E5, E9.*

Dieses Prinzip kann folgendermaßen auf den Fall der nicht beschränkten Risiken erweitert werden:

P3. *Quantil-Prinzip:* $\pi(X) = pEX + (1-p)Q_{F_X}(\varepsilon)$, wobei $p, \varepsilon \in [0, 1]$ und $Q_{F_X}(\varepsilon)$ das ε -Quantil der Verteilung von X ist:

$$Q_{F_X}(\varepsilon) = \inf\{x : F_X(x) \geq \varepsilon\}.$$

Die Fälle $p = 0$, $p = 1$ und $\varepsilon = 1$ liefern das eigentliche Quantil-Prinzip, das Nettoprämienprinzip und das Prinzip des maximalen Schadens, dementsprechend, weil $Q_{F_X}(1) = \max(X)$ gilt. Die Grundidee von P3 ist es, die Prämienhöhe so zu berechnen, dass der technische Ruin mit Wahrscheinlichkeit ε eintreten kann, wobei die bereits vorhandenen Mittel des Versicherungsunternehmens (das Startkapital u) ungenutzt bleiben.

Übungsaufgabe 6.3.4. *Zeigen Sie, dass für P3 die Eigenschaften E2, E4, E7, E8 gelten und E1, E3, E5, E6, E9 nicht!*

Satz 6.3.2. *Falls $EX = \mu$, $\text{Var} X = \sigma^2$ und die Prämie für das Risiko X nach dem Prinzip P3 berechnet wird, so gelten folgende Ungleichungen:*

$$\begin{aligned} \mu - (1-p)\sigma \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{1/2} &\leq \pi(X) \leq \mu + (1-p)\sigma \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/2}, \\ \mu - \frac{1-p}{2} \frac{E|X-\mu|}{\varepsilon} &\leq \pi(X) \leq \mu + \frac{1-p}{2} \frac{E|X-\mu|}{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

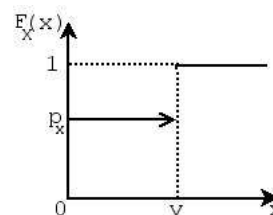
Beweis. Siehe den Beweis in [10], S. 34. □

Das Prinzip P3 mit $p = 0$ weist ernsthafte Mängel auf. Erstens, werden die eigenen Kapitalreserven des Unternehmens nicht berücksichtigt, was zu unzulässig hohen Prämien führen kann. Zweitens, ist es nicht subadditiv. So kann man nichts über die Entwicklung der Prämien bei wachsendem Portfolio aussagen. Die Prämie entwickelt sich nicht monoton. Dies wird am folgenden Beispiel erläutert.

Beispiel 6.3.1. *Betrachten wir einen Lebensversicherungsvertrag mit der Laufzeit von einem Jahr und Versicherungssumme v , die im Falle des Todes des Versicherungsnehmers fällig wird.*

Sei $q_x = 1 - p_x$ die Sterbewahrscheinlichkeit im Alter x , wobei $q_x < 0.01$ und somit $p_x > 0.99$ für ein gegebenes x gilt. Für $\varepsilon = 0.99$ und $p = 0$ wird die P3-Prämie gleich $\pi(X) = Q_{F_X}(0, 99) = 0$.

Deshalb wäre es für den Versicherungsnehmer von Vorteil, die Risiken so aufzuspalten, dass die Wahrscheinlichkeit des Schadens q_x kleiner als $1 - \varepsilon$ wäre. Somit wäre überhaupt keine Prämie fällig, was natürlich absurd ist.



P4. Varianz-Prinzip: $\pi(X) = E X + a \text{Var } X$ für ein $a > 0$

Übungsaufgabe 6.3.5. Beweisen Sie, dass für das Prinzip P4 folgende Eigenschaften gelten: E1, E3, E4, aber nicht E2, E5-E9. Die Eigenschaft E5 gilt nur für unabhängige Risiken. E6 gilt nur für nicht-positiv korrelierte Risiken.

P5. Standardabweichungsprinzip: $\pi(X) = E X + a \sqrt{\text{Var } X}$, $a > 0$. Die Bedeutung des Parameters a wird am folgenden Beispiel erläutert.

Beispiel 6.3.2. Sei $X = \sum_{i=1}^N U_i$ eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Parametern (λ, F_U) : $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $U_i \sim F_U$. Dann gilt gemäß Folgerung 4.3.1 $E X = \lambda E U$, $\text{Var } X = \lambda \text{Var } U + \lambda (E U)^2 = \lambda E U^2$, da $\lambda = E N = \text{Var } N$. Mit Hilfe des Übertragungssatzes aus [9], S. 257–260, Folgerung 3 (siehe auch [19], S. 472–473) kann man beweisen, dass

$$\frac{X - E X}{\sqrt{\text{Var } X}} = \frac{X - \lambda E U}{\sqrt{\lambda E U^2}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1) \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (6.3.1)$$

falls $E U^2 < \infty$. Somit gilt für große λ

$$\begin{aligned} P(X \leq \pi(X)) &= P(X \leq E X + a \sqrt{\text{Var } X}) \\ &= P\left(\frac{X - E X}{\sqrt{\text{Var } X}} \leq a\right) \approx \Phi(a) = \eta, \end{aligned}$$

wobei $\Phi(a)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Daraus folgt, dass $a = Q_\Phi(\eta)$, wobei das Niveau η nahe an 1 gewählt werden soll (z.B., $\eta = 0.99$), um mit Wahrscheinlichkeit η den Gesamtschaden durch die Prämie komplett abzudecken.

Übungsaufgabe 6.3.6. Benutzen Sie Übungsaufgabe 6.3.5, um die Gültigkeit der Eigenschaften E1-E5 von P5 zu beweisen.

Übungsaufgabe 6.3.7. *Beweisen Sie die folgenden zentralen Grenzwertsätze für die zusammengesetzte Verteilung des Risikos $X = \sum_{i=1}^N U_i$, $EU_i^2 < \infty$.*

1. *Falls X eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung besitzt, dann gilt (6.3.1).*
2. *Falls X eine zusammengesetzte Negativbinomialverteilung mit Parametern (α, p, F_U) besitzt, dann gilt*

$$\frac{X - EX}{\sqrt{Var X}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1), \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

3. *Falls X eine zusammengesetzte geometrische Verteilung mit Parametern (p_n, F_U) besitzt, dann gilt*

$$(a) \frac{X}{\left(1 + \frac{1}{1-p_n}\right) EU_i} \xrightarrow{d} Y \sim Exp(1), \quad p_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

Beweis. Siehe [9], S. 220-222. □

$$(b) \frac{X - N_n EU_i}{\sqrt{n Var U_i}} \xrightarrow{d} Y, \quad n \rightarrow \infty, \text{ wobei } p_n = 1 - 1/n \text{ und } Y \text{ eine Zufallsvariable mit der charakteristischen Funktion } \psi(t) = \frac{2}{t^2 + 2} \text{ ist.}$$

Beweis. Siehe auch [9], S. 257-261.

Sei $X = \sum_{i=1}^{N_n} U_i$, $EU_i^2 < \infty$, $N_n \sim Geo(p_n)$ und $p_n = 1 - \frac{1}{n}$. Sei weiter $EU_i = u$ und $Var U_i = \sigma^2 < \infty$. Wenn nun

$$\xi_{nk} = \frac{U_k - u}{\sqrt{n}\sigma},$$

so können wir mit dem klassischen Zentralen Grenzwertsatz folgern, dass

$$\sum_{k=1}^n \xi_{nk} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

wobei die charakteristische Funktion von $N(0, 1)$ wie folgt aussieht:

$$\varphi(t) = e^{-t^2/2}.$$

Setze $k_n = n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{N_n}{n} \leq x\right) &= P(N_n \leq nx) = 1 - \sum_{k \geq [nx]+1} (1-p_n)p_n^{k-1} \\ &= 1 - (1-p_n)p_n^{[nx]} \sum_{i \geq 0} p_n^i \\ &= 1 - p_n^{[nx]} \rightarrow 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Dies gilt, da aus $nx - 1 \leq [nx] \leq nx$ folgt, dass $p_n^{nx} \leq p_n^{[nx]} \leq p_n^{nx-1}$ und dies ist gleich mit

$$\underbrace{\left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} \right)^{-x}}_{\rightarrow e^{-x}} \leq p_n^{[nx]} \leq \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-1}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} \right)^{-x}}_{\rightarrow e^{-x}},$$

da $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$. Mit Hilfe des Übertragungssatzes gilt dann

$$P \left(\sum_{k=1}^{N_n} \xi_{nk} = \frac{X - N_n \cdot E U_i}{\sqrt{n\sigma}} \leq x \right) \rightarrow \psi(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei $\psi(x)$ die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^{\infty} e^{-t^2/2 \cdot z} d(1 - e^{-z}) = - \int_0^{\infty} (e^{-z})^{t^2/2} de^{-z} \\ &= \int_0^1 y^{t^2/2} dy = \frac{2}{t^2 + 2}, \end{aligned}$$

wobei bei der dritten Gleichheit die Substitution $y = e^{-z}$ verwendet wurde. \square

Bemerkung 6.3.1. Falls $\text{Var } X$ nicht existiert, kann sie in den Prinzipien P4, P5 durch die sogenannte wahrscheinliche Abweichung d ersetzt werden, die durch

$$P(Q_{F_X}(1/2) - d < X \leq Q_{F_X}(1/2) + d) = 1/2$$

definiert ist, wobei $Q_{F_X}(1/2)$ der Median der Verteilung F_X ist.

Die Prinzipien P4 und P5 berücksichtigen offensichtlich die Variabilität im Portfolio.

P6. Modifiziertes Varianzprinzip:

$$\pi(X) = \begin{cases} E X + a \frac{\text{Var } X}{E X}, & \text{falls } E X > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

P7. Absolutes Abweichungsprinzip: $\pi(X) = E X + a k_X$, wobei $a > 0$ und die Größe $k_X \stackrel{\text{def}}{=} E |X - Q_{F_X}(1/2)|$ die erwartete mittlere absolute Abweichung genannt wird.

Übungsaufgabe 6.3.8. Prüfen Sie die Gültigkeit der Eigenschaften E1-E9 für P5-P7.

Lemma 6.3.1. Für P7 gilt folgende äquivalente Darstellung:

$$\pi(X) = (1 - a) \int_0^{1/2} Q_{F_X}(z) dz + (1 + a) \int_{1/2}^1 Q_{F_X}(z) dz.$$

Übungsaufgabe 6.3.9. Beweisen Sie das obige Lemma.

Bevor wir weitere Prämienkalkulationsprinzipien betrachten, die eher theoretischer Natur sind, gehen wir auf einen wichtigen Begriff der Finanzmathematik, die sogenannte *Nutzenfunktion*, ein.

6.4 Nutzenfunktion

Im wirtschaftlichen Alltag benutzt ein Unternehmen verschiedene Strategien, um seine Ziele zu erreichen. Was kann als Kriterium einer erfolgreichen Strategie dienen? Das intuitiv klare Prinzip der Maximierung des erwarteten Gewinns EX kann nicht als solches Maß betrachtet werden, wie es im folgenden Beispiel erläutert wird.

Angenommen, es sei $X_1 = 10^7$ f. s. und $X_2 \sim Cauchy(\alpha, \lambda)$ mit $\lambda > 0$, wobei die Dichte der Cauchy-Verteilung durch

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + (x - \alpha)^2)}$$

gegeben ist. Es ist bekannt, dass $EX_2 = \infty$. Falls man zwischen diesen beiden Strategien mit Gewinn X_1 und X_2 auf der Grundlage des maximalen Gewinnprinzips wählen müsste, so würde man eindeutig X_2 den Vorrang geben, obwohl die Strategie X_1 in der Realität viel attraktiver sein kann, weil sie einen sicheren Gewinn verspricht.

Das zweite Beispiel mit vier unterschiedlichen Strategien, die denselben erwarteten Gewinn $EX = 1000$ bringen, zeigt, dass die Wahl für eine optimale Strategie stark von den jeweiligen Zielen und Prioritäten der einzelnen Unternehmen abhängt.

Strategie-Nr.	Gewinnverteilung
1	$P(X = 1.000) = 1$
2	$P(X = 0) = P(X = 2.000) = \frac{1}{2}$
3	$P(X = 0) = 0,999, P(X = 1.000.000) = 0,001$
4	$P(X = -2.000) = P(X = 4.000) = \frac{1}{2}$

Falls ein Unternehmen an einem sicheren Gewinn interessiert ist, wird es sich für die Strategie 1 entscheiden. Ein Unternehmen, dessen Existenz nicht von einem momentan stabilen Einkommen abhängt und dessen Management ein langfristiges Denken bevorzugt, wird die Strategien 2 oder 3 bevorzugen. Am risikoreichsten ist sicher die letzte Strategie 4, bei der auch ein Verlust von 2000 Euro möglich ist. Dennoch kann es passieren, dass ein Unternehmen sich entscheidet, diese Strategie unter sicheren Umständen zu wählen.

Frage: Wie beschreiben wir mathematisch diesen Entscheidungsprozess? Eine mögliche Antwort könnte darin liegen, indem wir unterschiedliche geeignete *Nutzenfunktionen* für jedes Unternehmen verwenden.

Definition 6.4.1. 1. Eine Funktion $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Nutzenfunktion*, falls sie monoton nicht-fallend und konkav ist.

2. Eine Funktion $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Verlustfunktion*, falls sie monoton nicht-fallend und konvex ist.

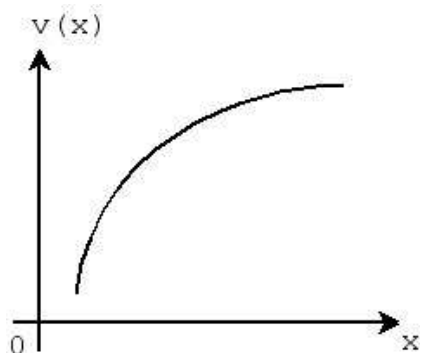


Abbildung 6.4.1: Nutzenfunktion

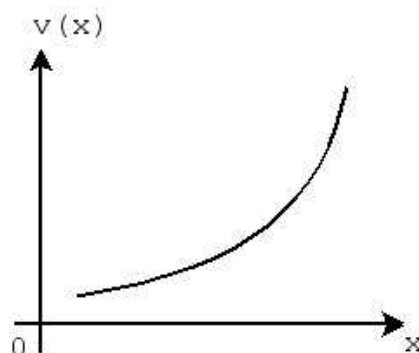
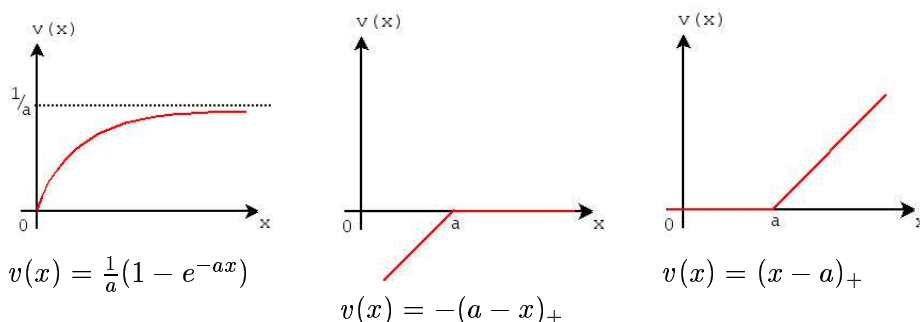


Abbildung 6.4.2: Verlustfunktion

Diese Funktionen müssen nicht-fallend sein, da „mehr Geld“ auch „mehr Nutzen“ oder „mehr Verlust“ bedeuten soll. Die Konkavität der Nutzenfunktion bedeutet, dass ein Gewinn mit kleinem Startkapital höher bewertet wird, als derselbe Gewinn, der mit Hilfe eines großen Startkapitals erreicht wurde.

Beispiele:

Nutzenfunktion $v(x)$	Verlustfunktion $v(x)$
$(1 - e^{-ax})/a, a > 0$	$e^{ax}, a > 0$
$-(a - x)_+, a \in \mathbb{R}$	$(x - a)_+, a \in \mathbb{R}$



Im weiteren werden wir Funktionen $v \in C^2(\mathbb{R})$ betrachten, die monoton steigend sind ($v'(x) > 0$). Zusätzlich sollen sie für Nutzenfunktionen konkav ($v''(x) < 0$) und für Verlustfunktionen konvex ($v''(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$) sein. Manchmal ist es wünschenswert, dass eine gewisse Ordnung \prec für Risiken bewahrt wird, d. h., dass

$$X \prec Y \Rightarrow E v(X) \leq E v(Y)$$

für alle Risiken X und Y . Somit erhalten wir für Verlustfunktionen v die *Stop-Loss-Ordnung* \leq_{sl} :

$$X \leq_{sl} Y \Rightarrow E v(X) \leq E v(Y).$$

Da die tatsächliche Verlustfunktion in der Praxis unbekannt ist, fordern wir, dass diese Bedingung für jede Verlustfunktion erfüllt ist.

Betrachten wir nun die Nutzenfunktion $v(x) = \log(x + 2.000)$ in dem obigen Beispiel. Die vier Strategien werden dann wie folgt bewertet:

Strategie-Nr.	$E v(x)$
1	$\log(3.000) = 8,006$
2	$\frac{1}{2}(\log(2.000) + \log(4.000)) = 7,947$
3	$0,999 \log(2.000) + 0,001 \log(1.002.000) = 7,607$
4	$-\infty = \log(0)$

Dem Entscheidungsprozess liegt die Maximierung des erwarteten Nutzen zugrunde. Für die obige Nutzenfunktion wäre die optimale Lösung die erste Strategie.

Diese beiden Konzepte können auf die Versicherungsbranche angewandt werden. Betrachten wir zuerst die Prämienkalkulation aus der Sicht des Versicherungsnehmers.

Beispiel 6.4.1. Ein Versicherungsnehmer ist bereit, die Prämie $\pi(X)$ für das versicherte Risiko X zu bezahlen, falls

$$v(u - \pi(X)) = E(v(u - X)) \quad (6.4.1)$$

für ein Startkapital u . Dies bedeutet, dass der Nutzen des Startkapitals u nach Abzug der Prämie genau so hoch sein sollte wie der erwartete Nutzen desselben Kapitals, falls ein Verlust der Höhe X eingetreten ist.

Um dies zu veranschaulichen sei $u = 2.000$, $v(x) = \log(2.000 + x)$, und X sei gleichverteilt im Intervall $[0, 2.000]$. Somit ist

$$v(2000 - \pi(X)) = E(v(2000 - X)),$$

wobei

$$\begin{aligned} E v(2000 - X) &= E(\log(4000 - X)) \\ &= \frac{1}{2000} \int_0^{2000} \log(4000 - x) dx \\ &= 7,987196821 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\pi(X) = 1056,964471 > E X = 1000.$$

Wir werden nun beweisen, dass diese Relation für jede beliebige Nutzenfunktion gilt:

Proposition 6.4.1. Falls die Prämie $\pi(X)$ wie in (6.4.1) kalkuliert wurde, dann gilt für jede Nutzenfunktion: $\pi(X) \geq E(X)$.

Beweis. Aufgrund der Konkavität von $v(x)$ ist auch $f(x) = v(u - x)$ konkav, denn für alle $\alpha \in (0, 1)$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} v(u - \alpha x_1 - (1 - \alpha)x_2) &= v(\alpha(u - x_1) + (1 - \alpha)(u - x_2)) \\ &\geq \alpha v(u - x_1) + (1 - \alpha)v(u - x_2). \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung von Jensen ($E v(Y) \leq v(E Y)$ für jede konkave Funktion v und Zufallsvariable Y) erhalten wir:

$$v(u - \pi(X)) \stackrel{(6.4.1)}{=} E v(u - X) \leq v(E(u - X)) = v(u - E X).$$

Da v eine monoton nicht-fallende Funktion ist, folgt somit

$$u - \pi(X) \leq u - E X \quad \Rightarrow \quad \pi(X) \geq E X.$$

□

Übungsaufgabe 6.4.1. Zeigen Sie, dass der obige Satz für Verlustfunktionen v nicht gilt.

6.5 Theoretische Kalkulationsprinzipien

Die im vorigen Abschnitt eingeführten Prämienkalkulationsprinzipien kamen aus der Praxis. Im vorliegenden Abschnitt werden wir theoretische Prämienkalkulationsprinzipien, die auf einer Nutzen-, Verlust- oder sonstigen Entscheidungsfunktion basieren, einführen. In den meisten Fällen kann die Prämie $\pi(X)$ als Nullstelle der Funktion

$$f(P) = E w(P, x), \quad w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.5.1)$$

kalkuliert werden, d. h., $\pi(X)$ ist eine Lösung von $f(P) = 0$.

6.5.1 Das Null–Nutzen–Prinzip P8

Im folgenden wird ein Prämienkalkulationsprinzip auf Basis einer Nutzenfunktion eingeführt. Die resultierende Prämie $\pi(X)$ kann aus Sicht des Versicherers, im Gegensatz zu (6.4.1), betrachtet werden.

Sei v eine streng monoton wachsende Nutzenfunktion. Dann soll für ein Risiko X die Prämie $\pi(X)$ als eine Lösung folgender Gleichung gewählt werden:

$$v(u) = E v(u + \pi(X) - X). \quad (6.5.2)$$

Das bedeutet, dass der erwartete Nutzen der Risikoreserve $R = u + \pi(X) - X$ und der Nutzen des Anfangskapitals u gleich sein sollen.

Für $u = 0$ ergibt sich das sogenannte *Null–Nutzen–Prinzip*:

P8:

$$v(0) = E v(\pi(X) - X) \quad (6.5.3)$$

Manchmal werden wir die so berechnete Prämie als $\pi_v(X)$ bezeichnen, um die Rolle der Nutzenfunktion $v(x)$ zu betonen.

Bemerkung 6.5.1. Die Prämien $\pi_{v_1}(X)$ sind für alle Nutzenfunktionen $v_1(x) = av(x) + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ gleich:

$$\pi_{v_1}(X) = \pi_v(X).$$

Dies folgt aus der Linearität des Erwartungswertes. Deshalb nehmen wir o. B. d. A. an, dass $v(0) = 0$ und $v'(0) = 1$ (wenn nicht, dann wird die Substitution $v(x) \mapsto \frac{v(x)-v(0)}{v'(0)}$ durchgeführt). Somit ist $\pi(X)$ die Lösung der Gleichung $E v(P - X) = 0$ oder äquivalent dazu die Nullstelle der Funktion $f(P) = E w(P, X)$ mit $w(P, X) = v(P - X)$.

Da $v(x)$ streng monoton wachsend ist, ist auch $g(P) = v(P - X)$, streng monoton wachsend in P und somit auch $E v(P - X)$, da folgendes gilt:

$$\forall P_1 < P_2 \quad \Rightarrow \quad E v(P_1 - X) < E v(P_2 - X).$$

Gleichheit kann hierbei nicht gelten, denn sonst gäbe es eine Zufallsvariable

$$Z = v(P_2 - X) - v(P_1 - X)$$

mit $Z > 0$ f. s. und $E Z = 0$. Somit existiert eine eindeutige Lösung $\pi(X)$ für die Gleichung $f(P) = E v(P - X) = 0$ und $\pi(X)$ ist wohldefiniert.

Man kann auch beweisen, dass, falls $v_1(0) = v_2(0) = 0$, für Nutzenfunktionen v_1 und v_2 und $\pi_{v_1}(X) = \pi_{v_2}(X)$ für alle Risiken X mit dem kompakten Träger (d.h. $P(X \in [a, b]) = 1$) gilt, folgt, dass $v_1(X) = \alpha \cdot v_2(X)$, $\alpha > 0$. (Siehe den Beweis in [10], S. 66, Theorem 3.

Beispiel 6.5.1. Sei

$$1. v(x) = x \Rightarrow \pi(X) = E X - \text{das Nettoprämienprinzip}$$

$$2. v(x) = 1 - e^{-ax} \Rightarrow \pi(X) = \frac{1}{a} \log E e^{aX}, \quad a > 0.$$

Dies ist das sogenannte Exponential-Prinzip P9, das wir im Abschnitt 6.5.3 behandeln werden. In der Tat gilt:

$$0 = v(0) = E(1 - e^{-a\pi(X) + aX}).$$

Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} e^{-a\pi(X)} \cdot \widehat{m}_X(a) &= 1 \\ \Rightarrow e^{a\pi(X)} &= \widehat{m}_X(a) \\ \Rightarrow \pi(X) &= \frac{1}{a} \log \widehat{m}_X(a). \end{aligned}$$

wobei $\widehat{m}_X(a) = E e^{aX}$ die momenterzeugende Funktion von X ist. Deshalb muss man voraussetzen, dass $\widehat{m}_X(a) < \infty$ gilt.

Es gibt aber auch genügend Fälle, wo die Lösung von (6.5.2) nicht explizit angegeben werden kann. Dann hilft die folgende Approximation, die P8 mit dem Varianzprinzip P4 verbindet:

Satz 6.5.1. Sei $v(\cdot) \in C^3(\mathbb{R})$ eine Nutzenfunktion mit $v'(x) > 0$ und $v''(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für die Prämie $\pi(X)$, die mit P8 berechnet wurde, gilt die folgende Approximation:

$$\pi(X) \geq E X + \frac{r(0)}{2} \text{Var}(X) \quad (6.5.4)$$

wobei $r(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{v''(x)}{v'(x)} > 0$ die Risikoaversion des Versicherten heißt, falls $\text{Var} X \leq \frac{2}{r^2(0)}$ und $r(0)$ hinreichend groß ist und zusätzlich gilt, dass

$$E[v'''(X_0)(\pi(X) - X)^3] = 0, \quad X_0 \in [\pi(X), X] \text{ f. s.}$$

Beweis. Nach der Taylor-Entwicklung gilt:

$$\begin{aligned} v(\pi(X) - X) &= v(0) + v'(0)(\pi(X) - X) + \frac{v''(0)}{2}(\pi(X) - X)^2 + \underline{O}((\pi(X) - X)^3), \end{aligned}$$

wobei

$$\underline{Q}((\pi(X) - X)^3) = \frac{v'''(X_0)}{3!}(\pi(X) - X)^3.$$

Nach der Anwendung des Erwartungswertes gilt mit Hilfe von P8:

$$\begin{aligned} 0 &= E v(\pi(X) - X) - v(0) \\ &= v'(0)(\pi(X) - E X) + \frac{v''(0)}{2} (\pi(X)^2 - 2E X \pi(X) + E X^2) \end{aligned}$$

oder, für $t = \pi(X)$ gilt:

$$\frac{v''(0)}{2} t^2 + (v'(0) - E X v''(0))t + \frac{v''(0)}{2} E X^2 - v'(0) E X = 0.$$

Lösen wir diese Gleichung nun nach t auf. Dazu werden wir zuerst die Diskriminante berechnen:

$$\begin{aligned} D &= (v'(0) - E X v''(0))^2 - 4 \frac{v''(0)}{2} \left(\frac{v''(0)}{2} E X^2 - v'(0) E X \right) \\ &= (v'(0))^2 - 2v'(0)v''(0)E X + (v''(0))^2 (E X)^2 \\ &\quad - (v''(0))^2 E X^2 + 2v''(0)v'(0)E X \\ &= (v'(0))^2 - (v''(0))^2 Var X \end{aligned}$$

Daraus folgt dann für t :

$$\begin{aligned} t &= \frac{-v'(0) + E X v''(0) \pm \sqrt{D}}{2 \frac{v''(0)}{2}} \\ &= E X - \frac{v'(0)}{v''(0)} \pm \sqrt{\left(\frac{v'(0)}{v''(0)} \right)^2 - Var X} \\ &= E X - \frac{1}{r(0)} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{1}{r(0)} - \frac{r(0)}{2} Var X \right)^2}_{\geq 0} - \frac{1}{4} \underbrace{\left(r(0) Var X \right)^2}_{\geq 0}} \\ &\geq E X + \frac{1}{r(0)} - \frac{1}{r(0)} + \frac{r(0)}{2} Var X \\ &= E X + \frac{r(0)}{2} Var X. \end{aligned}$$

Tatsächlich gilt:

$$\frac{1}{r(0)} - \frac{r(0)}{2} Var X \geq 0 \iff Var X \leq \frac{2}{r^2(0)}$$

und falls $r(0)$ groß genug ist, erhalten wir

$$\frac{1}{4} (r(0) Var X)^2 \leq \frac{1}{r^2(0)} \approx 0,$$

und somit kann dieser Term unter der Wurzel vernachlässigt werden. \square

Beispiel 6.5.2. 1. Sei $v(x) = x$. Daraus ergibt sich, dass $v''(x) \equiv 0$ und $r(x) \equiv 0$ ist. Somit kann der Satz 6.5.1 nicht direkt angewandt werden. Nichtsdestotrotz kann man sehen, dass $\pi(X) = EX$ (das Nettoprämienprinzip) gilt.

2. Sei $v(x) = 1 - e^{-ax}$ (das Exponential-Prinzip P9). Daraus folgt, dass

$$r(x) = -\frac{v''(x)}{v'(x)} = -\frac{-a^2 e^{-ax}}{a e^{-ax}} = a > 0.$$

Die Approximation (6.5.4) kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$\pi(X) \geq EX + \frac{a}{2} \text{Var } X,$$

und der Parameter a besitzt die Bedeutung der Risikoaversion in P9. Je größer die Risikoaversion a ist, desto höher ist der benötigte Sicherheitszuschlag.

Falls $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann gilt die Gleichung in (6.5.4):

$$\hat{m}_X(a) = e^{\mu a + \frac{\sigma^2 a^2}{2}}$$

und

$$\pi(X) = \frac{1}{a} \log \hat{m}_X(a) = \frac{1}{a} \left(\mu a + \frac{a^2}{2} \sigma^2 \right) = \mu + \frac{a}{2} \sigma^2 = EX + \frac{a}{2} \text{Var } X.$$

Satz 6.5.2. Das Null-Nutzen-Prinzip P8 erfüllt die Eigenschaften E1-E4 und E8. Die Eigenschaft E8 ist auch für die Stop-Loss-Ordnung erfüllt.

Beweis. Wir beweisen nur E1-E5 und E8. Der Rest ist die

Übungsaufgabe 6.5.1.

Nun zum Beweis:

E1: Da $v(P - x)$ eine konkave Funktion in x ist, gilt nach der Ungleichung von Jensen

$$v(0) = E v(\pi(X) - X) \leq v(\pi(X) - EX),$$

vgl. den Beweis zu Proposition 6.4.1. Da $v(x)$ streng monoton wachsend ist, gilt $\pi(X) - EX \geq 0$, woraus wiederum folgt, dass $\pi(X) \geq EX$.

E2: Falls $\max(X) = \infty$, dann ist die Aussage trivial. Sei nun $\max(X) < \infty$, dann folgt aus $X \leq \max(X)$:

$$\begin{aligned} v(0) &= E v(\pi(X) - X) \geq E v(\pi(X) - \max(X)) \\ &= v(\pi(X) - \max(X)) \end{aligned}$$

Da v monoton steigend ist, folgt daraus, dass

$$\pi(X) - \max(X) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \pi(X) \leq \max(X).$$

E3: Sei $X = a$. Hieraus ergibt sich, dass

$$v(0) = E v(\pi(a) - a) = v(\pi(a) - a),$$

woraus wir schließen können, da v monoton steigend ist, dass $\pi(a) = a$.

E4: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$v(0) = E v(\pi(X) - X) = E v(\pi(X + a) - X - a) = E v(P - X),$$

wobei $P = \pi(X + a) - a$ ist. Da $\pi(X)$ die einzige Lösung von (6.5.3) ist, muss $P = \pi(X)$ sein, d.h. $\pi(X) + a = \pi(X + a)$.

E5: gilt nur für unabhängige Risiken im Fall des Exponentialprinzips P9, vgl. den nächsten Satz 6.5.3.

E8: Wir werden die Eigenschaft P8 für \leq_{sl} zeigen. Der Beweis für \leq_{st} läuft analog. In diesem Fall wird von allen Funktionen nur gefordert, dass sie monoton wachsend sind und nicht noch zusätzlich, dass sie konvex sein müssen.

Seien X und Y Risiken mit $X \leq_{sl} Y$, d.h. für alle konvexen, monoton wachsenden Funktionen g gilt: $E g(X) \leq E g(Y)$. Da $v(x)$ konkav und monoton wachsend ist, ist $g(x) = -v(P - X)$ konvex und monoton wachsend. Deshalb gilt:

$$E(-v(P - X)) \leq E(-v(P - Y)) \iff E v(P - X) \geq E v(P - Y).$$

Dann ist für $P = \pi(X)$

$$E v(\pi(Y) - Y) = v(0) = E v(\pi(X) - X) \geq E v(\pi(X) - Y),$$

und da $v(x)$ streng monoton wachsend ist, gilt $\pi(Y) - Y \geq \pi(X) - Y$ und somit $\pi(Y) \geq \pi(X)$.

□

Es ist offensichtlich, dass E5 für unabhängige X und Y im Fall P9 gilt:

$$\begin{aligned} \pi(X + Y) &= \frac{1}{a} \log \widehat{m}_{X+Y}(a) \\ &= \frac{1}{a} \log \widehat{m}_X(a) + \frac{1}{a} \log \widehat{m}_Y(a) \\ &= \pi(X) + \pi(Y). \end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt, dass in der Familie der Prämienkalkulationsprinzipien P8 (Null-Nutzen-Prinzip) die einzigen Prinzipien, die E5 für unabhängige Risiken X und Y erfüllen, das Nettoprämienprinzip und das Exponentialprinzip sind:

Satz 6.5.3. Sei $v \in C^2(\mathbb{R})$ eine streng monoton wachsende Nutzenfunktion mit $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$ und $v''(0) = -a \leq 0$. Sei $\pi_v(\cdot)$ die Prämie, berechnet nach dem Null-Nutzen-Prinzip P8 mit der Eigenschaft $\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$ für unabhängige, versicherbare Risiken X und Y . Dann ist

$$\pi(X) = \begin{cases} \frac{1}{a} \log \widehat{m}_X(a), & \text{falls } a > 0 \quad (P9) \\ EX, & \text{falls } a = 0 \quad (P1). \end{cases}$$

Beweis. siehe [20], S. 92-94. □

Bemerkung 6.5.2. Da P8 die additiven Eigenschaften E5 und E6 nicht erfüllt, ist es für die Praxis ein eher schwaches Prinzip, da es wegen seiner Allgemeinheit als wenig nützlich erscheint. Sein Spezialfall P9 erfüllt aber wichtige Eigenschaften und ist somit für die Praxis von großer Bedeutung.

6.5.2 Mittelwert-Prinzip P10

Gegeben sei eine monoton wachsende, konvexe Verlustfunktion $v(\cdot)$. Dann wird die Prämie $\pi(X)$ nach dem Mittelwert-Prinzip P10 berechnet, falls

$$v(\pi(X)) = E v(X). \quad (6.5.5)$$

für alle Risiken X gilt. Aufgrund der Monotonität von v existiert eine eindeutige Lösung $\pi(X) = v^{-1}(E v(X))$ von (6.5.5). Genauso wie im Falle des Null-Nutzen-Prinzips liefert jede Verlustfunktion $av(x) + b$ für $a > 0$ dieselbe Prämie in bezug auf (6.5.5) wie $v(x)$: $\pi_{av+b}(X) = \pi(X)$.

Beispiel 6.5.3. 1. Sei $v(x) = x$. Dann gilt: $\pi(X) = EX$ – das Nettoprämienprinzip.

2. Sei $v(x) = e^{ax}$ mit $a > 0$. Dann ergibt sich $\pi(X) = \frac{1}{a} \log \widehat{m}_X(a)$ – das Exponentialprinzip. Dies gilt, da $v^{-1}(x) = \frac{1}{a} \log x$ ist.

Proposition 6.5.1. Das Mittelwert-Prinzip P10 erfüllt nur die Eigenschaften E1-E3, E8 und E9. E8 gilt auch für die Stop-Loss-Ordnung.

Übungsaufgabe 6.5.2. Beweisen Sie den obigen Satz außer für die Eigenschaften E4-E6.

Satz 6.5.4. Sei $v \in C^2(\mathbb{R})$ eine monoton wachsende Verlustfunktion, $v'(x) > 0$ $v''(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Falls

$$\pi_v(b+X) = \pi_v(X) + b, \quad \text{für alle Konstanten } b \in \mathbb{R}$$

gilt, d. h., die Eigenschaft E4 der Konsistenz ist erfüllt, und $\pi_v(\cdot)$ wurde nach dem Prämienkalkulationsprinzip P10 berechnet, dann ist entweder $\pi_v(X) = EX$ oder $\exists a > 0 : \pi_v(X) = \frac{1}{a} \log \widehat{m}_X(a)$.

Beweis. siehe [24], S. 216-217. □

Der obige Satz sagt aus, dass ein konsistentes Mittelwert-Prinzip notwendigerweise das Nettoprämienprinzip oder das Exponential-Prinzip sein muss.

6.5.3 Das Exponential-Prinzip P9

In diesem Abschnitt behandeln wir die Eigenschaften dieses wichtigen Prämienkalkulationsprinzips.

Satz 6.5.5. *Sei X ein Risiko mit $\widehat{m}_X(a_0) < \infty$ für ein $a_0 > 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. Die Prämie $\pi_a(X) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a} \log \widehat{m}_X(a)$ ist monoton wachsend in $a \in (0, a_0]$, vorausgesetzt, dass X nicht konstant ist.
2. Falls $EX < \infty$, dann gilt $\lim_{a \rightarrow +0} \pi_a(X) = EX$.
3. Falls $\widehat{m}_X(a) < \infty \forall a \in \mathbb{R}_+$, dann gilt $\lim_{a \rightarrow +\infty} \pi_a(X) = \max(X) = Q_{FX}(1)$.

Dieser Satz besagt, dass beide Extremfälle, das Nettoprämienprinzip P1 und das Prinzip des maximalen Schadens P2, als Grenzfälle von P9 für $a \rightarrow +0$ und $a \rightarrow +\infty$ erscheinen. Da $\pi_a(X)$ monoton wachsend in a ist, kann ein beliebiges Prämienkalkulationsprinzip $\pi(X)$ mit $EX \leq \pi(X) \leq Q_{FX}(1)$ als eine Prämie $\pi_{a_0}(x)$ für ein gewisses a_0 dargestellt werden. Oder, anders formuliert, je höher die Risikoaversion a , desto größer ist die Prämie $\pi_a(X)$.

Um den Satz 6.5.5 zu beweisen, brauchen wir das folgende Lemma:

Lemma 6.5.1 (Ungleichung von Ljapunov). *Für alle Risiken $Y \geq 0$ und Konstanten $0 < a < b$ gilt:*

$$(EY^a)^{1/a} \leq (EY^b)^{1/b} \quad (6.5.6)$$

Die Gleichung in (6.5.6) gilt genau dann, wenn Y konstant ist.

Beweis. Aus der Jensen Ungleichung folgt, dass

$$Eh(X) \geq h(EX)$$

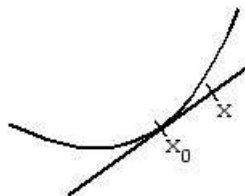
für eine konvexe Funktion h mit $h'(x) > 0$ und $h''(x) > 0 \forall x$ gilt. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn X konstant ist.

Da wir hier ein bisschen mehr als die klassische Jensen Ungleichung benötigen, werden wir dies beweisen: Aufgrund der Konvexität gilt $\forall x \neq x_0$:

$$h(x) > h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0).$$

Dabei sollten wir uns die Frage stellen, warum dies eine strikte Ungleichung ist. Nehmen wir an, es existiert ein Wert $x_1 \neq x_0$, so dass

$$h(x_1) = h(x_0) + h'(x_0)(x_1 - x_0)$$



gelte. Dann liegt der Punkt $(x_i, h(x_i))$ für $i = 0, 1$ nicht nur auf dem Graphen von h sondern auch auf der Tangenten von h im Punkt x_0 .

Wegen der Konvexität von $h(\cdot)$ muss dann jedoch das gesamte Segment $[(x_0, h(x_0)), (x_1, h(x_1))]$ auf dem Graphen von h liegen. Dann würde jedoch für alle $x \in (x_0, x_1)$ $h''(x) = 0$ gelten. Dies wäre aber ein Widerspruch zu unseren Annahmen. Somit kann die Gleichheit also nicht gelten.

Sei nun $x = X$ und $x_0 = EX$. Wenn wir auf beiden Seiten von

$$h(X) > h(EX) + h'(EX)(X - EX)$$

die Erwartungswerte betrachten, so erhalten wir $h(X) > h(EX)$ für $X \neq EX$.

Im speziellen Fall von (6.5.6) setzen wir nun $h(x) = x^{b/a}$ mit $b/a > 1$. Dann ist $h(x)$ konvex und für $x > 0$ (da wir die Aussage nur für Risiken $Y \geq 0$ benötigen):

$$h'(x) = \frac{b}{a} x^{b/a-1} > 0 \quad \text{und} \quad h''(x) = \frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) x^{b/a-2} > 0.$$

Mit $X = Y^a$ gilt dann:

$$(EY^a)^{b/a} \leq EY^b \quad \text{oder} \quad (EY^a)^{1/a} \leq (EY^b)^{1/b},$$

wobei die Gleichheit nur im Fall $Y \equiv EY$ gilt. \square

Bemerkung 6.5.3. Eine allgemeinere Form der Ungleichung von Ljapunov sieht wie folgt aus:

$$\left(E |Y|^{k_2} \right)^{k_3 - k_1} \leq \left(E |Y|^{k_1} \right)^{k_3 - k_2} \cdot \left(E |Y|^{k_3} \right)^{k_2 - k_1} \quad \forall 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3$$

für eine Zufallsvariable Y . Als Folgerung erhält man:

$$E|Y| \leq \sqrt{E|Y|^2} \leq \sqrt[3]{E|Y|^3} \leq \dots \leq \sqrt[k]{E|Y|^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Beweis. (von Satz 6.5.5)

1. Benutzen wir die Ungleichung von Ljapunov mit $Y = e^X$, $\forall a < b < a_0$ so bekommt man

$$(E e^{aX})^{1/a} \leq (E e^{bX})^{1/b}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\pi_a(X) = \frac{1}{a} \log E e^{aX} \leq \frac{1}{b} \log E e^{bX} = \pi_b(X),$$

wobei die Gleichheit nur gilt, falls e^X konstant ist (d. h., X ist konstant). Daraus ergibt sich, dass $\pi_a(X)$ streng monoton wachsend bzgl. a ist.

2. Wir benutzen die Taylorentwicklung von $\widehat{m}_X(a)$ in der Umgebung von $a = 0$:

$$\widehat{m}_X(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{m}_X^{(n)}(0)}{n!} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E X^n}{n!} a^n,$$

wobei wir vorausgesetzt haben, dass $E X^k < \infty \forall k \in \mathbb{N}$, $X \geq 0$ und $\widehat{m}_X(a) < \infty \forall a \in [0, a_0)$. Dann ist bekannt, dass $\widehat{m}_X^{(n)}(0) = E X^n \forall n \in \mathbb{N}$ existiert. Ähnliches erhalten wir für ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $E X^k < \infty$:

$$\widehat{m}_X(a) = 1 + \sum_{n=1}^k \frac{E X^n}{n!} a^n + \overline{O}(a^k).$$

Wenn wir nun $k = 1$ wählen, so können wir folgern, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \log \widehat{m}_X(a) &= \frac{1}{a} \log(1 + aE X + \overline{O}(a)) \\ &= \frac{1}{a} (aE X + \overline{O}(a)) \\ &= E X + \overline{O}(1). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\lim_{a \rightarrow +0} \pi_a(X) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a} \log \widehat{m}_X(a) = E X.$$

3. Wir zeigen zunächst, dass $\pi_a(X) \leq Q_{F_X}(1)$ ist. Dies ist klar, da P9 ein Spezialfall von P8 (Null-Nutzen-Prinzip) ist und P8 die Eigenschaft E2 für alle X mit $Q_{F_X}(1) < \infty$ erfüllt. Für ein X mit $\max(X) = \infty$ ist die Aussage trivial. Zeigen wir, dass $\forall \delta \in (0, Q_{F_X}(1))$ gilt:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \pi_a(X) \geq \delta. \quad (6.5.7)$$

Wenn dies richtig ist, können wir für $\delta \rightarrow Q_{F_X}(1) - 0$ folgern:

$$Q_{F_X}(1) \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \pi_a(X) \leq Q_{F_X}(1),$$

woraus sich ergibt, dass

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \pi_a(X) = Q_{F_X}(1).$$

Um (6.5.7) zu zeigen, konstruieren wir

$$Y = \begin{cases} 0, & X \leq \delta \\ \delta, & X > \delta \end{cases}$$

woraus folgt, dass $Y \leq X$ f. s.. Hieraus können wir schließen, dass

$$\widehat{m}_Y(a) = e^0 F_X(\delta) + e^{a\delta} (1 - F_X(\delta)) \leq \widehat{m}_X(a)$$

bzw.

$$\widehat{m}_X(a) \geq e^{a\delta}(1 - F_X(\delta))$$

oder

$$\pi_a(X) = \frac{1}{a} \log \widehat{m}_X(a) \geq \frac{1}{a} (\log(1 - F_X(\delta)) + a\delta).$$

Hieraus ergibt sich:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \pi_a(X) \geq \delta.$$

□

Wir werden nun die Eigenschaften des Exponentialprinzip P9 als ein Spezialfall von P8 und P10 zusammenfassen:

Satz 6.5.6. *Für das Exponential-Prinzip P9 gelten die Eigenschaften E1-E4, E8, E9. E5 gilt ausschließlich für unabhängige Risiken.*

Beweis. Die Eigenschaften E1-E3, E8 und E9 haben wir bereits in der Proposition 6.5.1 gezeigt. E4 und E5 folgen aus dem Theorem 6.5.2. E7 ist offensichtlich: $\pi(cX) \neq c\pi(X)$.

Wir werden nun beweisen, dass E6 nicht gilt: Wir betrachten zwei abhängige Risiken X und Y mit der gemeinsamen Verteilung

		X	
		0	1
Y	0	q	0
	1	0	p

mit $p + q = 1$ und $p, q > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_a(X + Y) &= \frac{1}{a} \log(q + pe^{2a}) \\ \text{und } \pi_a(X) &= \pi_a(Y) = \frac{1}{a} \log(q + pe^a) \end{aligned}$$

und somit

$$\pi_a(X + Y) - \pi_a(X) - \pi_a(Y) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{q + pe^{2a}}{(q + pe^a)^2} \right) > 0,$$

da $q + pe^{2a} > (q + pe^a)^2$. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} q + pe^{2a} - (q + pe^a)^2 &= q + pe^{2a} - q^2 - 2qpe^a - p^2e^{2a} \\ &= q(1 - q) + pe^{2a}(1 - p) - 2qpe^a \\ &\stackrel{q=1-p}{=} pq + pqe^{2a} - 2pqe^a \\ &= pq(1 - 2e^a + e^{2a}) \\ &= pq(1 - e^a)^2 > 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\pi_a(X + Y) > \pi_a(X) + \pi_a(Y).$$

□

Bemerkung 6.5.4. *Wegen seiner schönen Eigenschaften kann P9 als ein optimaler Kompromiss zwischen verschiedenen Prämienkalkulationsprinzipien betrachtet werden, besonders zwischen den extremen Prinzipien P1 und P2. Ein Nachteil von P9 besteht in der Nicht-Versicherbarkeit der Risiken mit schweren Tails, da $\hat{m}_X(a) = \infty \forall a > 0$. Außerdem muss man die Risikoaversion a kennen, um P9 anwenden zu können. Diese muss allerdings aus den Daten geschätzt werden.*

Eine Verallgemeinerung von P8-P10 liefert das sogenannte Prinzip der Schweizer Prämie:

6.5.4 Prinzip der Schweizer Prämie P11

Sei $v(\cdot)$ eine monoton wachsende Nutzen- oder Verlustfunktion und sei $z \in [0, 1]$ gegeben. Dann wird die Prämie $\pi(X)$ nach dem Prinzip P11 der *Schweizer Prämie* berechnet, falls $\pi(X)$ die Lösung folgender Gleichung ist:

$$E v(X - z \pi(X)) = v((1 - z)\pi(X)) \quad (6.5.8)$$

Für $z = 0$ erhalten wir das Mittelwert-Prinzip P10, für $z = 1$ das Null-Nutzen-Prinzip P8.

Nehmen wir an, wir haben eine Verlustfunktion v . Dann ist $v_1(x) = -v(-x)$ eine wachsende Nutzenfunktion und es gilt:

$$E v_1(X - \pi(X)) = v_1(0) \iff E v(\pi(X) - X) = v(0).$$

Um die Bedeutung von (6.5.8) zu illustrieren, führen wir das folgende Beispiel hier an:

Beispiel 6.5.4 (Rückversicherung). *Wir betrachten die Situation, dass ein Zedent (Erstversicherer) einen Teil zX , $z \in (0, 1)$ von einem Risiko X an einen Rückversicherer weitergibt (das ist die sogenannte proportionale Rückversicherung) und dass der Rückversicherer denselben Anteil $z\pi(X)$ an der Prämie erhält. Somit trägt der Erstversicherer das Risiko $(1 - z)X$ und kann mit dem Anteil $(1 - z)\pi(X)$ der gesamten Prämie den Verlust decken. Sei $\pi(X)$ eine gute Schätzung für X , d. h., es gilt $\pi(X) \approx X$. Dann gilt auch:*

$$(1 - z)X \approx X - z\pi(X).$$

Angenommen, der Erstversicherer verwendet das Mittelwert-Prinzip P10 mit der Verlustfunktion v :

$$v(\pi(X)(1 - z)) = E v(X - z\pi(X)).$$

Somit erhalten wir die Gleichung (6.5.8). Die Eigenschaften von P11 können aus der Proposition 6.5.1 und dem Satz 6.5.2 hergeleitet werden.

6.5.5 Das Verlustfunktionen–Prinzip P12

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden wir ein alternatives Verfahren für die Prämienkalkulation betrachten. Es basiert auf der Minimierung des durchschnittlichen Verlust. Um dies einzuführen, werden wir die Definition einer *Verlustfunktion* verallgemeinern:

Definition 6.5.1. Jede Funktion $L(x, P) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wird eine *Verlustfunktion* genannt. Diese Funktion symbolisiert den Verlust des Risikos X , das mit der Prämienstrategie P kalkuliert wurde.

Die Prämie $\pi(X)$, die den durchschnittlichen Verlust, d. h.

$$\pi(X) = \arg \min_{P \geq 0} E L(X, P).$$

minimiert, wird nach dem *Verlustfunktionen–Prinzip* P12 kalkuliert.

Beispiel 6.5.5. 1. Sei $L(x, P) = (x - P)^2$ die Verlustfunktion der Methode der kleinsten Quadrate. Dann ist

$$E L(x, P) = E X^2 - 2E X \cdot P + P^2.$$

Da $E L(x, P) \rightarrow \min$, folgt aus

$$\frac{\partial E L(x, P)}{\partial P} = 0,$$

dass $P = E X$ das globale Minimum ist und somit $\pi(X) = E X$ das *Nettoprämienprinzip* P1.

2. Sei $L(x, P) = x(x - P)^2$, $x \geq 0$ Dann gilt das modifizierte Varianzprinzip P6:

$$\pi(X) = E X + \frac{\text{Var } X}{E X}.$$

3. Sei $L(x, P) = a_1(x - P)_+ + a_2(x - P)_-$, für $a_1, a_2 \geq 0$ mit $a_1 + a_2 > 0$. Daraus folgt für $\varepsilon = \frac{a_1}{a_1 + a_2}$ das *Quantil–Prinzip* P3:

$$\pi(X) = Q_{F_X}(\varepsilon),$$

falls wir annehmen, dass die Risiken X eine absolut stetige Verteilung besitzen. Wir benutzen die Bezeichnung

$$(a)_- = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Sei $L(x, P) = (e^{ax} - e^{aP})^2$, $a > 0$. Hieraus folgt, das Exponential–Prinzip P9:

$$\pi(X) = \frac{1}{a} \log \widehat{m}_X(a).$$

Übungsaufgabe 6.5.3. Zeigen Sie, dass die Prämien in 2)–4) im Beispiel (6.5.5) bezüglich P12 kalkuliert wurden.

6.6 Bonus–Malus–Prämienkalkulationsprinzip

In diesem Abschnitt wird die Effizienz von Bonus–Malus–Kalkulationsprinzipien betrachtet werden. Im Folgenden werden die Bezeichnungen aus §3.4 benutzt werden. Sei $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_l)^T$ ein Vektor von Prämien (oder möglichen Prämienraten) $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \dots \leq \pi_l$ mit einer Superbonusklasse π_1 und einer Supermalusklasse π_l . Die Markovkette $X = \{X_i : i = 0, 1, \dots\}$ beschreibe die Tarifklassen einer Police. X ist eine homogene, zeitdiskrete Markovkette mit Zustandsraum $E = \{1, \dots, l\}$. Sei Y_n die Anzahl der gemeldeten Schäden einer Police im Jahr n . Angenommen $Y_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$, d. h.

$$p_k = P(Y_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann sehen die Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt aus:

$$p_{ij}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t_{ij}(k), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, l\},$$

wobei

$$t_{ij}(k) = \begin{cases} 1, & \text{falls die Police von der Klasse } i \text{ nach } j \text{ übergeht} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Übergangsfunktionen sind unter der Voraussetzung, dass k Schäden im laufenden Jahr gemeldet wurden. Wir betrachten nun die Matrix $P = P(0, 1) = (p_{ij}(1))$. Aus den Chapman–Kolmogorov–Gleichungen (3.4.2) folgt, dass

$$P(m, m+n) = P(0, n) = P^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad P(n) = P^n \cdot P(0),$$

wobei $P(n) = (p_i(n))_{i \in E}$ und $p_i(n) = P(X(n) = i)$. Sei P regulär, d. h. $\det P \neq 0$. Dann können wir zeigen (vgl. Theorem 7.2.1 von [20], S. 281–282), dass für alle $i \in E$ ein $\mu_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) > 0$ existiert, so dass $\sum_{j=1}^l \mu_j = 1$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ ist die sogenannte *stationäre Verteilung von X* . Die Begründung dafür liefert das folgende Lemma:

Lemma 6.6.1. *Unter den obigen Bedingungen ist μ die einzige Lösung der folgenden Gleichgewichtsgleichung:*

$$\mu = \mu P \quad \text{oder} \quad \mu_j = \sum_{i \in E} \mu_i p_{ij}, \quad \forall j \in E. \quad (6.6.1)$$

Mit anderen Worten: μ^T ist der einzige Eigenvektor mit Eigenwert 1 des Operators P^T .

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mu_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj} \\ &= \sum_{k \in E} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj} = \sum_{k \in E} \mu_k \cdot p_{kj} \end{aligned}$$

Somit gilt (6.6.1). Angenommen es existiere $\mu' \neq \mu$ mit $\mu' = \mu' P$. Wenn wir nun (6.6.1) iterieren, so erhalten wir $\mu' = \mu' P^n$ und

$$\begin{aligned} \mu' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu' P^n \\ &= \left(\sum_{k \in E} \mu'_k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} p_{kj}(n) \right)_{j \in E} \\ &= (1 \cdot \mu_j)_{j \in E} = \mu. \end{aligned}$$

□

Die obige Aussage bedeutet, dass, wenn wir eine Anfangsverteilung, z. B. $P(0) = \mu$, gewählt haben, $P(n) = \mu$ für alle n gilt. Dies erklärt, warum diese Verteilung stationäre Verteilung genannt wird.

Falls wir die *stationäre Prämie*, d. h. die durchschnittliche Prämie einer Police in bezug auf μ , berechnen wollen, bekommen wir

$$\bar{\pi} = \bar{\pi}(\lambda) = \sum_{i \in E} \mu_i \pi_i = \mu \cdot \pi,$$

die eine Funktion der Intensität der Schadensankünfte λ ist. Angenommen, $\pi(\lambda)$ ist differenzierbar. Das Hauptziel von einem Bonus–Malus–System ist, dass jeder eine Prämie zahlt, die so nah wie möglich am Erwartungswert seiner/ihrer Schäden pro Jahr liegt.

Dies bedeutet, dass wir möchten, dass

$$\bar{\pi}(\lambda) = \lambda \cdot EU, \quad (6.6.2)$$

wobei EU die erwartete Schadenshöhe ist. Somit muss $\bar{\pi}(\lambda)$ eine lineare Funktion in λ sein. In den meisten praktischen Beispielen ist dies nicht so. Es wäre angenehm, wenn man die *Wirksamkeit* eines Bonus–Malus–Systems

durch die Abweichung von $\bar{\pi}(\lambda)$ zu λEU messen könnte.
Falls (6.6.2) gilt, so erhalten wir:

$$\log \bar{\pi}(\lambda) = \log \lambda + \log EU.$$

Wenn wir nun auf beiden Seiten nach λ ableiten, so sehen wir, dass

$$\frac{\bar{\pi}'(\lambda)}{\bar{\pi}(\lambda)} = \frac{1}{\lambda},$$

oder anders dargestellt:

$$\frac{\lambda \bar{\pi}'(\lambda)}{\bar{\pi}(\lambda)} = 1.$$

Definition 6.6.1. 1. Die Funktion

$$e(\lambda) = \frac{\lambda}{\bar{\pi}(\lambda)} \bar{\pi}'(\lambda) = \frac{d \log \bar{\pi}(\lambda)}{d \log \lambda}. \quad (6.6.3)$$

wird die (Loinaranta) Effizienz des Bonus–Malus–Systems genannt.

2. Das System ist für die Ankunftsrate vollkommen effizient, falls

$$e(\lambda) = 1.$$

Was ist die Bedeutung von $e(\lambda)$? Angenommen, die Ankunftsintensität hat sich ein wenig geändert: $\lambda \mapsto \lambda(1+h) = \lambda + \lambda h$, wobei h sehr klein sein soll. Wir werden nun zeigen, dass die stationäre Prämie sich für kleine h wie folgt verhält:

$$\bar{\pi}(\lambda(1+h)) \approx \bar{\pi}(\lambda)(1 + e(\lambda)h). \quad (6.6.4)$$

In der Tat folgt aus (6.6.3)

$$d\bar{\pi}(\lambda) = \frac{\bar{\pi}(\lambda)}{\lambda} e(\lambda) d\lambda.$$

Für $d\lambda = \lambda(1+h) - \lambda = \lambda h$ bekommen wir

$$\bar{\pi}(\lambda(1+h)) - \bar{\pi}(\lambda) \approx \frac{\bar{\pi}(\lambda)}{\lambda} e(\lambda) \cdot \lambda h = \bar{\pi}(\lambda) e(\lambda) h$$

bzw.

$$\bar{\pi}(\lambda(1+h)) \approx \bar{\pi}(\lambda)(1 + e(\lambda) \cdot h).$$

Dies bedeutet, dass $e(\lambda)$ die Änderungsrate für die stationäre Prämie $\bar{\pi}(\lambda)$ für eine sehr kleine Änderung der Ankunftsintensität λ ist.

Wie bereits oben erwähnt, impliziert ein faires Nettoprämienkalkulationsprinzip, dass $e(\lambda) \approx 1$. In der Praxis kann dies nicht für alle λ , aber wenigstens für ein Intervall $(\lambda_1, \lambda_2) \ni \lambda$ garantiert werden, siehe Proposition

6.6.1. Darüberhinaus bedeutet eine Effizienz von $0 < e(\lambda) < 1$, dass schlechte Autofahrer in der Autoversicherung subventioniert werden. In der Tat gilt unter realistischen Bedingungen, dass $0 < \bar{\pi}(0), \bar{\pi}(\infty) < \infty$. Dies ist richtig, da für alle $\pi_i \in (0, \infty)$ gilt:

$$\frac{d}{d\lambda} \log \frac{\bar{\pi}'(\lambda)}{\lambda} = \frac{\bar{\pi}'(\lambda)}{\bar{\pi}(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(e(\lambda) - 1) < 0.$$

Daraus folgt, dass $\log \frac{\bar{\pi}(\lambda)}{\lambda}$ und somit natürlich auch $\frac{\bar{\pi}(\lambda)}{\lambda}$ monoton fallend von unendlich für $\lambda \rightarrow 0_+$ nach 0 für $\lambda \rightarrow \infty$ ist. Da $\bar{\pi}(\lambda)$ stetig ist, existiert ein λ_0 , für das das System vollkommen effizient ist, d. h. $\bar{\pi}(\lambda_0) = 1$. Außerdem können wir daraus, dass $\frac{\bar{\pi}(\lambda)}{\lambda}$ monoton fallend ist, schließen, dass (schlechte) Fahrer mit $\lambda > \lambda_0$ weniger zahlen, als sie eigentlich sollten. Im Gegensatz dazu zahlen gute Fahrer mit $\lambda < \lambda_0$ mehr. \Rightarrow Es findet ein Kapitaltransfer von den guten zu den schlechten Risiken statt.

Proposition 6.6.1. *Sei das Bonus-Malus-System für $\lambda = \lambda_0$ vollkommen effizient. Dann gilt:*

$$\bar{\pi}(\lambda) = \lambda \exp \left(\int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{1 - e(x)}{x} dx \right), \quad \forall \lambda,$$

falls wir o. B. d. A. annehmen, dass $EU \equiv 1$.

Beweis. Mit (6.6.3) können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{e(x)}{x} dx &= \int_{\lambda}^{\lambda_0} (\log \bar{\pi}(x))' dx \\ &= \log \underbrace{\bar{\pi}(\lambda_0)}_{= \lambda_0} - \log \bar{\pi}(\lambda) \\ &= \log \lambda_0 - \log \bar{\pi}(\lambda) \\ &= \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{1}{x} dx + \log \lambda - \log \bar{\pi}(\lambda). \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \log \bar{\pi}(\lambda) &= \log \lambda + \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{1 - e(x)}{x} dx \\ \text{bzw. } \bar{\pi}(\lambda) &= \lambda \exp \left(\int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{1 - e(x)}{x} dx \right). \end{aligned}$$

□

Diese Proposition liefert eine allgemeine Form von $\bar{\pi}(\lambda)$. Es sollte beachtet werden, dass

$$\bar{\pi}(\lambda) = \lambda \iff e(x) \equiv 1 \quad \forall x \in (\lambda, \lambda_0).$$

Wie können wir nun $e(\lambda)$ berechnen? Wenn wir (6.6.3) betrachten, so kann das Problem auf die Berechnung von $\bar{\pi}'(\lambda)$ beschränkt werden. Laut Definition ist

$$\bar{\pi}'(\lambda) = \sum_{i \in E} \mu'_i(\lambda) \cdot \pi_i = \mu'(\lambda) \cdot \pi, \quad (6.6.5)$$

wobei $\mu'_i(\lambda)$ das folgende lineare Gleichungssystem erfüllen muss:

$$\begin{cases} \mu'(\lambda) = \mu'(\lambda) \cdot P + \mu(\lambda) \cdot \frac{dP}{d\lambda} \\ \sum_{i \in E} \mu'_i(\lambda) = 0 \end{cases} \quad (6.6.6)$$

das aus (6.6.1) und der Definition des Maßes folgt. Die erste Gleichung in (6.6.6) kann auch wie folgt geschrieben werden

$$\mu'(\lambda)(\mathbf{I} - P) = \mu(\lambda) \frac{dP}{d\lambda},$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\lambda} &= \left(\frac{d}{d\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t_{ij}(k) \right) \right)_{i,j \in E} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(-e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) t_{ij}(k) + e^{-\lambda} (-1) t_{ij}(0) \right)_{i,j \in E} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (t_{ij}(k+1) - t_{ij}(k)) \right)_{i,j \in E} \end{aligned}$$

und die Matrix $\mathbf{I} - P$ ist aufgrund von (6.6.1) entartet:

$$\mu = \mu P \Rightarrow P^T \mu^T = \mu^T \Rightarrow (P^T - \mathbf{I}) \mu^T = 0$$

hat nicht-ausgeartete Lösungen. $P^T - \mathbf{I} = (P - \mathbf{I})^T$ ist ausgeartet. Damit folgt, dass

$$\det(\mathbf{I} - P) = \det(\mathbf{I} - P)^T = (-1)^l \det(P - \mathbf{I})^T = 0.$$

Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, benutzen wir die zweite Gleichung aus (6.6.6) in der Form $\mu'(\lambda) \cdot \mathbb{E} = 0$ geschrieben, wobei $\mathbb{E} = (1)_{i,j \in E}$ ist. Dann gilt

$$\mu'(\lambda) = \mu(\lambda) \frac{dP}{d\lambda} (\mathbf{I} - P + \mathbb{E})^{-1}, \quad (6.6.7)$$

da $\mathbf{I} - P + \mathbb{E}$ regulär ist. Wir werden nun beweisen, dass $\mathbf{I} - P + \mathbb{E}$ invertierbar ist. Mit anderen Worten, wir werden zeigen, dass aus $(\mathbf{I} - P + \mathbb{E})x^T = 0$ $x^T = 0$ folgt. Wenn wir $(\mathbf{I} - P + \mathbb{E})x^T$ von links mit μ multiplizieren, so erhalten wir (wobei $e = (1, \dots, 1)$ sei):

$$\begin{aligned} & \mu(\mathbf{I} - P + \mathbb{E})x^T = 0 \\ \Leftrightarrow & \underbrace{(\mu(\mathbf{I} - P))}_{=0} + \underbrace{(\mu\mathbb{E})}_{=e} x^T = 0 \\ \Leftrightarrow & e \cdot x^T = 0 \\ \Leftrightarrow & \mathbb{E}x^T = 0 \\ \Rightarrow & (\mathbf{I} - P)x^T = 0 \\ \Leftrightarrow & x^T = Px^T \\ \Leftrightarrow & x^T = P^n x^T \end{aligned}$$

für alle n . Dies ist äquivalent dazu, dass wir für $n \rightarrow \infty$

$$x_i = \sum_{j \in E} \mu_j x_j, \quad \forall i \in E$$

erhalten. Da die rechte Seite nicht von i abhängt, können wir daraus schließen, dass $x = c \cdot e$ für eine Konstante c gilt. Mit $e \cdot x^T = 0$, erhalten wir somit, dass $c \cdot e \cdot e^T = 0$, woraus wiederum folgt, dass $c = 0$ und somit $\lambda = 0$ ist.

Wenn wir (6.6.5)-(6.6.7) und (6.6.3) zusammenfassen, so erhalten wir das folgende Ergebnis:

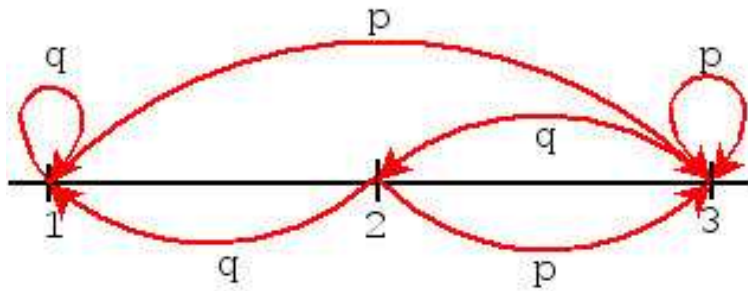
Satz 6.6.1. *Unter den obigen Annahmen gilt:*

$$e(\lambda) = \frac{\lambda}{\bar{\pi}(\lambda)} \mu(\lambda) \frac{dP}{d\lambda} (\mathbf{I} - P + \mathbb{E})^{-1} \cdot \pi.$$

Um die obige Theorie zu veranschaulichen, betrachten wir das folgende Beispiel:

Beispiel 6.6.1 (Autoversicherung). *Wir betrachten ein Bonus-Malus-System in der Autoversicherung mit drei Stadien $E = \{1, 2, 3\}$, $l = 3$, $\pi = (a, c, c)^T$, wobei $\pi_1 = a < \pi_2 = \pi_3$. Das Verhalten des Fahrers und die dazugehörigen Prämien können wie folgt ausgedrückt werden:*

1. *Schadenfrei in den letzten zwei Jahren: Prämie a ist zu zahlen.*
2. *Kein Schaden im letzten Policenjahr, dafür aber mindestens ein Schaden im Jahr zuvor: Prämie c ist zu zahlen.*
3. *Mindestens ein Schaden im letzten Jahr: Prämie c ist zu zahlen.*



Die zugehörige Übergangsfunktion sieht für alle k wie folgt aus:

$$t_{13}(k) = t_{23}(k) = t_{33}(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 1 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

$$t_{32}(k) = t_{21}(k) = t_{11}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

$$t_{31}(k) = t_{12}(k) = t_{22}(k) = 0$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein oder mehr Schäden innerhalb eines Jahres in einer Police zu haben, sei $p = P(Y_k > 0) = 1 - e^{-\lambda}$. Wir führen die Bezeichnung $q = 1 - p = P(Y_k = 0) = e^{-\lambda}$ ein. Dann sieht die Ein-Schritt-Übergangsmatrix wie folgt aus:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 & p \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von (6.6.1) kann man die stationäre Verteilung berechnen:

$$\begin{cases} (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \cdot \begin{pmatrix} q & 0 & p \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix} \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = q(\mu_1 + \mu_2) \\ \mu_2 = q\mu_3 \\ \mu_3 = p(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \mu_3 &= p \\ \Rightarrow \mu_2 &= q \cdot p \\ \Rightarrow \mu_1 &= q\mu_2 + q^2 p \\ \Rightarrow p\mu_1 &= q^2 p \\ \Rightarrow \mu_1 &= q^2 \end{aligned}$$

und $\mu = (q^2, pq, p)$. Somit sieht die stationäre Prämie wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\bar{\pi}(\lambda) &= \mu \cdot \pi \\ &= a q^2 + c(pq + p) \\ &= a q^2 + cp(1 + q) \\ &= a e^{-2\lambda} + c((1 - e^{-\lambda})(1 + e^{-\lambda})) \\ &= a e^{-2\lambda} + c(1 - e^{-2\lambda}).\end{aligned}$$

Dann ist die Effizienz gleich:

$$e(\lambda) = \frac{2\lambda e^{-2\lambda}(c - a)}{a e^{-2\lambda} + c(1 - e^{-2\lambda})}.$$

Übungsaufgabe 6.6.1. Zeigen Sie, dass $e(\lambda) < 1$ für $a < c$ gilt.

Lösung:

Wir wollen nun beweisen, dass $e(\lambda) < 1$ für $a < c$ ist. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}2\lambda e^{-2\lambda}(c - a) &\stackrel{?}{<} a e^{-2\lambda} + c - c e^{-2\lambda} \\ \iff a e^{-2\lambda}(1 + 2\lambda) - c e^{-2\lambda}(1 + 2\lambda) + c &\stackrel{?}{>} 0 \\ \iff (1 + 2\lambda)e^{-2\lambda}(c - a) &\stackrel{?}{<} c \\ \iff (1 + 2\lambda)e^{-2\lambda}\left(1 - \frac{a}{c}\right) &\stackrel{?}{<} 1\end{aligned}$$

Für $a < c$ gilt $1 - \frac{a}{c} < 1$. Wir werden noch zeigen, dass

$$f(\lambda) = (1 + 2\lambda)e^{-2\lambda} \leq 1, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Tatsächlich gilt $f(0) = 1$ und

$$f'(\lambda) = -2e^{-2\lambda} + 2e^{-2\lambda} - 2 \cdot 2\lambda e^{-2\lambda} = -4\lambda e^{-2\lambda} < 0,$$

für $\lambda \geq 0$. Daraus folgt, dass f monoton fallend für $\lambda \geq 0$ ist. Hieraus ergibt sich, dass $f(\lambda) \leq f(0) = 1$. Somit ist

$$f(\lambda)\left(1 - \frac{a}{c}\right) < 1, \quad \forall \lambda \geq 0, a < c.$$

Bemerkung 6.6.1. Wir betrachten einen Effekt, der „Bonushunger“ genannt wird. Angenommen, ein Autofahrer, der sich im Stadium 1 (Superbonusklasse) befindet, verursacht einen Schaden der Höhe u in einem Unfall. Wann ist es für ihn profitabel, den Schaden zu melden? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir die Kosten der beiden kommenden Jahre:

	Kein Schaden im nächsten Jahr ($Y_2 = 0$)	Schäden im nächsten Jahr ($Y_2 = 1$)
Schaden nicht gemeldet ($Y_1 = 0$)	$a + a + u$	$a + c + u$
Schaden gemeldet ($Y_1 = 1$)	$c + c$	$c + c$

Falls der Fahrer rational handelt, so wird er den Schaden nur melden, wenn seine erwarteten Kosten in diesem Fall niedriger sind als die Reparaturkosten und die Superbonusprämien in den nächsten zwei Jahren:

Durchschnittliche Kosten ohne > durchschnittliche Kosten mit
Meldung des Schadens Meldung des Schadens

Dies bedeutet, dass

$$(1 - p)(2a + u) + p(a + c + u) > 2c(p + q) = 2c,$$

was wiederum äquivalent zu

$$u > (2 - p)(c - a) \approx 2(c - a)$$

ist, falls p klein ist. Aus dieser Ungleichung können wir schließen, dass es unklug wäre, sehr kleine Schäden zu melden. Dieses Phänomen, das eine wichtige Rolle in der Praxis spielt, wird der „Bonushunger“ genannt. Auf der einen Seite werden die Prämien des Versicherers niedriger, da der Versicherte nicht zugibt, dass er ein schlechter Fahrer ist. Dies wird aber durch die Tatsache kompensiert, dass kleine Schäden große Handhabungskosten nach sich ziehen können, was durch dieses Verhalten vermieden wird.

Kapitel 7

Schadenreservierung

7.1 Rückstellungen

In der Praxis eines Versicherungsunternehmens gibt es einen Bedarf für *Rückstellungen* des Kapitals verschiedener Arten, die gesetzlich vorgeschrieben sind. Diese sind:

1. Spätschadenrückstellung
2. Schwankungsrückstellung
3. Großschadenrückstellung

Die *Großschadenrückstellung* ist besonders bei versicherten Risiken mit schweren Tails notwendig. Bei *Schwankungsrückstellungen* werden Reserven gebildet, die Risiken mit großer Variabilität decken. In diesem Kapitel gehen wir lediglich auf die *Spätschadenrückstellungen* ein, die notwendig sind, um Schäden zu decken, deren Höhe zur Zeit der Meldung noch nicht definitiv bekannt ist. In der Haftpflichtversicherung etwa kann es durchaus passieren, dass die endgültige Schadenregulierung nach zehn oder mehr Jahren nach der Schadensmeldung auftritt. Sogar in den üblichen Fällen verstreicht immer zwischen dem Eintritt des Schadens und dessen Regulierung eine gewisse Zeit. Dies ist die Bearbeitungszeit zuzüglich der Zeit, die für unabhängige Gutachten des Schadens, Untersuchungen und mögliche Gerichtsverfahren benötigt wird.

Beispiel 7.1.1. *Meldet ein Versicherungsnehmer einen Berufsunfähigkeitschaden an und ist es umstritten, ob er den tatsächlichen Grad der Berufsunfähigkeit erreicht hat, um einen Anspruch auf die Leistungen der Lebensversicherung zu erhalten, so kann die rechtliche Auseinandersetzung zwischen dem Versicherungsunternehmen und dem Versicherungsnehmer mehrere Monate oder Jahre dauern. Das Unternehmen muss trotzdem das notwendige Kapital rückstellen, um eine eventuelle Bezahlung der Leistungen zu*

ermöglichen. Fällt die Entscheidung des Gerichts negativ für den Versicherungsnehmer aus, so wird der reservierte Betrag aufgelöst, und dies erhöht das Geschäftsergebnis der Periode. Sonst bezeichnet man den Ausgang als erfolgsneutral.

Somit muss auf jeden Fall mit Schäden am Ende jeder Geschäftsperiode gerechnet werden, deren Höhen noch unbekannt sind. Diese teilen sich in zwei Gruppen auf:

1. IBNR (incurred but not reported):

Es sind Schäden eingetreten, die dem Versicherungsunternehmen noch nicht bekannt sind, weil sie z. B. vom Versicherten selbst noch nicht bemerkt wurden. Ist mit solchen Schäden zu rechnen, so ist der Versicherer verpflichtet, eine angemessene *IBNR-Schadenreserve* zu bilden.

2. IBNER (incurred (and reported) but not enough reserved):

Dies sind Schäden, die dem Versicherer gemeldet wurden, deren Höhe aber immer noch nicht bekannt ist. Hier ist auf Grund von Erfahrungen (Schäden der vergangenen Jahren) und zusätzlicher verfügbarer Information eine *IBNER-Reserve* zu schätzen und zu stellen, die dazu dient, die später anfallenden Schadenhöhen zu decken. Dazu ist der Versicherer von den Richtlinien der EU gesetzlich verpflichtet. Wurde die Reserve zu hoch geschätzt (z. B. durch den höchstmöglichen Schadensbetrag), so schmälert dies (durch Zuführung zu der Rückstellung) den Jahresgewinn des Versicherers. Somit hat das Finanzamt reges Interesse an nicht überschätzten Rückstellungen, da sonst keine Steuer eingenommen werden kann. Wird dagegen die Reserve zu niedrig geschätzt, kann dies später das Unternehmen zum Bankrott führen, obwohl das vorläufige Jahresergebnis sehr positiv aussehen würde.

Im Folgenden betrachten wir Methoden zur statistischen Schätzung der erwarteten (unbekannten) IBNER-Schadenhöhen. Dadurch wird auch die Höhe der benötigten IBNER-Reserve geschätzt.

7.2 Das Abwicklungsdreieck

Es seien im aktuellen Jahr die Beträge der in den letzten I Jahren abgewickelten Schäden bekannt. Mit $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichnen wir das *Anfalljahr des Schadens*, und mit $k \in \{1, \dots, I\}$ das *Abwicklungsjahr*, gezählt ab dem Anfalljahr: $k = 1$ bedeutet, dass der Schaden noch im Anfalljahr abgewickelt wurde, $k = 2$, dass dazwischen ein Jahr der Regulierung liegt, usw. Im Allgemeinen nehmen wir an, dass alle Schäden nach I Jahren abgewickelt sind ($I =$ maximale Regulierungsdauer).

Sei S_{ik} der Gesamtbetrag der Schäden, die im Jahre i entstanden und nach $k - 1$ Jahren vollständig reguliert sind.

Das jüngste Anfalljahr $i = I$ ist das letzte Jahr (vor dem aktuellen). Von

ihm sind die Schäden bekannt, die in demselben Jahr auch gemeldet worden sind.

Somit entsteht das folgende *Abwicklungsdreieck* für $\{S_{ik}\}$:

			Abwicklungsjahr k						
			↓						
	S_{11}	S_{12}	\cdots	S_{1k}	\cdots	$S_{1,I+1-i}$	\cdots	$S_{1,I-1}$	S_{1I}
	S_{21}	S_{22}	\cdots	S_{2k}	\cdots	$S_{2,I+1-i}$	\cdots	$S_{2,I-1}$	
	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\ddots	
Anfalljahr $i \rightarrow$	S_{i1}	S_{i2}	\cdots	S_{ik}	\cdots	$S_{i,I+1-i}$			
	\vdots	\vdots		\vdots		\ddots			
	$S_{I+1-k,1}$	$S_{I+1-k,2}$	\cdots	$S_{I+1-k,k}$					
	\vdots	\vdots		\ddots					
	$S_{I-1,1}$	$S_{I-1,2}$							
	S_{I1}								

In jeder Spalte stehen Daten für dasselbe Abwicklungsjahr, in jeder Zeile die Daten vom selben Anfalljahr. Somit ist

$$S_i = S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{iI}$$

der *Gesamtschaden für das Anfalljahr i* . Da für $i \geq 2$ von dieser Summe im aktuellen Jahr nur noch die Teilsumme $S_{i1} + S_{i1} + \dots + S_{i,I+1-i}$ bekannt ist, muss die Restsumme

$$R_i = S_{i,I+2-i} + \dots + S_{iI}$$

geschätzt werden. Dies ist der *erforderliche Beitrag vom Jahr i an die Schadenreserve*. Die *gesamte Schadenreserve* ist somit

$$R = \sum_{i=2}^I R_i .$$

Seien alle $S_{ik} \geq 0$ und $E S_{ik}^2 < \infty$. Mit

$$S = \{S_{ik}, 2 \leq i + k \leq I + 1, i, k \in \mathbb{N}\}$$

bezeichnen wir die Gesamtheit der im Abwicklungsdreieck aufgeführten Beiträge.

Bemerkung 7.2.1. *Manchmal werden im Abwicklungsdreieck an Stelle von S_{ik} die akkumulierten Schadensbeträge*

$$C_{ik} = S_{i1} + \dots + S_{ik}$$

betrachtet (z. B. im Abschnitt § 7.4).

Das Ziel der folgenden Abschnitte ist es, ER_i aus der Stichprobe S zu schätzen und somit $ER = \sum_{i=2}^I ER_i$, wobei die einzelnen ER_i unbekannt sind. Ein theoretisches Hilfsmittel liefert das folgende

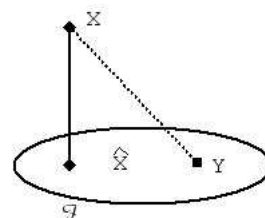
Lemma 7.2.1 (Projektionssatz). *Für eine beliebige Zufallsvariable X und eine σ -Algebra \mathfrak{F} , sei Y eine \mathfrak{F} -messbare Schätzung von X (d.h., eine \mathfrak{F} -messbare Zufallsvariable). Dann hat die beste Schätzung \hat{X} (im mittleren quadratischen Sinne)*

$$\hat{X} = \arg \min_{Y-\mathfrak{F}\text{-messbar}} E[(X - Y)^2 | \mathfrak{F}]$$

folgende Form:

$$\hat{X} \stackrel{\text{def}}{=} Pr_{\mathfrak{F}}X = E[X | \mathfrak{F}].$$

Hierbei ist $Pr_{\mathfrak{F}}X$ die Projektion von X auf \mathfrak{F} . Dieser Schätzer ist erwartungstreu.



Beweis. Falls Y \mathfrak{F} -messbar ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} & E[(X - Y)^2 | \mathfrak{F}] \\ &= E[X^2 - 2XY + Y^2 | \mathfrak{F}] \\ &= E[X^2 | \mathfrak{F}] - 2YE[X | \mathfrak{F}] + Y^2 \\ &= E[X^2 | \mathfrak{F}] - (E[X | \mathfrak{F}])^2 + (E[X | \mathfrak{F}])^2 - 2YE[X | \mathfrak{F}] + Y^2 \\ &= \text{Var}(X | \mathfrak{F}) + (E[X | \mathfrak{F}] - Y)^2. \end{aligned}$$

Diese Größe ist minimal, falls aus $E[X | \mathfrak{F}] = Y$ folgt, dass $\hat{X} = E[X | \mathfrak{F}]$. Aus den Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes folgt, dass

$$E\hat{X} = E[E[X | \mathfrak{F}]] = EX.$$

□

Bemerkung 7.2.2. *Somit haben wir bewiesen, dass*

$$E((X - Y)^2 | \mathfrak{F}) = \text{Var}(X | \mathfrak{F}) + (Y - E(X | \mathfrak{F}))^2 \quad (7.2.1)$$

für alle \mathfrak{F} -messbaren Zufallsvariablen Y gilt. Man kann also den Fehler $E((X - Y)^2 | \mathfrak{F})$ in den Zufallsfehler $\text{Var}(X | \mathfrak{F})$ und den systematischen Schätzfehler $(Y - E(X | \mathfrak{F}))^2$ zerlegen. Lemma 7.2.1 kann als Projektionssatz interpretiert werden, falls $\mathfrak{F} = \sigma(\{Z_i\})$ ist, d.h. falls die σ -Algebra \mathfrak{F} von einer Klasse von Zufallsvariablen $\{Z_i\}$ erzeugt wird. Dann ist \hat{X} die „Projektion“ von X auf die Menge aller Zufallsvariablen, die von $\{Z_i\}$ abhängig

sind.

Dabei spielt \mathfrak{F} die Rolle der Information, die uns für die Schätzung von X bereitgestellt wurde. Da $E[X | \mathfrak{F}] = \varphi(\mathfrak{F})$ ist, hängt der Zufallsfehler nicht von Y ab.

In unserem Fall sei $\mathfrak{F} = \sigma(S)$. Dann ist $\hat{R}_i = E(R_i | \mathfrak{F})$ ein *minimaler erwartungstreuer Schätzer von ER_i* . Später werden wir einfach $E(R_i | S)$ statt $E(R_i | \sigma(S))$ schreiben. Genauso durch Lemma 7.2.1 (oder durch die Linearität von des Erwartungswertes) ist

$$\hat{R} = E(R | S) = \sum_{i=2}^I \hat{R}_i$$

ein *minimaler erwartungstreuer Schätzer von ER* .

In der Praxis ist es aber nicht einfach, $E(R | S)$ explizit darzustellen und zu berechnen. Deshalb gibt es andere Verfahren, die die Schätzung von ER ermöglichen.

7.3 Schätzung der erwarteten Schäden: ein verteilungsfreies Verfahren

Sei $v_i, i = 1, \dots, I$ die Anzahl der gemeldeten Schäden im Jahr i (das Volumen vom Jahr i). Wir nehmen an, dass folgende Voraussetzungen gelten:

1. Für alle $i = 1, \dots, I$ sind die Zufallsvektoren (S_{i1}, \dots, S_{iI}) unabhängig (für verschiedene Anfalljahre i)
2. $ES_{ik} = m_k v_i$ oder $E \left[\frac{S_{ik}}{v_i} \right] = m_k, \quad \forall 1 \leq i, k \leq I$
3. $Var S_{ik} = S_k^2 v_i$ oder $Var \left[\frac{S_{ik}}{v_i} \right] = \frac{S_k^2}{v_i}, \quad \forall 1 \leq i, k \leq I$

Unser Ziel ist es, die Parameter m_k und S_k^2 zu schätzen.

Aus 2) folgt für die Summe über alle S_{ik} im Abwicklungsjahr k , d. h. für die Summe über einer Spalte im Abwicklungsdreieck, dass

$$\sum_{i=1}^{I+1-k} ES_{ik} = \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i m_k = m_k \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i.$$

Somit ist

$$\hat{m}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{I+1-k} v_i}$$

ein erwartungstreuer Schätzer für m_k .

Falls zusätzlich alle S_{ik} , $\forall 1 < i, k \leq I$ unabhängig sind, so ist die Stichprobenvarianz

$$\begin{aligned}\widehat{S}_k^2 &= \frac{1}{(I-k+1)-1} \sum_{i=1}^{I+1-k} (v_i S_{ik} - v_i^2 \widehat{m}_k)^2 \\ &= \frac{1}{I-k} \sum_{i=1}^{I+1-k} v_i \left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \widehat{m}_k \right)^2\end{aligned}$$

der Stichprobe

$$\left(\frac{S_{1k}}{\sqrt{v_1}}, \dots, \frac{S_{I+1-k}}{\sqrt{v_{I+1-k}}} \right)$$

ein *erwartungstreuer Schätzer* für S_k^2 , wie es aus der klassischen Statistik bekannt ist. Es folgt daraus, dass laut 3)

$$S_k^2 = v_i \text{Var} \left(\frac{S_{ik}}{v_i} \right) = \text{Var} \left(\frac{S_{ik}}{\sqrt{v_i}} \right).$$

Somit ergibt sich ein erwartungstreuer Schätzer für $E R_i$:

$$\widehat{R}_i = \sum_{k=I+2-i}^I E[\widehat{S}_{ik}|v_i] \cdot v_i = v_i \cdot \sum_{k=I+2-i}^I \widehat{m}_k,$$

wobei \widehat{R}_i ein Schätzer von

$$R_i = E \left[\sum_{k=I+2-i}^I S_{ik} \right]$$

ist. Falls alle S_{ik} unabhängig sind, so ist R_i unabhängig von S und somit $E(R_i | S) = E R_i$ und $\text{Var}(R_i | S) = \text{Var} R_i$. Dann bekommt die Formel (7.2.1) die folgende Gestalt:

$$E \left[(R_i - \widehat{R}_i)^2 \mid S \right] = \text{Var} R_i + (E R_i - \widehat{R}_i)^2,$$

und der *minimale Schätzer* für $E R_i$ ist

$$\widehat{\widehat{R}}_i = E R_i = E \widehat{R}_i.$$

Wie früher ist

$$\widehat{R} = \sum_{i=2}^I \widehat{R}_i = \sum_{i=2}^I v_i \sum_{k=I+2-i}^I \widehat{m}_k.$$

7.4 Das Chain-Ladder-Verfahren

Aus den Voraussetzungen 1) - 3) folgt, dass z. B. der akkumulierte, volumenbezogene Schaden

$$\frac{C_{iI}}{v_i} = \frac{S_{i1} + \dots + S_{iI}}{v_i}$$

für alle Anfalljahre i denselben Erwartungswert $m_1 + \dots + m_I$ besitzt.

In diesem Abschnitt werden wir eine allgemeinere Situation betrachten, in der C_{iI} einen individuellen Erwartungswert besitzen kann. Dabei verzichten wir auf die Betrachtung von v_i . Schreiben wir den Gesamtschaden $C_{iI} = S_{i1} + \dots + S_{iI}$ in der multiplikativen Form um:

$$C_{iI} = C_{i1} \cdot \theta_{i1} \cdot \theta_{i2} \cdot \dots \cdot \theta_{i,I-1},$$

wobei

$$\theta_{ik} = \frac{C_{ik+1}}{C_{ik}} = 1 + \frac{S_{i,k+1}}{C_{ik}} \geq 1$$

den multiplikativen Zuwachs von C_{ik} vom Abwicklungsjahr k zu $k+1$ bezeichnet (alles für das Anfalljahr i).

Die zentrale Annahme dieses Abschnitts besteht darin, dass die Aufteilung des Gesamtschadens C_{iI} auf die Abwicklungsjahre im Mittel für alle Anfalljahre gleich ist:

$$E \theta_{ik} = \theta_k, \quad 1 \leq i \leq I, \quad 1 \leq k \leq I-1.$$

Dabei ist θ_k die mittlere Steigerung von C_{iI} vom Abwicklungsjahr k zu $k+1$. Das Ziel ist es, die Parameter θ_k zu schätzen, falls C_{ik} bekannt sind, und daraus einen Schätzer für R_i zu bekommen. Das sogenannte *Chain-Ladder-Verfahren* bietet folgenden Schätzer für θ_k an:

$$\hat{\theta}_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik} \theta_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}}, \quad \forall k \in \{1, \dots, I-1\}. \quad (7.4.1)$$

Dies ist die Summe über alle Anfalljahre i bis zum vorletzten möglichen Anfalljahr (d. h. eine Spalte k ohne den letzten Eintrag) aus dem Abwicklungsdreieck betrachtet, da im Zähler die Summe über die volle Spalte $k+1$ steht.

Dies ist die gewichtete Summe von C_{ik} , $i = 1, \dots, I-k$. Dann ist

$$\hat{C}_{iI} = C_{i,I+1-i} \cdot \hat{\theta}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{\theta}_{I-1}, \quad 2 \leq i \leq I \quad (7.4.2)$$

ein geeigneter Schätzer für EC_{iI} , dem erwarteten Gesamtschaden vom Anfalljahr i und somit

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{iI} - \hat{C}_{i,I+1-i} = C_{i,I+1-i} \left(\hat{\theta}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{\theta}_{I-1} - 1 \right) \quad (7.4.3)$$

In der Schätzung von ER_i wird somit implizit angenommen, dass die Reserve nur vom letzten akkumulierten Schaden $C_{i,I+1-i}$ und nicht von den akkumulierten Schäden $C_{i1}, \dots, C_{i,I-i}$ abhängt.

Bisher haben wir noch nichts über die Eigenschaften der Schätzer (7.4.1)-(7.4.2) ausgesagt. Dafür braucht man folgende zusätzliche Modellannahmen.

1. Die akkumulierten Schäden C_{ik} genügen dem Gleichungssystem

$$E(\theta_{ik} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}) = E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}\right) = \theta_k,$$

falls $C_{ik} > 0, \forall 1 \leq i \leq I, 1 \leq k \leq I-1$.

2. Die Zufallsvektoren (C_{i1}, \dots, C_{iI}) sind unabhängig für alle Anfalljahre $i, 1 \leq i \leq I$.

Bemerkung 7.4.1. *Bedingung 1) ist z. B. erfüllt, falls die Zufallsvariablen $C_{i1}, \theta_{i1}, \dots, \theta_{i,I-1}$ voneinander unabhängig sind. In der Tat gilt:*

$$\begin{aligned} E(\theta_{ik} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik}) &= E\left(\theta_{ik} \mid C_{i1}, \frac{C_{i2}}{C_{i1}}, \frac{C_{i3}}{C_{i2}}, \dots, \frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}}\right) \\ &= E(\theta_{ik} \mid C_{i1}, \theta_{i1}, \dots, \theta_{i,k-1}) \\ &= E(\theta_{ik}) = \theta_k, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Unabhängigkeit der θ_{ik} gilt.

Satz 7.4.1. *Falls die Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind, dann gilt folgendes:*

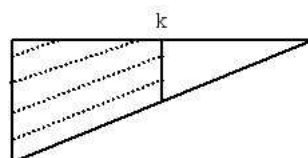
1. Die in (7.4.1) gegebenen Schätzer $\hat{\theta}_k$ sind für alle $1 \leq k \leq I-1$ erwartungstreu.
2. Die Schätzer $\hat{\theta}_{I+1-i}, \dots, \hat{\theta}_{I-1}$ sind unkorreliert:

$$E\left(\hat{\theta}_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \hat{\theta}_{I-1}\right) = \theta_{I+1-i} \cdot \dots \cdot \theta_{I-1}.$$

Beweis. Bezeichnen wir durch C_k den Zufallsvektor

$$C_k = (C_{ij}, j \leq k, i+j \leq I+1), \quad \forall 1 \leq k \leq I.$$

Es ist der Teil des Abwicklungsdreiecks, der links von der Spalte k (Spalte k inklusive) steht:



1. Wir müssen $E \hat{\theta}_k = \theta_k$ beweisen. Wir werden sogar mehr beweisen:

$$E \left(\hat{\theta}_k \mid C_k \right) = \theta_k .$$

Daraus folgt sofort, dass

$$E \hat{\theta}_k = E \left[E \left(\hat{\theta}_k \mid C_k \right) \right] = E \theta_k = \theta_k .$$

Beginnen wir nun mit dem Beweis:

$$\begin{aligned} E \left[\hat{\theta}_k \mid C_k \right] &= \sum_{i=1}^{I-k} E \left[\frac{C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} \mid C_k \right] \\ &= \sum_{i=1}^{I-k} E [C_{i,k+1} \mid C_k] \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} \\ &= \sum_{i=1}^{I-k} E \left(\underbrace{\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}}_{=\theta_{ik}} \mid C_{i1}, \dots, C_{ik} \right) \cdot C_{ik} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} \\ &\stackrel{\text{Bed.1)}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{I-k} \theta_k C_{ik}}{\sum_{i=1}^{I-k} C_{ik}} = \theta_k . \end{aligned}$$

Bei der ersten Gleichheit wird über die Spalte $k + 1$ aufsummiert, wobei die Einträge dieser Spalte nicht im Zufallsvektor C_k enthalten sind. Zusätzlich wird bei der ersten und zweiten Gleichheit über die Spalte k aufsummiert, wobei die Einträge dieser Spalte in C_k enthalten sind. Daraus folgt die Messbarkeit bzgl. C_k .

2. Es gilt:

$$\begin{aligned} E \left(\hat{\theta}_{I+1-i} \cdots \hat{\theta}_{I-1} \right) &= E \left[E \left(\hat{\theta}_{I+1-i} \cdots \hat{\theta}_{I-1} \mid C_{I-1} \right) \right] \\ &= E \left(\hat{\theta}_{I+1-i} \cdots \hat{\theta}_{I-2} \cdot E \left(\hat{\theta}_{I-1} \mid C_{I-1} \right) \right) \\ &= E \left(\hat{\theta}_{I+1-i} \cdots \hat{\theta}_{I-2} \cdot \theta_{I-1} \right) \\ &= \theta_{I-1} E \left(\hat{\theta}_{I+1-i} \cdots \hat{\theta}_{I-2} \right) , \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit aufgrund der C_{I-1} -Messbarkeit von $\hat{\theta}_{I+1-i}, \dots, \hat{\theta}_{I-2}$ gilt. So ergibt sich die Aussage nach Induktion, weil $\hat{\theta}_{I+1-i}, \dots, \hat{\theta}_{I-3}$ C_{I-2} -messbar sind, usw.

□

Kapitel 8

Rückversicherung

Aus verschiedenen Gründen möchte ein Versicherer einen Teil des von ihm versicherten Risikos X an einen Policenhalter oder an einen Zweitversicherer weiterleiten:

$$X = X_S + X_R,$$

wobei X_S den Anteil an dem Risiko X bezeichnet, den der Versicherer bzw. der Versicherungsnehmer selbst tragen muss. Der Anteil X_S wird *Selbstbehalt* und X_R der *rückversicherte Anteil* genannt. Aus mathematischer Sicht unterscheiden sich das Modell der Risikoteilung zwischen dem Policenhalter/Versicherungsnehmer und dem Versicherer und das Modell, bei dem das Risiko zwischen einem Erst- und Zweitversicherer aufgeteilt wird, nicht, und deshalb werden diese zusammen ohne Unterschiede behandelt.

Im Folgenden werden die Gründe, Formen und Eigenschaften der Risikoteilung untersucht.

8.1 Formen der Risikoteilung

Im Allgemeinen unterscheiden wir zwei Hauptformen der Risikoteilung:

1. Proportionale Risikoteilung:

Für jedes Risiko $X = cX + (1-c)X$ gilt: $X_S = cX$ und $X_R = (1-c)X$, wobei $c \in (0, 1)$ der *Proportionalitätsfaktor* genannt wird.

2. Nichtproportionale Risikoteilung:

Sei $X = X_S + X_R$, wobei $X_S = \min\{X, M\}$ das sogenannte *Erstrisiko* und $X_R = \max\{X - M, 0\}$ das sogenannte *Zweitrisiko* sei. Die Konstante $M > 0$ wird *Selbstbehaltsgrenze* oder *Priorität* genannt. Diese Art der Risikoteilung ist offensichtlich nicht proportional.

8.1.1 Risikoteilung „Versicherungsnehmer – Versicherer“

Es können die folgenden Gründe für diese Art der Risikoteilung aufgeführt werden:

1. *Ausschluss von Kleinschäden*: Somit vermeidet der Versicherer die Situation, dass der Verwaltungsaufwand größer als die Schadenssumme wird.
2. *Beeinflussung des Verhaltens des Versicherungsnehmers*: Wie ein Beispiel aus der Autoversicherung zeigt, wird ein Versicherungsnehmer vorsichtiger fahren, wenn seine/ihre Versicherungspolice in der Vollkaskoversicherung einen Selbstbehalt von 300-400 Euro vorsieht. Ähnliches gilt, wenn durch die Einführung eines Selbsthalts in der Krankenversicherung unnötige Dienstleistungen vermieden werden können.

Hier gibt es folgende Formen der proportionalen Risikoteilung:

1. *Prozenttarife*: Diese kommen oft in der Krankenversicherung, besonders bei zahntechnischen Behandlungen vor (z. B. Zahnersatz).
2. *Unterversicherung*: In der Hausratversicherung werden $x\%$ des Schadens vom Versicherer übernommen, falls die Versicherungssumme $x\%$ des Gesamtwertes des Hausrates bildet.
3. *Mitversicherung*: Diese deckt oft sehr große Industrieschäden ab, die auf verschiedene Anteile aufgespalten und von verschiedenen Versicherungsunternehmen versichert werden.

Bei der nichtproportionalen Risikoteilung gibt es die folgenden Formen:

1. *Franchise*: Diese tritt häufig in der Kfz-Vollkasko-Versicherung auf und ist ein anderer Name für den Selbstbehalt M . In der *Abzugsfranchise* bedeutet M , dass der Versicherte $X_S = \min\{X, M\}$ selbst tragen muss. Bei der *Integralfranchise* wird im Gegensatz dazu das gesamte Risiko X vom Versicherer abgedeckt, falls $X > M$, d. h.

$$X_R = \begin{cases} X, & X > M \\ 0, & X \leq M \end{cases} \quad \text{und} \quad X_S = X - X_R.$$

2. *Jahresfranchise*: In diesem Fall bezieht sich der Selbstbehalt nicht auf die Einzelschäden, sondern auf die Summe der Schäden eines Jahres. Sie kommt häufig in der Krankenversicherung bei ambulanten Behandlungen vor.
3. *Jahreslimits*: Eine Franchise kann zwar einen maximalen Selbstbehalt definieren, aber die Häufigkeit der Schäden wird nicht berücksichtigt.

Wenn wir einen Jahreslimit S einführen, so beschränken wir die Verbindlichkeit des Policenhalters auf X_S , wobei der jährliche Selbstbehalt

$$X_S = \min \left\{ S, \sum_{i=1}^N \min\{X_i, M\} \right\},$$

auf der Basis der Einzelschäden X_1, \dots, X_N eines Jahres und der Franchise M berechnet wird.

4. *Erstrisikodeckung*: Diese Form beschränkt die Verbindlichkeit des Versicherers auf einen maximalen Verlustwert h . Ein übliches Beispiel ist die Haftpflichtversicherung. In den meisten Fällen liegt diese Grenze sehr hoch. Somit schützt die Erstrisikodeckung den Versicherer vor zu hohen Risiken und führt zu einer Verbesserung der Kalkulation der Prämien und der Übersichtlichkeit des Portfolios.

8.1.2 Risikoteilung „Erstversicherer – Rückversicherer“

Gründe für eine Rückversicherung können sein:

1. Verringerung des eigenen Risikos
2. Erhöhung der Kapazitäten des Versicherungsunternehmens
3. Ersatz für die Erhöhung der Anfangskaptialreserve und/oder der Prämien

Sei X der Gesamtschaden im individuellen, kollektiven oder zusammengesetzten, kollektiven Modell. Im zusammengesetzten, kollektiven Modell werden die Einzelschäden, die zu einem Ereignis gehören, zusammengefasst. Die Hauptformen der proportionalen Rückversicherung sind:

1. *Quoten-Rückversicherung (Quota-share reinsurance)*: Dies ist die älteste Form der Rückversicherung. Diese proportionale Rückversicherung wird auf den Gesamtschaden und auf die Prämien angewandt:

$$\begin{aligned} X_S &= cX & \text{und} & & X_R &= (1 - c)X \\ \pi_S &= c\pi & \text{und} & & \pi_R &= (1 - c)\pi, \quad c \in (0, 1) \end{aligned}$$

Der Faktor $1 - c$ wird *Quote* genannt, wobei c häufig als $c = \frac{M}{v}$ definiert wird. M ist der Selbstbehalt des Erstversicherers und v die Versicherungssumme. Die Quoten-Rückversicherung tritt häufig in der KFZ-Haftpflicht, KFZ-Kasko-, Kredit-, Hagel-, Sturm-, Feuer-, und Transportversicherung auf.

2. *Summenexzedenten-Rückversicherung (Surplus reinsurance)*: Wir nehmen an, dass die Versicherungswerte der versicherten Objekte in einem individuellen Modell gegeben sind. Die Risiken U_i werden vollständig vom Erstversicherer beglichen, falls $v_i \leq M$, wobei M das *erste Maximum* genannt wird. Im Fall $v_i > M$ wird vom Erstversicherer der Anteil $\frac{M}{v_i}U_i$ und vom Rückversicherer $\frac{v_i-M}{v_i}U_i$ getragen. Somit ergibt sich:

$$X_S = \sum_{i=1}^n c_i U_i, \quad \text{und} \quad X_R = \sum_{i=1}^n (1 - c_i) U_i, \quad \text{wobei } c_i = \min \left\{ \frac{M}{v_i}, 1 \right\}$$

Manchmal definiert der Rückversicherer den Maximalbetrag mM je Police, $m \geq 1$, den er im Schadensfall übernimmt. In diesem Fall haben wir

$$X_R = \sum_{i=1}^n \min \left\{ 1 - c_i, \frac{mM}{v_i} \right\} U_i.$$

Beispiel 8.1.1. *In der Lebensversicherung gilt manchmal $v_i = 2v$, wobei v die Versicherungssumme ist.*

Wir betrachten nun Formen der nichtproportionalen Rückversicherung:

1. *Einzelschadensexzedenten-Rückversicherung (Excess-of-loss reinsurance, WXL)*: Im kollektiven Modell haben wir für $X = \sum_{i=1}^N U_i$:

$$X_S = X - X_R \quad \text{und} \quad X_R = \sum_{i=1}^N \min \{ \max \{ U_i - M, 0 \}, h \}$$

mit Selbstbehalt M und Haftungsgrenze h . In der klassischen Variante ist $h = \infty$, und somit erhalten wir für X_S :

$$X_S = \sum_{i=1}^N \min \{ U_i, M \}.$$

Die Summe $h + M$ wird *Plafond* genannt und beschreibt die Kapazität eines Versicherungsvertrags. Diese Form der Rückversicherung tritt in annähernd denselben Versicherungssparten wie die Quoten-Rückversicherung auf. Für den Fall $h = \infty$ wird sie aber in Deutschland so gut wie nicht mehr verwendet. Wenn dieses Rückversicherungsmodell in ein zusammengesetztes, kollektives Modell übertragen wird, so wird diese *Kumulschadensexzedenten-Rückversicherung (Catastrophe excess-of-loss reinsurance, CAT-XL)* genannt.

2. *Jahresüberschaden-Rückversicherung (stop-loss reinsurance, SL)*: Sie wird oft angewandt, wenn die Ursachen für die Schäden in der CAT-XL nicht zugeordnet werden können.

$$X_S = X - X_R \quad \text{und} \quad X_R = \min \{ \max \{ X - M, 0 \}, h \}.$$

Bei $h = \infty$ bekommen wir die Form $X_S = \min\{X, M\}$. Der Selbstbehalt M wird hier manchmal auch der *Stop-Loss-Punkt* genannt. Diese Form der Rückversicherung wird meistens in der Sturm- und Hagelversicherung und eher weniger in der Feuerversicherung verwendet. Im Allgemeinen kommt sie ziemlich selten zum Einsatz.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Formen besteht darin, dass bei der SL-Rückversicherung nicht nur die Schäden mit schweren Tails vom Rückversicherer übernommen werden, sondern auch große Häufungen von Kleinschäden. Somit berücksichtigt die SL-Form auch die Schadenfrequenz.

8.2 Bedarf für Risikoteilung

Wie kann ein Versicherungsunternehmen den Bedarf für Risikoteilung feststellen? Es gibt verschiedene Merkmale des Portfolios, nach deren Beobachtung der Versicherer sich für die Risikoteilung entscheiden würde. Zwei von ihnen werden wir jetzt näher betrachten:

1. Ruinwahrscheinlichkeiten
2. Stabilität des Portfolios

8.2.1 Erhaltung der Ruinwahrscheinlichkeiten

Sei $R(t) = u + \pi(t) - X(t)$, die Risikoreserve für ein Portfolio mit Startkapital u , Prämien $\pi(t)$ und Gesamtschaden $X(t)$. Angenommen, das Portfolio hätte die folgende Ruinwahrscheinlichkeit:

$$P \left\{ \inf_{t \in [0, T]} R(t) < 0 \right\} \leq 0,0005.$$

Falls das Portfolio um ein Risiko $X_1(t)$ erweitert werden soll, ist der Versicherer dazu verpflichtet, eine gute Schadensdeckung für $X(t) + X_1(t)$ zu gewährleisten. Um die Gutartigkeit der Deckung mit Hilfe der Ruinwahrscheinlichkeit

$$P \left\{ \inf_{t \in [0, T]} R_1(t) < 0 \right\}$$

für

$$R_1(t) = u + \Pi(X(t) + X_1(t)) - X(t) - X_1(t)$$

zu messen, müssen wir fordern, dass

$$P \left\{ \inf_{t \in [0, T]} R_1(t) < 0 \right\} \leq 0,0005.$$

Falls $X_1(t)$ ein gefährliches Risiko ist (d. h., es hat schwere Tails), so kann die obige Grenze für die Ruinwahrscheinlichkeit eingehalten werden, wenn

das Anfangskapital u oder die Prämien erhöht werden. Aus gesetzlichen Gründen können allerdings die Prämien von bestehenden Verträgen nicht erhöht werden, solange keine Notsituation vorliegt. Im letztgenannten Fall muss die Aufsichtsbehörde einer Prämienhöhung zustimmen. Wenn das Anfangskapital nicht erhöht werden kann, so ist die Rückversicherung eine attraktive Alternative. Somit kann die Ruinwahrscheinlichkeit des Portfolios als Maß für den Bedarf einer Rückversicherung dienen.

8.2.2 Die Stabilität des Portfolios

Betrachten wir eine Zeitspanne von einem Geschäftsjahr: $t = 1$. Sei $X = X(1)$, $\pi = \pi(1)$, $R = R(1)$ und $\sigma = \sqrt{\text{Var } X}$.

Definition 8.2.1. Ein Portfolio heißt λ -stabil, falls

$$E R \geq \lambda \sigma$$

gilt. Der Ausdruck

$$A(\lambda) = E R - \lambda \sigma$$

heißt absolute λ -Stabilität und

$$Q(\lambda) = \frac{E R}{\lambda \sigma} = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

die relative λ -Stabilität, wobei $E R = \lambda' \sigma$ erfüllt sein muss.

Somit ist das Portfolio λ -stabil, falls $A(\lambda) \geq 0$ oder $Q(\lambda) \geq 1$. Angenommen, unser Portfolio sei λ -stabil. Das Ziel des Aktuars ist es, die λ -Stabilität auch für ein erweitertes Portfolio zu erhalten, d. h. $A_1(\lambda) \geq 0$ für $A_1(\lambda) = E R_1 - \lambda \sigma_1$ mit

$$R_1 = u + \pi + \pi_1 - X - X_1 \quad \text{und} \quad \sigma_1 = \sqrt{\text{Var } X + \text{Var } X_1},$$

falls das Risiko X_1 mit der Prämie π_1 versichert wurde. Sei X_1 unabhängig von X und die Prämienkalkulation additiv. Dann können wir die Forderung $A_1(\lambda) \geq 0$ auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} 0 &\leq E(u + \pi + \pi_1 - X - X_1) - \lambda \sqrt{\text{Var } X + \text{Var } X_1} \\ &= E R + E(\pi_1 - X_1) - \lambda \sqrt{\sigma^2 + \text{Var } X_1}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\underbrace{E R - \lambda \sigma}_{=A(\lambda) \geq 0} + E(\pi_1 - X_1) - \lambda \underbrace{\sqrt{\sigma^2 + \text{Var } X_1}}_{\sigma_1} \geq -\lambda \sigma.$$

Eine hinreichende Bedingung hierfür ist

$$\begin{aligned}
 & E(\pi_1 - X_1) - \lambda\sigma_1 \geq -\lambda\sigma \\
 \Leftrightarrow & (E(\pi_1 - X_1) + \lambda\sigma)^2 \geq \lambda^2\sigma_1^2 \\
 \Leftrightarrow & E(\pi_1 - X_1)^2 + 2\lambda\sigma E(\pi_1 - X_1) + \lambda^2\sigma^2 \geq \lambda^2\sigma^2 + \lambda^2\text{Var } X_1 \\
 \Leftrightarrow & \lambda^2\text{Var } X_1 - 2\lambda\sigma E(\pi_1 - X_1) - E(\pi_1 - X_1)^2 \leq 0 \quad (8.2.1)
 \end{aligned}$$

Die obige Ungleichung zeigt, dass die λ -Stabilität des erweiterten Portfolios nur durch die Änderung der Prämie π_1 garantiert werden kann. Da aber π_1 nicht beliebig erhöht werden kann (vgl. 8.2.1), bietet die Rückversicherung einen attraktiven Ausweg.

Bemerkung 8.2.1. *Offensichtlich kann die relative λ -Stabilität auch als Maß für den Bedarf einer Rückversicherung dienen.*

8.3 Eigenschaften der Risikoteilung

Indem wir die Risiken in die Anteile für den Erstversicherer und den Rückversicherer aufspalten, ändern wir deren Verteilungen. Somit werden auch die Verteilungen der Schadenanzahl und der Gesamtschadenhöhe geändert. Dies führt ebenfalls zu Auswirkungen auf die Prämienkalkulation, und deswegen ist es notwendig, die Änderungen dieser Risiken zu beobachten.

8.3.1 Proportionale Verträge

Die Verteilungen des Selbstbehalts und des rückversicherten Anteils ändern sich nicht maßgeblich, sondern sind nur eine skalierte Version des Originals. Für einen Proportionalitätsfaktor $c \in (0, 1)$ erhalten wir:

X_S	X_R
$P(X_S \leq x) = P(cX \leq x)$	$P(X_R \leq x) = P((1-c)X \leq x)$
$= P\left(X \leq \frac{x}{c}\right) = F_X\left(\frac{x}{c}\right)$	$= F_X\left(\frac{x}{1-c}\right)$
$E X_S = E(cX) = cE X$	$E X_R = (1-c)E X$
$\text{Var } X_S = c^2 \text{Var } X$	$\text{Var } X_R = (1-c)^2 \text{Var } X$
$E X_S^k = c^k E X^k, k \in \mathbb{N}$	$E X_R^k = (1-c)^k E X^k, k \in \mathbb{N}$

(8.3.1)

Der *Variationskoeffizient* cv und die *Schiefte* (coefficient of skewness) cs

ändern sich nicht:

$$cv(X) \stackrel{def}{=} \frac{\sqrt{Var X}}{E X} = cv(X_R) = cv(X_S)$$

$$cs(X) \stackrel{def}{=} \frac{E (X - E X)^3}{(\sqrt{Var X})^3} = cs(X_S) = cs(X_R).$$

Die Schiefe charakterisiert den Unterschied zwischen der Verteilung von X und der Standardnormalverteilung. Sei $Y \sim N(0, 1)$, dann gilt: $cs(Y) = 0$ und je größer $|cs(X)|$ ist, desto weniger kann X mit einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen modelliert werden. Eine weitere Charakteristik dieser Art ist der *Exzesskoeffizient*

$$\gamma_2 = \frac{E (X - E X)^4}{(Var X)^2} - 3.$$

Für $Y \sim N(0, 1)$ gilt $\gamma_2 = 0$.

Die obigen Beziehungen (8.3.1) sind auf Verträge der Quoten-Versicherung direkt übertragbar.

Im Fall der Summenexzedenten-Rückversicherung fassen wir die Versicherungssumme v_i als eine Zufallsvariable V_i auf und für

$$c_i = \min \left\{ \frac{M}{V_i}, 1 \right\}$$

erhalten wir

$$X_S = \sum_{i=1}^n \min \left\{ \frac{M}{V_i}, 1 \right\} U_i = \sum_{i=1}^n \min \{M, V_i\} Y_i,$$

wobei $Y_i = \frac{U_i}{V_i}$ der *Schadengrad* heißt. Das k -te Moment der Einzelsummanden ist gleich

$$\begin{aligned} E \left([\min\{M, V_i\} Y_i]^k \right) &= E \left(E \left([\min\{M, V_i\} Y_i]^k \mid V_i \right) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \min\{M, y\}^k E \left(Y_i^k \mid V_i = y \right) dF_{V_i}(y) \end{aligned}$$

für $i \in \mathbb{N}$. Falls V_i und Y_i unabhängig sind, so folgt daraus, dass

$$E \left(\min\{M, V_i\} Y_i \right)^k = E \left(\min\{M, V_i\} \right)^k \cdot E Y_i^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

8.3.2 Nichtproportionale Verträge

Betrachten wir für ein Portfolio im kollektiven Modell mit einer Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung (XL) die Schadenanzahl N und die Schadenhöhen U .

1. *Auswirkung der Risikoteilung auf N*

Sei N_S die Anzahl der Selbstbehalte U_{i_S} und N_R die Anzahl der Risiken des Rückversicherers. Offensichtlich gilt:

$$N_S = N \quad \text{und} \quad N_R = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}(U_i > M).$$

Dies kann als eine zusammengesetzte Verteilung von bernoulliverteilten Komponenten interpretiert werden. Der Parameter der Bernoulli-Verteilung ist

$$p_M = P(U_i > M) = 1 - F_U(M) = \bar{F}_U(M).$$

Daher ergibt sich aus Folgerung 4.3.1, dass

$$\begin{aligned} E N_R &= p_M \cdot E N \quad \text{und} \\ \text{Var } N_R &= p_M^2 \cdot \text{Var } N + E N \cdot p_M(1 - p_M). \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} P(N_R = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}(U_i > M) = k \mid N = n\right) P(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p_M^k (1 - p_M)^{n-k} P(N = n), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit mit der Binomialverteilung folgt.

Übungsaufgabe 8.3.1. *Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:*

- Falls $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, dann gilt $N_R \sim \text{Poisson}(\lambda p_M)$.
- Falls N eine gemischte Poisson-Verteilung hat, so hat dies auch N_R .
- Falls $N \sim \text{NB}\left(r, \frac{\alpha}{\theta + \alpha}\right)$ mit $0 < \alpha, \theta < 1$, dann ist

$$N_R \sim \text{NB}\left(r, \frac{\alpha p_M}{\theta + \alpha p_M}\right)$$

2. *Charakteristiken der Selbstbehalte U_S*

Es gilt:

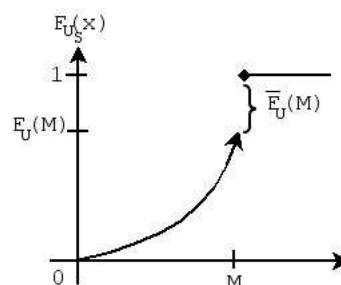
$$\begin{aligned} F_{U_S}(x) &= P(U_S \leq x) \\ &= \begin{cases} P(U \leq x), & x < M \\ P(M \leq x) = 1, & x \geq M \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_U(x), & x < M \\ 1, & x \geq M \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $U \stackrel{d}{=} U_i$ die generierte Zufallsvariable für die Risiken U_i ist.

Da

$$U_S = \begin{cases} M, & U > M \\ U, & U \leq M \end{cases}$$

hat die Verteilung von U_S ein Atom $p_M = P(U > M) = \overline{F}_U(M)$ in M .



Lemma 8.3.1. Sei $F_U(0) = 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$E U_S^k = \int_0^M kx^{k-1}(1 - F_U(x)) dx.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} E U_S^k &= \int_0^\infty \min\{x, M\}^k dF_U(x) \\ &= \int_0^M x^k dF_U(x) + M^k \int_M^\infty dF_U(x) \\ &= x^k F_U(x) \Big|_0^M - \int_0^M kx^{k-1} F_U(x) dx + M^k(1 - F_U(M)) \\ &= M^k F_U(M) - 0 - \int_0^M kx^{k-1} F_U(x) dx + M^k - M^k F_U(M) \\ &= \int_0^M kx^{k-1} dx - \int_0^M kx^{k-1} F_U(x) dx \\ &= \int_0^M kx^{k-1}(1 - F_U(x)) dx. \end{aligned}$$

□

Folgerung 8.3.1. Sei $0 < F_U(M) < 1$. Dann gelten die folgenden Ungleichungen:

- (a) $E U_S^k < E U^k$, $k \in \mathbb{N}$,
- (b) $cv(U_S) < cv(U)$,

(c) $cs(U_S) < cs(U)$.

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} EU^k &= \int_0^{\infty} x^k dF_U(x) \\ &= \int_0^M x^k dF_U(x) + \int_M^{\infty} x^k dF_U(x) \\ &> \int_0^M x^k dF_U(x) + M^k(1 - F_U(M)) = EU_S^k, \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung gilt, da $x^k \geq M^k$ und da $F_U(M) < 1$, siehe auch den Beweis von Lemma 8.3.1.

(b) Die Behauptung folgt als Spezialfall des Satzes 8.3.1 für $N = 1$.

(c)

Übungsaufgabe 8.3.2.

Die Idee des Beweises ist $f(M) = cs(U_S)$ als eine Funktion der Franchise M zu betrachten und zu zeigen, dass $f'(M) > 0$, für alle $M \geq 0$, d. h., dass $f(M)$ monoton wachsend ist. Da $cs(U) = f(\infty)$, folgt, dass $f(\infty) > f(M) = cs(U_S)$. In diesem Beweis sollte die Formel

$$\left(\mu_S^{(k)}(M)\right)'_+ = kM^{k-1}\overline{F}_U(M)$$

für $\mu_S^{(k)}(M) = EU_S^k$ benutzt werden, siehe auch [16], S. 335. □

3. Charakteristiken des rückversicherten Anteils

Sei $0 < F_U(M) < 1$. Wir betrachten eine Zufallsvariable

$$V_R \stackrel{d}{=} (U - M) \mid U > M,$$

die auch *Überschaden* genannt wird. Da $U_R = \max\{U - M, 0\}$ gilt, ist die Verteilung von V_R gleich mit der Verteilung des rückversicherten Anteils U_R , unter der Voraussetzung, dass Risiken mit dem Wert 0 nicht berücksichtigt werden.

Lemma 8.3.2. *Unter den obigen Bedingungen gilt:*

$$\begin{aligned} P(V_R \leq x) &= \frac{F_U(x + M) - F_U(M)}{\overline{F}_U(M)} \quad \text{und} \\ EU_R^k &= \overline{F}_U(M) \cdot EV_R^k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweis. Für $P(V_R \leq x)$ gilt:

$$\begin{aligned} P(V_R \leq x) &= P(U - M \leq x \mid U > M) \\ &= \frac{P(M < U \leq x + M)}{P(U > M)} \\ &= \frac{F_U(x + M) - F_U(M)}{\bar{F}_U(M)} \end{aligned}$$

Für EV_R^k gilt:

$$\begin{aligned} EV_R^k &= \int_0^\infty x^k dP(V_R \leq x) \\ &= \frac{1}{\bar{F}_U(M)} \int_0^\infty x^k dF_U(x + M) \\ &\stackrel{y=x+M}{=} \int_M^\infty \frac{(y - M)^k dF_U(y)}{\bar{F}_U(M)} \\ &= \frac{1}{\bar{F}_U(M)} \cdot EU_R^k, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

EV_R nennt man den *mittleren Überschaden* über M .

Übungsaufgabe 8.3.3. (a) Zeigen Sie, dass

$$EU_R^k = \int_M^\infty (x - M)^k dF_U(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere gilt

$$EU_R = \int_M^\infty x dF_U(x) - M\bar{F}_U(M).$$

(b) Finden Sie Beispiele dafür, dass EV_R sowohl größer als auch kleiner oder gleich EU_R sein kann.

4. *Einfluss der Risikoteilung auf den Gesamtschaden*
Offensichtlich gilt

$$X_S = \sum_{i=1}^N U_{i_S} \quad \text{und} \quad X_R = \sum_{i=1}^N U_{i_R} = \sum_{i=1}^{N_R} V_{i_R}.$$

Mit Hilfe von Folgerung 4.3.1 kann man leicht feststellen, dass

$$\begin{aligned} E X_S &= E N \cdot E U_S \\ \text{Var } X_S &= \text{Var } N \cdot (E U_S)^2 + E N \cdot \text{Var } U_S \\ E X_R &= E N_R \cdot E V_R = E N \cdot E U_R \\ \text{Var } X_R &= \text{Var } N_R \cdot (E V_R)^2 + E N_R \cdot \text{Var } V_R \\ &= \text{Var } N \cdot (E U_R)^2 + E N \cdot \text{Var } U_R \end{aligned}$$

Bemerkung 8.3.1. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) $E X_S < E X$, $E X_R < E X$, falls $F(M) \in (0, 1)$
- (b) Der Quotient $r(M) = \frac{E X_S}{E X}$ heißt Entlastungseffekt.
- (c) $\text{Var } X_S < \text{Var } X$ und $\text{Var } X_R < \text{Var } X$, falls $F_U(M) \in (0, 1)$.

Beweis. (a) Die Ungleichung $E X_S < E X$ folgt aus der Folgerung 8.3.1 a):

$$E U_S < E U \Rightarrow E X_S = E N \cdot E U_S < E N \cdot E U = E X$$

Mit der Übung 8.3.3 a) gilt

$$E U_R = \int_M^\infty y dF_U(y) - M \bar{F}_U(M) < \int_0^\infty y dF_U(y) = E U.$$

Der Rest des Beweises verläuft analog zum Beweis von $E X_S < E X$.

- (c) Beweisen wir nun $\text{Var } X_S < \text{Var } X$. Es gilt:

$$\text{Var } X_S = \text{Var } N \cdot (E U_S)^2 + E N \cdot \text{Var } U_S.$$

Da

$$U_S^k = \min\{U, M\}^k \rightarrow U^k, \quad \text{für } M \rightarrow \infty \text{ f. s.}$$

und $U_S, U \geq 0$, folgt daraus, dass $E U_S^k \rightarrow E U^k$ für $M \rightarrow \infty$ und somit $\text{Var } U_S \rightarrow \text{Var } U$. Diese Konvergenz ist sogar monoton: Tatsächlich können wir für

$$g(M) = \text{Var } U_S = 2 \int_0^M x \bar{F}_U(x) dx - \left(\int_0^M \bar{F}_U(x) dx \right)^2$$

mit Hilfe des Lemmas 8.3.1 zeigen, dass $g(M)$ monoton wachsend ist, d. h. $g'_+(M) > 0$ für alle $M \geq 0$. Für die rechte Ableitung von $g(M)$ gilt:

$$\begin{aligned} g'_+(M) &= 2M(1 - F_U(M)) - 2 \int_0^M \bar{F}_U(x) dx \cdot \bar{F}_U(M) \\ &= 2\bar{F}_U(M) \left(M - \int_0^M \bar{F}_U(x) dx \right) > 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $g(M) = \text{Var } U_S < g(\infty) = \text{Var } U$. Da laut Folgerung 8.3.1 $E U_S < E U$, folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \text{Var } X_S &= \text{Var } N \cdot (E U_S)^2 + E N \cdot \text{Var } U_S \\ &< \text{Var } N \cdot (E U)^2 + E N \cdot \text{Var } U = \text{Var } X. \end{aligned}$$

Der Beweis für $\text{Var } X_R < \text{Var } X$ verläuft analog: Für

$$\begin{aligned} f(M) &= E U_R^k = \int_M^\infty (x - M)^k dF_U(x) \quad \text{und} \\ g(M) &= \text{Var } U_R \\ &= \int_M^\infty (x - M)^2 dF_U(x) - \left(\int_M^\infty (x - M) dF_U(x) \right)^2 \end{aligned}$$

können wir zeigen, dass $f(M)$ monoton gegen $f(\infty)$ und $g(M)$ monoton gegen $g(\infty)$ für $M \rightarrow \infty$ fällt, indem wir beweisen, dass $f'_+(M) < 0$ und $g'_+(M) < 0$ für alle $M > 0$ gilt. Da

$$\text{Var } U = g(0) > g(M) = \text{Var } U_R$$

gilt, sind wir mit dem Beweis fertig. □

Bemerkung 8.3.2. Aus dem obigen Beweis folgt, dass der Erstversicherer seine Risiken reduzieren kann, indem er die Franchise M senkt: $E U_S^k$ und $\text{Var } U_S$ sind beide monoton wachsend in M . Auf der anderen Seite bedeutet dies, dass die Risiken des rückversicherten Anteils anwachsen, da $E U_R^k$ und $\text{Var } U_R$ monoton fallend sind.

Satz 8.3.1. Sei $0 < F_U(M) < 1$. Für eine XL-Rückversicherung im kollektiven Modell gilt

$$cv(N) < cv(X_S) < cv(X) < cv(X_R),$$

wobei $cv(X_S)$ und $cv(X_R)$ beide monoton nichtfallende Funktionen der Franchise M sind.

Beweis. (a) Beweisen wir $cv(N) < cv(X_S)$:

$$\begin{aligned} cv(X_S)^2 &= \frac{Var X_S}{(E X_S)^2} \\ &= \frac{E N \cdot Var U_S + Var N \cdot (E U_S)^2}{(E N \cdot E U_S)^2} \\ &= (cv(N))^2 + \frac{(cv(U_S))^2}{E N} > cv(N)^2 \end{aligned}$$

(b) Beweisen wir $cv(X_S) < cv(X)$: Da

$$cv(X_S)^2 = \frac{E U_S^2}{E N \cdot (E U_S)^2} + \frac{Var N - E N}{(E N)^2}$$

ist, genügt es, die Monotonie von

$$h_S(M) = \frac{E U_S^2}{(E U_S)^2} = \frac{f_2(M)}{(f_1(M))^2}$$

zu beweisen, wobei $f_k(M) = E U_S^k$ ist. Mit Lemma 8.3.1 können wir zeigen, dass $(f_k(M))'_+ = kM^{k-1}\bar{F}_U(M)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} &(h_S(M))'_+ \\ &= \frac{f'_2(M) \cdot (f_1(M))^2 - 2f_1(M) \cdot f'_1(M) \cdot f_2(M)}{(f_1(M))^4} \\ &= \frac{2 \left(M\bar{F}_U(M) \int_0^M \bar{F}_U(x) dx - 2\bar{F}_U(M) \int_0^M x\bar{F}_U(x) dx \right)}{(f_1(M))^3} \\ &= \frac{2\bar{F}_U(M) \left(M \int_0^M \bar{F}_U(x) dx - 2 \int_0^M x\bar{F}_U(x) dx \right)}{(f_1(M))^3} > 0, \end{aligned}$$

da der Zähler und der Nenner des letzten Bruchs größer als 0 ist. Dabei ist der Zähler positiv, da

$$M \cdot E U_S = M \int_0^M \bar{F}_U(x) dx > 2 \int_0^M x\bar{F}_U(x) dx = E U_S^2$$

ist. Somit sind $h_S(m)$ und $cv(X_S)$ monoton wachsend für $M \rightarrow \infty$. Da aber

$$cv(X_S) \rightarrow cv(X), \quad \text{für } M \rightarrow \infty,$$

erhalten wir $cv(X_S) < cv(X)$.

(c) Beweisen wir $cv(X) < cv(X_R)$: Analog zu b), werden wir zeigen, dass

$$h_R(m) = \frac{E U_R^2}{(E U_R)^2} = \frac{g_2(M)}{(g_1(M))^2}$$

monoton wachsend in M ist, wobei

$$g_k(M) = E U_R^k = \int_M^\infty (x - M)^k dF_U(x).$$

Es gilt

$$g'_k(M) = -k \int_M^\infty (x - M)^{k-1} dF_U(x)$$

und somit ist:

$$(h_R(M))'_+ = \frac{2\bar{F}_U(M)^2 \cdot Var V_R}{(E U_R)^4} > 0.$$

Daraus folgt, dass $h_R(M)$ monoton wachsend und somit auch $cv(X_R)$ ist. Hiermit gilt:

$$cv(X_R)|_{M=0} = cv(X) < cv(X_R).$$

□

8.3.3 Der Entlastungseffekt

Der Quotient

$$r(M) = \frac{E X_S}{E X},$$

der für die nichtproportionale Risikoteilung eingeführt wurde, gibt das Verhältnis des Risikos X zu dem vom Versicherer selbst oder vom Erstversicherer gedeckten Anteil an. Diese Funktion spielt eine wesentliche Rolle bei der Prämienkalkulation in der Rückversicherung, siehe Abschnitt 8.4.1. Wir betrachten nun einen XL-Rückversicherungsvertrag im kollektiven Modell. Wir können dann zeigen, dass $r(M)$ nur von der Verteilungsfunktion $F_U(x)$ abhängt:

$$r(M) = \frac{E N \cdot E U_S}{E N \cdot E U} = \frac{E U_S}{E U} = \frac{\int_0^M \bar{F}_U(x) dx}{\int_0^\infty \bar{F}_U(x) dx}.$$

Der *Entlastungseffekt* besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. $r(M) \in C(\mathbb{R}_+)$, d. h. $r(M)$ ist fast überall differenzierbar.

2. $r(0) = 0$ und $r(\max(U)) = 1$, wobei $\max(U) = \sup\{x : F_U(x) < 1\}$ den *maximalen Verlust* definiert.
3. Es gilt:

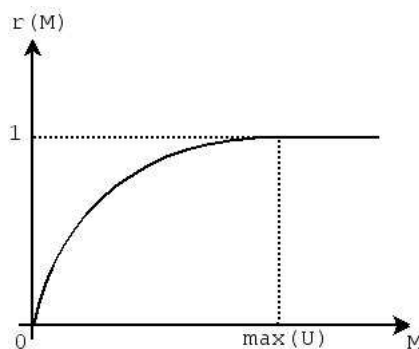
$$r'(M) = \begin{cases} \frac{\overline{F}_U(M)}{EU} > 0, & \text{für } 0 \leq M < \max(U) \\ 0, & \text{für } M \geq \max(U) \end{cases}$$

Insbesondere gilt $r'(0) = \frac{1}{EU}$ und $r'(\max(U)) = 0$.

4. Falls die Verteilung von U absolut stetig ist, dann existiert die zweite Ableitung und es gilt $r''(M) \leq 0$ für alle $M \in \mathbb{R}_+$.

Aus diesen Eigenschaften folgt, dass $r(M)$ für absolut stetig verteilte Risiken U konkav ist. Außerdem kann die Verteilung von U durch $r(M)$ charakterisiert werden und kann aus $r(\cdot)$ durch die folgende Formel zurückgewonnen werden:

$$F_U(x) = 1 - \frac{r'(x)}{r'(0)}.$$



8.4 Prämienkalkulation bei Risikoteilung

8.4.1 Das Exposure-Verfahren

Um die Nettoprämie in der Rückversicherung zu berechnen, wird oft das sogenannte Exposure-Verfahren benutzt. Die Grundidee dieser Methode liegt in der folgenden Aufteilung der gesamten Prämie $\pi(X)$ in die Teile $\pi_S(X)$ und $\pi_R(X)$ des Erst- bzw. Zweitversicherers:

$$\begin{aligned} \pi_S(X) &= r(M) \cdot \pi(X) \quad \text{und} \\ \pi_R(X) &= \pi(X) - \pi_S(X) = (1 - r(M))\pi(X), \end{aligned}$$

wobei $r(M) = \frac{EX_S}{EX}$ der Entlastungseffekt ist.

Die Kurve $r(M)$ wird oft Exposure-Kurve genannt. Um $r(M)$ aus den Daten

zu schätzen, betrachten wir entweder

$$\widehat{r}(M) = \frac{X_{1S} + \dots + X_{nS}}{X_1 + \dots + X_n}$$

oder

$$1 - \widehat{r}(M) = \frac{X_{1R} + \dots + X_{nR}}{X_1 + \dots + X_n}$$

für eine gegebene Priorität M , wobei $X_i = X_{iS} + X_{iR}$, $i = 1, \dots, n$ der Gesamtschaden mit den Anteilen für den Erst- und Rückversicherer ist. Eine andere Möglichkeit besteht in der Einführung einer parametrischen Familie aus Exposure-Kurven und der Schätzung der Werte dieser Parameter aus den Daten.

Beispiel 8.4.1 (Schweizer Rück (Swiss Re) Exposure-Kurven). Wir betrachten die Klasse von $r(M)$, definiert durch:

$$r(M) = \begin{cases} \frac{\log(a+b)^M - \log(a+1)}{\log(a+b) - \log(a+1)}, & x \in [0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

wobei a und b Parameter sind. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass $\max(U) = 1$ ist. die zugehörige Verteilungsfunktion sieht wie folgt aus:

$$F_U(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(a+1)b^x}{a+b^x}, & x \in [0, 1] \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Verteilungsfunktionen, die auf diese Weise definiert sind in statistische Mechanismen wie Maxwell-Boltzmann-, Bose-Einstein-, Fermi-Dirac- und Planck-Verteilungen bekannt (siehe Abbildung ???). Für diese Klasse können EU , $Var U$ usw. explizit kalkuliert werden, siehe Übungsaufgabe 8.4.1.

Übungsaufgabe 8.4.1. Kalkulieren Sie für das Beispiel 8.4.1 den EU und die $Var U$.

8.4.2 Burning-Cost-Verfahren (Erfahrungstarifizierung)

Diese Art der Tarifikalkulation verwendet die Annahme, dass für jedes Geschäftsjahr i mit Gesamtschaden X_i , rückversichertem Anteil X_{iR} und der gesamten Prämie des Erstversicherers $\pi(X_i)$ die Zufallsvariable $\frac{X_{iR}}{\pi(X_i)}$ einen Erwartungswert besitzt, der nicht von i abhängt.

Wir nehmen an, dass $X_{iR} = \max\{X_i - M, 0\}$ für eine Priorität M ist und schätzen

$$E \left[\frac{X_{iR}}{\pi(X_i)} \right] = E \left[\frac{X_{n+1R}}{\pi(X_{n+1})} \right] = \alpha$$

Schweizer Rück Exposure-Kurven $r(\cdot)$

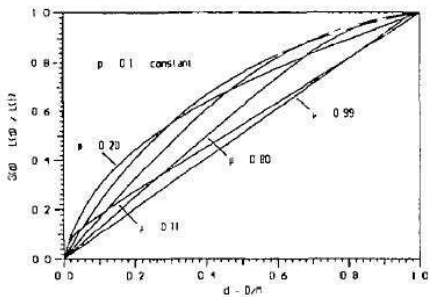


FIGURE 3.1 a) Set of MBBEFD exposure curves with constant parameter $g = 1/p = 10$ and $\mu = E[x] = 0.11$, $0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.99$

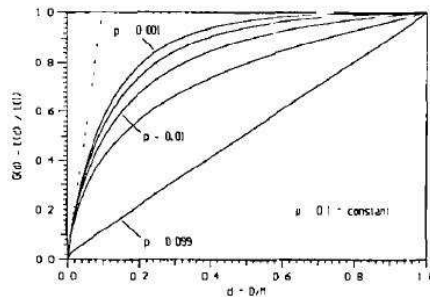


FIGURE 3.1 b) Set of MBBEFD exposure curves with constant $\mu = E[x] = 0.1$ and $p = 1/g = 0.099, 0.031, 0.01, 0.0031, 0.001$. The dashed line with slope $1/\mu$ represents the tangent at $d = 0$

und die zugehörigen Verteilungsfunktionen $F_U(\cdot)$

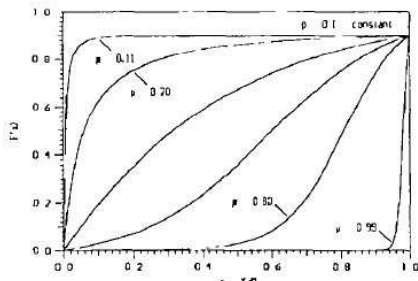


FIGURE 3.2 a) Distribution functions belonging to exposure curves of figure 3.1 a)

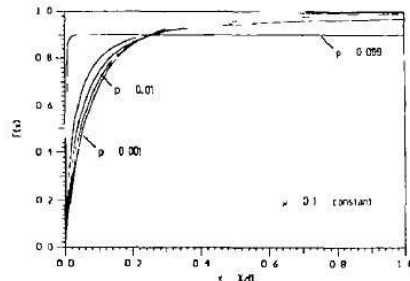


FIGURE 3.2 b) Distribution functions belonging to exposure curves of figure 3.1 b)

Abbildung 8.4.1: Beispiel: Schweizer Rück
 Quelle: Stefan Bernegger: The Swiss Re exposure curves and the MBBEFD distribution class

durch

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n X_{i_R}}{\sum_{i=1}^n \pi(X_i)}$$

für die n vergangenen Jahre. Die Prämie des Rückversicherers und des Erstversicherers kann für das nächste $(n+1)$ -te Jahr wie folgt kalkuliert werden:

$$\pi_R(X_{n+1}) = \hat{\alpha} \cdot \pi(X_{n+1}) \quad \text{und} \quad \pi_S(X_{n+1}) = (1 - \hat{\alpha})\pi(X_{n+1}).$$

Der Name *Burning-Cost* stammt aus der Feuerversicherung und weist auf den Wert des Schadens des aktuellen Jahres hin (Jahr $n+1$ in unserer Notation). Natürlich müssen die Werte X_{i_R} , $i = 1, \dots, n$ genauso wie $\pi(X_i)$ aufgrund von Inflation usw. an die erwartete Höhe der Kosten im Jahr $n+1$ angepasst werden. Um dieses Verfahren anwenden zu können, muss eine große Anzahl von Beobachtungen $X_{i_R} > 0$ gegeben sein. Dies kann durchaus ein Problem für große M darstellen. Zusätzlich muss das Verhalten eines Portfolios stabil sein, d. h., α sollte nicht vom Jahr i abhängen, für weitere Informationen, siehe [16], S. 364-369.

8.4.3 Lokale und globale Rückversicherung

In diesem Abschnitt werden allgemeine Fragen der Prämienberechnung bei der Risikoteilung betrachtet. Sei $X = X_S + X_R$ eine gewisse Form der Risikoteilung, wobei $X_S = h(X)$ und $X_R = X - h(X) = k(X)$ für Funktionen $h(\cdot)$ und $k(\cdot)$, die man *Selbstbehalt-* und *Kompensationsfunktionen* nennt. Dabei ist zu beachten, dass $k(x) = x - h(x)$ ist. Im kollektiven Modell kann der Selbstbehalt und die Kompensation auf die Risiken U_i angewandt werden:

$$X_S = \sum_{i=1}^N h_i(U_i) \quad \text{und} \quad X_R = \sum_{i=1}^N k_i(U_i)$$

für $X = \sum_{i=1}^N U_i$ und $k_i(x) = x - h_i(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$ und für alle $i \in \mathbb{N}$. Diese Form nennt man *lokale Rückversicherung*. Sie kommt z.B. bei der Summenexzedenten-Rückversicherung und XL-Rückversicherung vor. Wenn die Selbstbehaltfunktion auf den Gesamtschaden angewandt wird, so wird diese Form der Rückversicherung *global* genannt. Typische Beispiele sind die Quotenrückversicherung und die SL-Rückversicherung.

Unsere Selbstbehalt- und Kompensationsfunktionen sollen nun die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $h(x)$ und $k(x)$ sind monoton wachsend
2. $0 \leq h(x), k(x) \leq x$, für alle $x \in \mathbb{R}$ und $h(0) = k(0) = 0$

(8.4.1)

Im Folgenden werden die Vorteile und Mängel der lokalen und der globalen Rückversicherung in Bezug auf die Prämienkalkulation miteinander verglichen. Sei $\pi_R(X)$ die Prämie des Rückversicherers und $v_R(\cdot)$ seine Nutzenfunktion. Dann ist der Nutzen eines lokalen bzw. eines globalen Rückversicherungsvertrags durch

$$v_R(\pi_R(X) - \sum_{i=1}^N k_i(U_i)) \quad \text{bzw. durch} \quad v_R(\pi_R(X) - k(X))$$

gegeben. Der folgende Satz besagt, dass ein globaler Rückversicherungsvertrag aus der Sicht des Rückversicherers besser ist, da sein erwarteter Nutzen für einen globalen Vertrag größer ist:

Satz 8.4.1. *Sei $X = \sum_{i=1}^N U_i$ der Gesamtschaden im kollektiven Modell, $k_i(x)$ seien gültige Kompensationsfunktionen (d. h. sie erfüllen die Bedingungen 1) und 2)) und $v_R(\cdot)$ sei eine Nutzenfunktion. Dann existiert eine Funktion $k(x)$, die die folgenden Gleichungen erfüllt:*

$$E k(X) = E \left(\sum_{i=1}^N k_i(U_i) \right) = E X_R \quad (8.4.2)$$

und

$$E v_R(\pi_R(X) - k(X)) \geq E v_R \left(\pi_R(X) - \sum_{i=1}^N k_i(U_i) \right) \quad (8.4.3)$$

Beweis. Für alle $x \geq 0$ definieren wir

$$k(x) = E(X_R | X = x) = E \left(\sum_{i=1}^N k_i(U_i) \mid \sum_{i=1}^N U_i = x \right).$$

Mit den Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes erhalten wir $E k(X) = E X_R$, d. h. (8.4.2) gilt. Um (8.4.3) zu beweisen, müssen wir beachten, dass $v_R(x)$ konkav ist und somit ist auch $v(\pi_R(X) - x)$ konkav (vgl. den Beweis zu Proposition 6.4.1). Wenn wir nun die Jensensche Ungleichung für bedingte Erwartungswerte

$$E(g(Y) | X) \leq g(E(Y | X)) \quad \text{f. s.},$$

wobei g eine konkave Funktion sein soll, auf die obige Funktion anwenden, so erhalten wir

$$\begin{aligned} E[v_R(\pi_R(X) - X_R) | X] &\leq v_R(E(\pi_R(X) - X_R | X)) \\ &= v_R(\pi_R(X) - E(X_R | X)). \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} Ev_R(\pi_R(X) - X_R) &= E(E(v_R(\pi_R(X) - X_R) | X)) \\ &\leq E v_R(\pi_R(X) - \underbrace{E(X_R | X)}_{=k(X)}) \\ &= E v_R(\pi_R(X) - k(X)). \end{aligned}$$

Somit ist (8.4.3) bewiesen. \square

Bemerkung 8.4.1. Aus dem obigen Satz folgt nicht, dass $k(x)$ eine gültige Kompensationsfunktion ist. In der Tat zeigt das folgende Beispiel, dass die Eigenschaft der Monotonie von $k(x)$ (vgl. (8.4.1)) verletzt sein kann: Sei $N = 2$ und $X = U_1 + U_2$ für Risiken

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{cases} 4 \\ 5 \end{cases}, \quad \text{mit positiven Wahrscheinlichkeiten und} \\ U_2 &= \begin{cases} 5 \\ 7 \end{cases}, \quad \text{mit positiven Wahrscheinlichkeiten} \end{aligned}$$

Sei $k_1(x) = \frac{x}{2}$ und $k_2(x) = \frac{x}{8}$. Dann gilt $X_R = \frac{U_1}{2} + \frac{U_2}{8}$ und

$$k(x) = E(X_R | X = x) = E\left(\frac{U_1}{2} + \frac{U_2}{8} \mid U_1 + U_2 = x\right).$$

Da

$$X = U_1 + U_2 = \begin{cases} 9, & \text{falls } (U_1, U_2) = (4, 5) \\ 10, & \text{falls } (U_1, U_2) = (5, 5) \\ 11, & \text{falls } (U_1, U_2) = (4, 7) \\ 12, & \text{falls } (U_1, U_2) = (5, 7) \end{cases}$$

jeweils mit positiven Wahrscheinlichkeiten, gilt

$$\begin{aligned} k(9) &= 2 + \frac{5}{8} = 2\frac{5}{8} \quad \text{und} \\ k(10) &= \frac{5}{2} + \frac{5}{8} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8} > k(11) = 2 + \frac{7}{8} = 2\frac{7}{8} \end{aligned}$$

Also ist diese Funktion nicht monoton wachsend.

Unter bestimmten Annahmen für die Verteilung der Risiken U_i , kann man zeigen, dass $k(x)$ eine gültige Kompensationsfunktion ist, vgl. Satz 8.4.2. Um diesen Satz zu formulieren und zu beweisen, benötigen wir die folgenden Definitionen:

Definition 8.4.1. Seien $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ und $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ zwei Zufallsvektoren mit Werten in \mathbb{R}^n . Man sagt, dass $Y \leq_{st} Z$ (stochastisch kleiner als) ist, falls für alle messbaren Funktionen $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die in jeder Komponente wachsend sind, gilt: $Eg(Y) \leq Eg(Z)$, falls $Eg(X) < \infty$ und $Eg(Y) < \infty$.

Für einen Vektor $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ führen wir die Bezeichnung Y_t für alle $t \in \mathbb{R}$ ein, wobei

$$Y_t \stackrel{d}{=} Y \mid \sum_{i=1}^n Y_i = t.$$

Definition 8.4.2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, heißt *Polya-Frequenz der Ordnung 2*, falls für alle $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$ folgendes gilt:

$$\det \begin{pmatrix} f(x_1 - y_1) & f(x_1 - y_2) \\ f(x_2 - y_1) & f(x_2 - y_2) \end{pmatrix} \geq 0$$

Übungsaufgabe 8.4.2. Zeigen Sie, dass die Dichten folgender Verteilungen *Polya-Frequenzen der Ordnung 2* sind:

1. Gamma-Verteilung $\Gamma(a, \lambda)$ mit $a \geq 1$
2. Gleichverteilung auf $[a, b]$
3. Weibull-Verteilung $\text{Wei}(r, c)$ mit $r \geq 1$

Lemma 8.4.1 (Satz von Efron). Seien U_1, \dots, U_n Risiken mit Dichten $f_1(x), \dots, f_n(x)$, die alle *Polya-Frequenzen der Ordnung 2* sind. Dann gilt $U_{t_1} \leq_{st} U_{t_2}$ für alle $0 \leq t_1 \leq t_2$ und $U = (U_1, \dots, U_n)$.

Ohne Beweis.

Satz 8.4.2. Sei $X = \sum_{i=1}^n U_i$ der Gesamtschaden eines Portfolios im individuellen Modell, und alle U_i seien absolut stetig verteilt mit der Dichte $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, so dass $f_1(x), \dots, f_n(x)$ *Polya-Frequenzen der Ordnung 2* sind. Seien $k_1(x), \dots, k_n(x)$ gültige *Kompensationsfunktionen des Rückversicherers* (d.h., sie erfüllen (8.4.1)). Dann ist die Funktion

$$k(x) = E(X_R \mid X = x) \quad \text{mit} \quad X_R = \sum_{i=1}^n k_i(U_i)$$

eine gültige *Kompensationsfunktion*.

Beweis. Für $U = (U_1, \dots, U_n)$ bekommen wir mit Lemma 8.4.1, dass $U_{t_1} \leq_{st} U_{t_2}$, für alle $0 \leq t_1 \leq t_2$. Mit der Definition 8.4.1 erhalten wir

$$g(U) = \sum_{i=1}^n k_i(U_i),$$

so dass

$$k(t_1) = E \left(g(U) \mid \sum_{i=1}^n U_i = t_1 \right) \leq E \left(g(U) \mid \sum_{i=1}^n U_i = t_2 \right) = k(t_2).$$

Daraus folgt, dass $k(x)$ monoton wachsend ist. Dasselbe kann für $h(x) = x - k(x)$ mit Hilfe von

$$g(U) = \sum_{i=1}^n (U_i - k_i(U_i))$$

gezeigt werden. Weiter gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq E \left(\sum_{i=1}^n k_i(U_i) \mid X = x \right) \\ &\leq E \left(\sum_{i=1}^n U_i \mid X = x \right) \\ &= E(X \mid X = x) = x \end{aligned}$$

für alle x , da $0 \leq k_i(x) \leq x$ gilt. Daraus folgt, dass $0 \leq k(x) \leq x$, und insbesondere $k(0) = 0$. \square

Betrachten wir jetzt die Besonderheiten der Risikoteilung in der Prämienkalkulation.

Definition 8.4.3. Für ein Risiko X und für einen Rückversicherungsvertrag $X = X_S + X_R$ mit der Selbstbehaltfunktion $h(x)$ wird $X_S = h(X)$ kompatibel bzgl. des Prämienkalkulationsprinzips $\pi(X)$ genannt, falls

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \pi(X_S) + \pi(X_R) \\ &= \pi(h(X)) + \pi(X - h(X)) \\ &= \pi(h(X)) + \pi(k(X)) \end{aligned}$$

Beispiel 8.4.2. 1. Ein proportionaler Rückversicherungsvertrag ist kompatibel bzgl. des Erwartungswertprinzips P1 und bzgl. des Standardabweichungsprinzips P5. Tatsächlich gilt $h(x) = cx$ und für P1 haben wir $\pi(X) = (1 + a)EX$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \pi(X) &= (1 + a)EX \\ &= (1 + a)cEX + (1 + a)(1 - c)EX \\ &= \pi(h(X)) + \pi(X - h(X)). \end{aligned}$$

Für P5 gilt $\pi(X) = EX + a\sqrt{\text{Var } X}$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \pi(X) &= cEX + ac\sqrt{\text{Var } X} \\ &= (1 - c)EX + a(1 - c)\sqrt{\text{Var } X} \\ &= EX + a\sqrt{\text{Var } X} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist die proportionale Risikoteilung nicht kompatibel bzgl. des Varianz- und modifizierten Varianzprinzips P4 und P6.

2. Die XL -Rückversicherung ist kompatibel bzgl. $P1$, aber nicht bzgl. $P4$ - $P6$ (da jede Rückversicherung bzgl. des additiven Prinzips $P1$ kompatibel ist, während die Varianprinzipien $P4$ - $P6$ nicht additiv sind).
3. Jeder Rückversicherungsvertrag, der durch eine gültige Selbstbehaltfunktion $h(\cdot)$ definiert wurde, ist kompatibel bzgl. des Quantilprinzips $P3$ und des absoluten Abweichungsprinzips $P7$. Wir werden dies beweisen.

Lemma 8.4.2. Seien $h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei monoton wachsende Funktionen. Dann gilt für alle Zufallsvariablen X und für alle $0 \leq \varepsilon \leq 1$:

$$Q_{F_{h(X)+k(X)}}(\varepsilon) = Q_{F_{h(X)}}(\varepsilon) + Q_{F_{k(X)}}(\varepsilon).$$

Beweis. Sei g eine monoton wachsende Funktion auf \mathbb{R} . Dann gilt $Q_{F_{g(X)}}(\varepsilon) = g(Q_{F_X}(\varepsilon))$:

$$\begin{aligned} Q_{F_{g(X)}}(\varepsilon) &= \inf\{x : F_{g(X)}(x) \geq \varepsilon\} \\ &= \inf\{x : P(g(X) \leq x) \geq \varepsilon\} \\ &= \inf\{x : P(X \leq g^{-1}(x)) \geq \varepsilon\} \\ &= \inf\{x : F_X(g^{-1}(x)) \geq \varepsilon\} \\ &\stackrel{y=g^{-1}(x)}{=} \inf\{g(y) : F_X(y) \geq \varepsilon\} \\ &= g(\inf\{y : F_X(y) \geq \varepsilon\}) \\ &= g(Q_{F_X}(\varepsilon)), \end{aligned}$$

wobei bei der vorletzten Gleichheit die Tatsache eine Rolle spielt, dass g monoton in y ist. Wenn wir nun die obige Relation auf $g = h$, $g = k$, und $g = h + k$ anwenden, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} Q_{F_{(h+k)(X)}}(\varepsilon) &= (h+k)(Q_{F_X}(\varepsilon)) \\ &= h(Q_{F_X}(\varepsilon)) + k(Q_{F_X}(\varepsilon)) \\ &= Q_{F_{h(X)}}(\varepsilon) + Q_{F_{k(X)}}(\varepsilon) \end{aligned}$$

□

Folgerung 8.4.1. Es gilt die Aussage 3) des Beispiels 8.4.2.

Beweis. Für $P3$ ist

$$\pi(X) = pE X + (1-p)Q_{F_X}(\varepsilon).$$

Laut Lemma 8.4.2 gilt

$$\begin{aligned} \pi(h(X)) &= pE h(X) + (1-p)Q_{F_{h(X)}}(\varepsilon) \\ \pi(k(X)) &= pE k(X) + (1-p)Q_{F_{k(X)}}(\varepsilon) \end{aligned}$$

und somit gilt $\pi(X) = \pi(h(X)) + \pi(k(X))$.

Für P7 gilt

$$\begin{aligned} \pi(X) &= E X + aE \left(x - Q_{F_X} \left(\frac{1}{2} \right) \right) \\ &\stackrel{\text{Lemma 6.3.1}}{=} (1-a) \int_0^{\frac{1}{2}} Q_{F_X}(z) dz + (1+a) \int_{\frac{1}{2}}^1 Q_{F_X}(z) dz, \end{aligned}$$

woraus $\pi(X) = \pi(h(X)) + \pi(k(X))$ mit Hilfe des Lemma 8.4.2 folgt. \square

Kapitel 9

Ruinwahrscheinlichkeiten

9.1 Risikoprozesse

Im folgenden Abschnitt wird eine kurze Einführung in die Ruinwahrscheinlichkeiten dargelegt werden. Dabei werden wir eine vereinfachte Menge des Problems, nämlich Risikoprozesse in diskreter Zeit und ihre Ruinwahrscheinlichkeiten betrachten.

9.1.1 Zeitdiskrete Risikoprozesse

Seien in einem kollektiven Modell $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ die Gesamtschäden eines Portfolios am Ende einer Periode gegeben, wobei eine Periode immer gleich lang ist, z. B. ein Jahr. Dies bedeutet, dass X_n der Gesamtschaden über das Zeitintervall $(n-1, n]$ betrachtet darstellt. Angenommen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ seien Zufallsvariablen mit einer diskreten Verteilung: $p_k = P(X_n = k)$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wie zuvor müssen die Gesamtschäden auf die entsprechenden Währungseinheiten gerundet werden. Wir nehmen nun an, dass die Prämien mit einer bestimmten konstanten Rate β pro Jahr eingezogen werden, d. h

$$R_n = u + \beta n - \sum_{i=1}^n X_i$$

ist die *Risikoreserve* nach n Jahren, wobei u die Anfangsreserve sei.

Definition 9.1.1. Die Folge $\{R_n : n \geq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, wird *zeitdiskreter Risikoprozess* genannt. Das Ereignis $\{\exists n : R_n < 0\}$ wird als *der technische Ruin des Portfolios* bezeichnet. Es ist offensichtlich, dass $P(\exists n : R_n < 0) > 0$, falls

$$P(X_n > \beta) = 1 - P(X_n \leq \beta) = 1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{[\beta]} > 0.$$

Somit folgt, dass $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{[\beta]} < 1$.

Wir führen nun die *Ruinzeit* $\tau(u)$ durch

$$\tau(u) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} : R_n < 0\} \\ \infty, \end{cases} \quad \text{falls } R_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

ein. Dies ist eine ausgedehnte Zufallsvariable. Außerdem wurde in der obigen Notation die Abhängigkeit der Ruinzeit von der Anfangsreserve betont.

Definition 9.1.2. Die *Ruinwahrscheinlichkeit* $\psi(u, n)$ mit endlichem Horizont ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ruin im Zeitintervall $(0, n]$ auftritt:

$$\psi(u, n) = P(\tau(u) \leq n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die *Ruinwahrscheinlichkeit mit unendlichem Horizont* ist $\psi(u) = P(\tau(u) < \infty)$. Als Funktionen von u werden die oben definierten Funktionen auch *Ruinfunktionen* genannt. Sie können auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \psi(u, n) &= P(\exists i \leq n : R_i < 0), \quad n \in \mathbb{N} \\ \psi(u) &= P(\exists i \in \mathbb{N} : R_i < 0) \end{aligned} \quad (9.1.1)$$

Anstatt dem oben betrachteten Risikoreserveprozess $\{R_n : n \geq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, ist es manchmal günstiger, den *Schadensüberschussprozess* $\{S_n : n \geq 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$S_n = u - R_n = \sum_{i=1}^n X_i - \beta n, \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten. Wenn wir die Bezeichnung $Y_i = X_i - \beta$ einführen, so erhalten wir $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, wobei $\{Y_i : i \geq 1\}$, $i \in \mathbb{N}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen ist. Mit Hilfe von S_n kann der Ruin wie folgt ausgedrückt werden:

$$\tau(u) = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n > u\},$$

und die Wahrscheinlichkeiten (9.1.1) können folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \psi(u, n) &= P(\exists i \leq n : S_i > u), \quad n \in \mathbb{N} \\ \psi(u) &= P(\exists i \in \mathbb{N} : S_i > u) = P(M > u) \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

wobei $M = \max\{0, S_1, S_2, \dots\}$.

Wir werden nun das folgende Lemma beweisen:

Lemma 9.1.1. *Es gilt:*

$$\psi(u) = \begin{cases} 1, & E Y_i \geq 0, \quad \text{d. h.} \quad E X_i \geq \beta \\ < 1, & E Y_i < 0, \quad \text{d. h.} \quad E X_i < \beta \end{cases}$$

Beweis. Mit dem starken Gesetz der großen Zahlen erhalten wir:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{f. s.}} EY, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dann gilt für fast alle $\omega \in \Omega$:

Sei $EY_i > 0$. Dann folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$S_n(\omega) \rightarrow +\infty \Rightarrow \psi(u) \equiv 1$$

Für $EY_i < 0$ erhalten wir mit $n \rightarrow \infty$:

$$S_n(\omega) \rightarrow -\infty \Rightarrow \max\{S_1, S_2, \dots\} < \infty \Rightarrow \psi(u) < 1.$$

Den Fall $EY_i = 0$ werden wir nicht beweisen (siehe [20], Satz 6.3.1). Somit haben wir gezeigt, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty \quad \text{f. s.}$$

Hieraus folgt, dass $\psi(u) \equiv 1$. □

Später werden wir Portfolios mit $EY < 0$ betrachten. Der Einfachheit halber setzen wir $\beta \equiv 1$.

Satz 9.1.1. Sei $\hat{g}_m(s) = E s^M$ die erzeugende Funktion von M und $\hat{g}_X(s) = E s^{X_i}$ die erzeugende Funktion von X_i , $|s| < 1$.

1. Es gilt

$$\hat{g}_M(s) = \frac{(1-a)(1-s)}{\hat{g}_X(s) - s}, \quad |s| < 1, \quad \text{wobei} \quad a = EX_i. \quad (9.1.3)$$

2. Außerdem gilt $M \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^N U_i$, wobei $N \sim \text{Geo}(a)$ und $\{U_i\}$ iiv Zufallsvariablen mit der Verteilung

$$P(U_i = k) = \frac{P(X_i > k)}{a}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

sind (zusammengesetzte geometrische Verteilung).

Beweis. 1. Wir müssen beachten, dass

$$\begin{aligned} M &= \max\{0, Y_1, Y_1 + Y_2, Y_1 + Y_2 + Y_3, \dots\} \\ &= \max\{0, Y_1, Y_1 + \tilde{S}_1, Y_1 + \tilde{S}_2, Y_1 + \tilde{S}_3, \dots\}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{S}_i = Y_2 + \dots + Y_{i+1} \stackrel{d}{=} S_i$. Daraus ergibt sich, dass

$$M \stackrel{d}{=} (M + Y_0)_+ = \max\{0, M + Y_0\},$$

mit $Y_0 \stackrel{d}{=} Y_i$. Außerdem ist Y_0 unabhängig von Y_i , $i \geq 1$. Hiermit folgt für $X_0 \stackrel{d}{=} X_i$, dass

$$\begin{aligned} \widehat{g}_M(s) &= E s^M = E s^{(M+X_0-1)+} \\ &= E [s^{(M+X_0-1)+} \mathbf{1}(M+X_0-1 \geq 0)] \\ &\quad + E [s^{(M+X_0-1)+} \mathbf{1}(M+X_0-1 = -1)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} P(M+X_0 = k) + s^0 \cdot P(M+X_0 = 0) \\ &= \frac{1}{s} E s^{M+X_0} - \frac{1}{s} P(M+X_0 = 0) + P(M+X_0 = 0) \\ &= \frac{1}{s} \widehat{g}_M(s) \cdot \widehat{g}_X(s) + \left(1 - \frac{1}{s}\right) P(M+X_0 = 0), \end{aligned}$$

wobei bei der dritten Gleichheit die Tatsache, dass

$$M = \max\{0, S_1, S_2, \dots\}$$

eine Rolle spielt. Bei der vorletzten Gleichheit müssen wir beachten, dass

$$E s^{M+X_0} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(M+X_0 = k)$$

gilt. Außerdem verwenden wir bei der letzten Gleichheit die Tatsache, dass M und X_0 unabhängig sind. Daraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \widehat{g}_M(s) \left(1 - \frac{1}{s} \widehat{g}_X(s)\right) &= \left(1 - \frac{1}{s}\right) P(M+X_0 = 0) \\ \text{bzw.} \quad \widehat{g}_M(s) &= \frac{(s-1)P(M+X_0 = 0)}{s - \widehat{g}_X(s)}. \end{aligned}$$

Aus dieser Formel werden wir nun $\lim_{s \rightarrow 1-0} \widehat{g}_M(s)$ berechnen. Mit der Regel von l'Hospital erhalten wir:

$$1 - \lim_{s \rightarrow 1-0} \widehat{g}_M(s) = \lim_{s \rightarrow 1-0} \frac{P(M+X_0 = 0)}{1 - \widehat{g}'_{X_i}(s)} = \frac{P(M+X_0 = 0)}{1 - \underbrace{E X_i}_{=a}}.$$

Hiermit ergibt sich, dass $P(M+X_0 = 0) = 1 - a$ und insgesamt erhalten wir:

$$\widehat{g}_M(s) = \frac{(1-s)(1-a)}{\widehat{g}_X(s) - s},$$

und (9.1.3) ist bewiesen.

2. Die erzeugende Funktion von U_i , die in der Behauptung von diesem Satz eingeführt wurde, ist gleich

$$\begin{aligned}
\widehat{g}_U(s) &= E s^{U_i} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{P(X_i > k)}{a} \\
&= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \geq k+1}^{\infty} P(X_i = n) s^k \\
&= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(s^k - \sum_{n=0}^k P(X_i = n) s^k \right) \\
&= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-s} - \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k P(X_i = n) s^k \\
&\stackrel{Fubini}{=} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-s} - \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \geq n} s^k \cdot P(X_i = n) \\
&= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-s} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(X_i = n) \right) \\
&= \frac{1 - \widehat{g}_X(s)}{a(1-s)},
\end{aligned}$$

wobei bei der drittletzten Gleichheit

$$\sum_{k \geq n} s^k = \frac{s^n}{1-s}$$

verwendet wurde. Aus dieser Rechnung erhalten wir dann das folgende Ergebnis:

$$\widehat{g}_X(s) = 1 - a(1-s)\widehat{g}_U(s).$$

Wenn wir nun diese Darstellung von $\widehat{g}_X(s)$ in die Formel (9.1.3) einsetzen, so erhalten wir:

$$\widehat{g}_M(s) = \frac{(1-a)(1-s)}{(1-s) - a(1-s)\widehat{g}_U(s)} = \frac{1-a}{1 - a\widehat{g}_U(s)}.$$

Dies ist exakt die erzeugende Funktion einer zusammengesetzten geometrisch verteilten Zufallsvariablen $\widetilde{M} = \sum_{i=1}^N U_i$:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}_{\widetilde{M}}(s) &= E s^{\widetilde{M}} = \sum_{n=0}^{\infty} E(s^{\widetilde{M}} | N = n) \cdot P(N = n) \\
&= (1-a) \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{g}_U(s))^n a^n = \frac{1-a}{1 - a\widehat{g}_U(s)},
\end{aligned}$$

da

$$E(s^{\widetilde{M}} | N = n) = E s^{U_1 + \dots + U_n} = (E s^{U_1})^n = (\widehat{g}_U(s))^n.$$

□

9.1.2 Zeitstetige Risikoprozesse

Seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ mit $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \dots$ f. s. zufällige Zeitpunkte, an denen positive Schäden U_1, U_2, U_3, \dots eintreten. Diese Schäden $U_i > 0$ können entweder als individuelle oder kollektive Schäden interpretiert werden. Wie in Kapitel 3 definieren wir die Zwischenankunftszeiten durch $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $\sigma_0 \equiv 0$ f. s. Der Zählprozess $\{N(t) : t \geq 0\}$ wird durch

$$N(t) = \sup\{n \in \mathbb{N} : \sigma_n \leq t\}, \quad t \geq 0$$

definiert. Wir nehmen nun an, dass die Prämien zu einer bestimmten, konstanten Rate $\beta > 0$ erhoben werden und dass die Anfangsreserve des Versicherers $u > 0$ sei. Ähnlich zur Definition 9.1.1 ist ein *zeitstetiger Risikoreserveprozess* $\{R(t) : t \geq 0\}$ durch

$$R(t) = u + \beta t - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$$

und ein *Schadensüberschussprozess* durch

$$S(t) = u - R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i - \beta t$$

definiert. Analog zum zeitdiskreten Fall gilt für die *Ruinzeit*

$$\tau(u) = \min\{t \geq 0 : R(t) < 0\} = \min\{t \geq 0 : S(t) > u\}.$$

Die *Ruinwahrscheinlichkeiten mit endlichem und unendlichem Horizont* sind

$$\begin{aligned} \psi(u, x) &= P(\tau(u) \leq x) \quad \text{und} \\ \psi(u) &= P(\tau(u) < \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(u, x), \end{aligned} \quad u, x \geq 0$$

siehe Abbildung 9.1.1.

Um $\psi(u)$ zu erhalten, ist es ausreichend, den Prozess $S(t)$ an den Ankunftszeiten σ_n , $n \in \mathbb{N}$ zu überprüfen. In der Tat gilt

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t \geq 0} S(t) = \max_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n (U_k - \beta T_k) = \max_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n Y_k = \max_{n \in \mathbb{N}} S_n, \quad (9.1.4)$$

wobei $Y_k = U_k - \beta T_k$, $k \in \mathbb{N}$ und $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass $\psi(u) = P(M > u)$, vgl. (9.1.2).

Nebenbei ist zu erwähnen, dass $S(n) \neq S_n$, da $t = n$ in $S(t)$ ein Parameter für die Zeit ist und n in S_n für die Anzahl der Schäden steht. Analog dazu können wir schreiben, dass

$$\psi(u, x) = P\left(\max_{0 \leq t \leq x} S(t) > u\right).$$

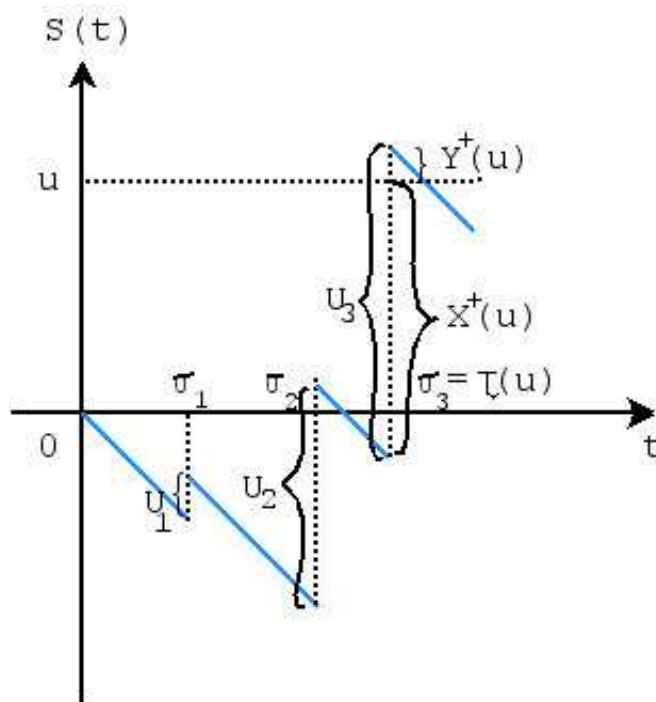


Abbildung 9.1.1: Darstellung eines Überschussprozesses

Die letzte Schadensgröße U_{n_0} , die den Ruin verursacht, kann in zwei Hauptbestandteile zerlegt werden: den *Überschuss* $X^+(u)$ vor dem Ruin und den *Überschuss* $Y^+(u)$ über die Grenze u , der auch die *Stärke des Ruins* genannt wird:

$$U_{n_0} = X^+(u) + Y^+(u)$$

definiert durch:

$$X^+(u) = \begin{cases} u - S(\tau(u) - 0), & \text{falls } \tau(u) < \infty \\ \infty, & \text{falls } \tau(u) = \infty \end{cases}$$

und $Y^+(u) = \begin{cases} S(\tau(u) - u) = -R(\tau(u)), & \text{falls } \tau(u) < \infty \\ \infty, & \text{falls } \tau(u) = \infty \end{cases}$

vgl. Abbildung 9.1.1. Manchmal ist es auch von Interesse, die *multivariaten Ruinfunktionen*

$$\psi(u, x, y) = P(\tau(u) < \infty, X^+(u) \leq x, Y^+(u) \leq y)$$

$$\varphi(u, x, y) = P(\tau(u) < \infty, X^+(u) > x, Y^+(u) > y)$$

mit $u, x, y \geq 0$ zu betrachten. Die Zeitspanne $T(u)$, die ein Risikoprozess $R(t)$ unterhalb von 0 nach der Ruinzeit $\tau(u)$ steht, mit

$$T(u) = \begin{cases} \tau'(u) - \tau(u), & \text{falls } \tau(u) < \infty \\ 0, & \text{falls } \tau(u) = \infty \end{cases}$$

wird die *Zeit in den Roten* genannt, wobei

$$\tau'(u) = \inf\{t > \tau(u) : R(t) > 0\}.$$

Die Gewichtung des Ruins wird ebenso mit dem *totalen, maximalen Defizit*

$$Z_0 = \max_{t \geq \tau(u)} \{-R(t)\}$$

nach $\tau(u)$ und dem *maximalen Defizit*

$$Z(u) = \max_{\tau(u) \leq t \leq \tau'(u)} \{-R(t)\}$$

während der ersten Periode in den Roten beschrieben. vgl. Abbildung 9.1.2. Manchmal wird die komplementäre Wahrscheinlichkeit, dass kein Ruin auf-

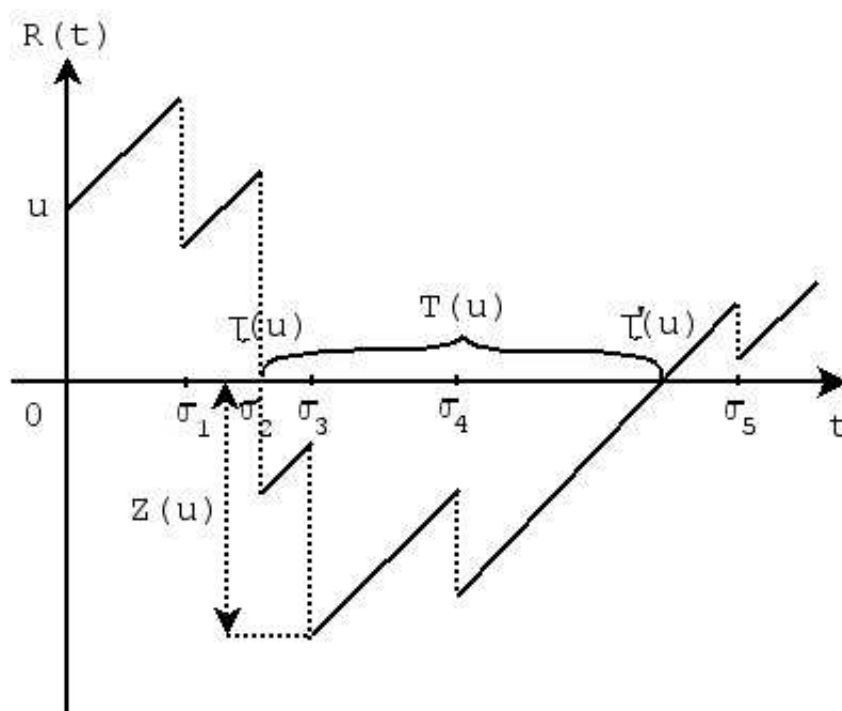


Abbildung 9.1.2: Darstellung eines Ruinprozesses

tritt,

$$\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u) = P(\tau(u) = \infty)$$

die *Überlebenswahrscheinlichkeit* genannt. Wenn wir nun die eingebettete Zufallsvariable $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, $n \in \mathbb{N}$ aus (9.1.4) betrachten, so können wir wie in Lemma 9.1.1 argumentieren, so dass wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty \quad \text{f.s. für } EU_k \geq \beta ET_k$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty \quad \text{f.s. für } EU_k < \beta ET_k$$

bekommen. Somit gilt

$$\psi(u) < 1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad EU_k < \beta ET_k. \quad (9.1.5)$$

und $\psi(u) = P(M > u) \rightarrow 0$ für $u \rightarrow \infty$, da M eine gewöhnliche Zufallsvariable ist, d. h. $P(M < \infty) = 1$. Später werden wir diese Annahme für den Rest des Kapitels verwenden.

9.2 Ruinwahrscheinlichkeiten im zusammengesetzten Poisson-Modell

In diesem Abschnitt sei der Zählprozess $\{N(t) : t \geq 0\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Somit kann die Bedingung (9.1.5) als $\lambda EU < \beta$ geschrieben werden, da $ET_k = \frac{1}{\lambda}$ und $T_k \sim \text{Exp}(\lambda)$. Diese Bedingung wird die *Nettogewinn-Bedingung* genannt.

In den nächsten Sätzen wird die Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktion $\bar{\psi}(u)$ betrachtet. Es wird gezeigt werden, dass $\bar{\psi}(u)$ differenzierbar auf \mathbb{R}_+ ist und die *Integral-Differentialgleichung* erfüllt.

9.2.1 Integral- und Differentialgleichungen

Satz 9.2.1. Die Überlebensfunktion $\bar{\psi}(u) \in C(\mathbb{R}_+)$ besitzt eine linke und eine rechte Ableitung $\bar{\psi}'_+(u)$ und $\bar{\psi}'_-(u)$ und erfüllt somit:

$$\beta \bar{\psi}'_+(u) = \lambda \left(\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y) dF_U(y) \right) \quad (9.2.1)$$

$$\beta \bar{\psi}'_-(u) = \lambda \left(\bar{\psi}(u) - \int_0^{u-0} \bar{\psi}(u-y) dF_U(y) \right), \quad (9.2.2)$$

wobei $F_U(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Risiken U_k ist.

Das obige Ergebnis folgt aus einem ähnlichen Satz über multivariate Ruinfunktionen

$$\varphi(u, x, y) = P(\tau(u) < \infty, X^+(u) > x, Y^+(u) > y),$$

falls $x, y \rightarrow +0$, da $\lim_{x, y \rightarrow +0} \varphi(u, x, y) = \psi(u)$.

Satz 9.2.2. Die Funktion $\varphi(u, x, y)$ ist eine stetige und von links nach rechts in bezug auf u differenzierbare Funktion. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} & \beta \frac{\partial^+}{\partial u} \varphi(u, x, y) & (9.2.3) \\ & = \lambda \left(\varphi(u, x, y) - \int_0^u \varphi(u-v, x, y) dF_U(v) - \mathbf{1}(u \geq x) \bar{F}(u+y) \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \beta \frac{\partial^-}{\partial u} \varphi(u, x, y) & (9.2.4) \\ & = \lambda \left(\varphi(u, x, y) - \int_0^{u^-} \varphi(u-v, x, y) dF_U(v) - \mathbf{1}(u > x) \bar{F}((u+y)^-) \right) \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [20], S. 167-168. \square

Tatsächlich können wir zeigen, dass aus (9.2.3) (9.2.1) folgt. Unter der Annahme, dass $\varphi(u, x, y) \rightarrow \psi(u)$ für $x, y \rightarrow +0$ gleichmäßig in u konvergiert, erhalten wir aus (9.2.3):

$$\begin{aligned} & \beta \frac{\partial^+ \psi(u)}{\partial u} \\ & = \lambda \left(\psi(u) - \int_0^u \psi(u-v) dF_U(v) - \mathbf{1}(u \geq 0) \bar{F}_U(u) \right) \end{aligned}$$

und da

$$\beta \frac{\partial^+ \psi(u)}{\partial u} = -\beta \frac{\partial^+ \psi(u)}{\partial u}$$

ist, folgt insgesamt

$$\begin{aligned} & -\beta \frac{\partial^+ \psi(u)}{\partial u} \\ & = \lambda \left(-\bar{\psi}(u) + \int_0^u \bar{\psi}(u-v) dF_U(v) - \int_0^u dF_U(v) - \bar{F}_U(u) \right) \\ & = -\lambda \left(\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-v) dF_U(v) - F_U(v) + F_U(v) \right) \end{aligned}$$

Hiermit ist (9.2.1) bewiesen. Der Beweis von (9.2.4) nach (9.2.2) verläuft analog.

Beispiel 9.2.1. Sei $U_k \sim \text{Exp}(\delta)$. Dann nimmt die Nettogewinn-Bedingung (9.1.5) die Form $\lambda < \delta\beta$ an. In diesem Spezialfall kann (9.2.1) analytisch gelöst werden. Tatsächlich gilt $\bar{\psi}(u) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ und

$$\beta \bar{\psi}'(u) = \lambda \left(\bar{\psi}(u) - e^{-\delta u} \int_0^u \bar{\psi}(t) \delta e^{\delta t} dt \right), \quad (9.2.5)$$

wobei in dieser Gleichung ein Wechsel der Variablen $t = u - y$ in (9.2.1) stattgefunden hat. Die letzte Gleichung zeigt, dass $\bar{\psi} \in C^2(\mathbb{R}_+)$ und

$$\begin{aligned} \beta \bar{\psi}''(u) &= \lambda \left(\bar{\psi}'(u) + \delta e^{-\delta u} \int_0^u \bar{\psi}(t) \delta e^{\delta t} dt - e^{-\delta u} \bar{\psi}(u) \delta e^{\delta u} \right) \\ &= \lambda \left(\bar{\psi}'(u) - \delta \left(\bar{\psi}(u) - e^{-\delta u} \int_0^u \bar{\psi}(t) \delta e^{\delta t} dt \right) \right) \\ &= \lambda \left(1 - \frac{\delta \beta}{\lambda} \right) \bar{\psi}'(u) \\ &= (\lambda - \delta \beta) \bar{\psi}'(u), \end{aligned}$$

da nach (9.2.1)

$$\bar{\psi}(u) - e^{-\delta u} \int_0^u \bar{\psi}(t) \delta e^{\delta t} dt = \frac{\beta}{\lambda} \bar{\psi}'(u)$$

gilt. Somit erhalten wir

$$\bar{\psi}''(u) = \frac{\lambda - \delta \beta}{\beta} \bar{\psi}'(u).$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\bar{\psi}(u) = c_1 + c_2 e^{\frac{\lambda - \delta \beta}{\beta} u}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Da $\bar{\psi}(u) = P(\tau(u) = \infty) = P(M \leq u) \rightarrow 1$ für $u \rightarrow \infty$, erhalten wir, da $\lambda < \delta \beta$, $1 = c_1 + c_2 \cdot 0$ und somit $c_1 = 1$. Wenn wir nun $\bar{\psi}(u)$ für $\bar{\psi}(u) = 1 + c_2 e^{\frac{\lambda - \delta \beta}{\beta} u}$ in (9.2.5) substituieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\beta \cdot c_2 \left(\frac{\lambda - \delta \beta}{\beta} \right) e^{\frac{\lambda - \delta \beta}{\beta} u} \\ &= \lambda \left(1 + c_2 e^{\frac{\lambda - \delta \beta}{\beta} u} - e^{-\delta u} \int_0^u \left(1 + c_2 e^{\frac{\lambda - \delta \beta}{\beta} t} \right) \delta e^{\delta t} dt \right) \\ &= \lambda \left(1 + c_2 e^{\frac{\lambda - \delta \beta}{\beta} u} - \left(1 - e^{-\delta u} \right) - c_2 \frac{\beta}{\lambda} \delta \left(e^{\left(\frac{\lambda}{\beta} - \delta \right) u} - e^{-\delta u} \right) \right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$c_2 \left((\lambda - \delta \beta) e^{\frac{\lambda}{\beta} u - \delta u} - \lambda e^{\left(\frac{\lambda}{\beta} - \delta \right) u} + \lambda \frac{\beta}{\lambda} \delta e^{\left(\frac{\lambda}{\beta} - \delta \right) u} - \lambda \frac{\beta}{\lambda} \delta e^{-\delta u} \right) = \lambda e^{-\delta u}$$

und somit $c_2 = \frac{-\lambda}{\delta \beta}$. Insgesamt erhalten wir

$$\bar{\psi}(u) = 1 - \frac{\lambda}{\delta \beta} e^{-\left(\delta - \frac{\lambda}{\beta} \right) u} \quad \text{und} \quad \psi(u) = \frac{\lambda}{\delta \beta} e^{-\left(\delta - \frac{\lambda}{\beta} \right) u}.$$

Literaturverzeichnis

- [1] ASMUSSEN, S. (2000). *Ruin probabilities*. World Scientific, Singapore.
- [2] BEARD, R. E., PENTIKÄINEN, T. AND PESONEN, E. (1984). *Risk Theory* 3 ed. Chapman & Hall, London.
- [3] BOWERS, N., GERBER, H., HICKMAN, J., JONES, D. AND NESBITT, C. (1986). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Schaumburg.
- [4] DAVYDOV, Y. AND ZITIKIS, R. (2002). Convergence of generalized Lorenz curves based on stationary ergodic random sequences with deterministic noise. *Statist. Probab. Lett.* **59**, 329–340.
- [5] DAYKIN, C. D., PENTIKÄINEN, T. AND PESONEN, M. (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman & Hall, London.
- [6] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C. AND MIKOSCH, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- [7] FARNY, D., HELTEN, E., KOCH, P. AND SCHMIDT, R. (1988). *Handwörterbuch der Versicherung*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- [8] GERBER, H. U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S.S. Huebner Foundation, Wharton School, Philadelphia.
- [9] GNEDENKO, B. W. (1991). *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Akademie Verlag, Berlin.
- [10] GOOVAERTS, M. J., DE VYLDER, F. AND HAEZENDONCK, J. (1984). *Insurance Premiums*. North-Holland, Amsterdam.
- [11] HEILMANN, W. (1987). *Grundbegriffe der Risikotheorie*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- [12] HIPF, C. AND MICHEL, R. (1990). *Risikotheorie: Stochastische Modelle und Methoden*. Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe.

- [13] JACOD, J. AND PROTTER, P. (2003). *Probability essentials*. Springer, Berlin.
- [14] KAAS, R., GOOVAERTS, M., DHAENE, J. AND DENUIT, M. (2001). *Modern actuarial risk theory*. Kluwer, Boston, MA.
- [15] KLUGMAN, S. A. AND PANJER, H. H. AND WILLMOT, G. E. (1998). *Loss models. From data to decisions*. Wiley.
- [16] MACK, T. (2002). *Schadenversicherungsmathematik* 2 ed. vol. 28 of *Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- [17] MIKOSCH, T. (2004). *Non-life insurance mathematics*. Springer.
- [18] MÜLLER, A. AND STOYAN, D. (2002). *Comparison methods for stochastic models and risks*. Wiley.
- [19] RÉNYI, A. (1970). *Probability theory*. North-Holland, Amsterdam.
- [20] ROLSKI, T., SCHMIDLI, H., SCHMIDT, V. AND TEUGELS, J. (1998). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. J. Wiley & Sons, Chichester.
- [21] SCHMIDT, K. D. (1996). *Lectures on Risk Theory*. Teubner-Verlag, Stuttgart.
- [22] SCHWEPCKE, A. (2001). *Rückversicherung. Grundlagen und aktuelles Wissen*. Swiss Re, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
- [23] STRAUB, E. (1988). *Non-Life Insurance Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.
- [24] WOLFSDORF, K. (1988). *Versicherungsmathematik. Teil 2: Theoretische Grundlagen, Risikotheorie, Sachversicherung*. Teubner, Stuttgart.

Index

- λ -Stabilität, 192
 - absolute, 192
 - relative, 192
- Überlebenswahrscheinlichkeit, 220
- Überschaden, 197

- Absgeschnittene Normalverteilung
 - Simulation, 137
- Abweichung
 - erwartete mittlere absolute, 150
 - wahrscheinliche, 150
- Abwicklungsdreieck, 179
- Algorithmus
 - DePril, 104
 - Panjer
 - diskreter, 106
 - stetiger, 118

- Bernoulli-Verteilung
 - Simulation, 130
- Beta-Funktion, 21
- Binomialapproximation
 - zusammengesetzte, 122
- Binomialverteilung
 - Poisson-Approximation, 140
 - Simulation, 140
- Bonus-Malus-System, 57
 - Bonushunger, 174
 - Effizienz, 169
 - Prämie
 - stationäre, 168
 - Verteilung
 - stationäre, 167
 - vollkommen effizientes, 169
- Bruttoprämie, 143
- Burning-Cost-Verfahren, 204

- Chain-Ladder-Verfahren, 183
- Chapman-Kolmogorov-Gleichungen, 53
- Coupling, 90

- Defizit
 - maximaler, 220
 - totaler, maximaler, 220
- Delaporte-Prozess, 45
- Diskrete Verteilungen
 - Simulation
 - Akzeptanz- und Verwerfungsmethode, 138
 - Umkehrmethode, 138
- Dispersionsindex, 38

- Entlastungseffekt, 199, 202
- Erfahrungstarifizierung, 204
- Erneuerungsprozess, 36
- Erstrisiko, 187
- Erstversicherer, 86
- erzeugende Funktion, 43
- Excesskoeffizient, 194
- Exponentialverteilung
 - Simulation, 130
- extinction rate, 17

- Gamma-Verteilung
 - Simulation, 138
- Geburts- und Todesprozess, 67
- Geburtsprozess, 67
- Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung, 37
- Geometrische Verteilung
 - Simulation, 140
 - zusammengesetzte, 84
- Gesamtschaden, 6

- individuelles Modell, 76
 - kollektives Modell, 77
- Gewinnzuschlag, 143
- Gleichverteilung
 - auf $B \subset \mathbb{R}^d$, 132
 - Simulation, 128
- Grenzwertsätze
 - für zusammengesetzte Verteilungen, 149
- Großschadenrückstellung, 177
- Hazard-Funktion, 16
- Hazard-Rate, 16
- IBNER-Schadenreserve, 178
- IBNR-Schadenreserve, 178
- Inkassokosten, 143
- kompatibel, 210
- Kompensationsfunktion, 206
- konkav, 88
- konvex, 88
- Kopplung, 89, 90
- Laplace-Stieltjes-Transformierte, 14
- Laplace-Transformierte, 41
- Markov-Eigenschaft, 55
- Markov-Ketten
 - Übergangswahrscheinlichkeiten, 53
 - Anfangsverteilung, 53
- Markov-Prozess, 54
 - homogener, 54
- Matrizen
 - stochastische, 54
- Matrizen-Übergangsfunktion, 54
- Matrizenintensitätsfunktion, 63
- Methode der mittleren Rest-Hazard-Funktion, 32
- Methode der Quantil-Grafiken, 26
- Modell
 - individuelles, 76
 - kollektives, 77
- momenterzeugende Funktion, 12
- Monte-Carlo-Methoden, *siehe* Simulationsmethoden
- Negativbinomialapproximation
 - zusammengesetzte, 122
- Negative Binomialverteilung
 - Simulation, 140
 - zusammengesetzte, 84
- Nettogewinn-Bedingung, 221
- Nettorisikoprämie, 143
- Normalverteilung
 - Simulation
 - Iterativer Algorithmus, 135
 - Nicht-iterativer Algorithmus, 137
- Nutzenfunktion, 152
- Pareto-Verteilung
 - Simulation, 130
- Pascal-Prozess, 45
- Pascal-Verteilung
 - zusammengesetzte, 84
- Plafond, 190
- Poisson-Modell
 - zusammengesetztes, 37
- Poisson-Prozess, 37
 - gemischter, 41
 - homogener, 44
 - Mischung aus homogenen, 45
- Poisson-Verteilung
 - gemischte, 41
 - Gemischte \sim
 - Simulation, 140
 - Simulation, 139
 - zusammengesetzte, 83
- Poissonapproximation
 - zusammengesetzte, 122
- Polya-Frequenz, 209
- Polya-Prozess, 45, 67
- Portfolio
 - homogenes, 76
- Prämienkalkulationsprinzip, 144
- Prämienkalkulationsprinzipien

- Absolutes Abweichungsprinzip, 150
- Erwartungswertprinzip, 145
- Exponential-Prinzip, 156
- Modifiziertes Varianzprinzip, 150
- Nettoprämienprinzip, 145
- Null-Nutzen-Prinzip, 155
- Prinzip des maximalen Schadens, 146
- Quantil-Prinzip, 147
- Schweizer Prämie, 165
- Standardabweichungsprinzip, 148
- Varianz-Prinzip, 148
- Verlustfunktionen-Prinzip, 166
- Prämienkalkulationsprinzipien
 - Mittelwert-Prinzip, 160
- Priorität, 187
- Projektionssatz, 180
- Proportionalitätsfaktor, 187
- Pseudozufallszahlen, 128
 - Generator, 128
 - Keim, 128
- Quote, 189
- Rückversicherer, 86
- rückversicherter Anteil, 187
- Rückversicherung, 85
 - globale, 206
 - lokale, 206
 - nichtproportionale
 - Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung, 190
 - Jahresüberschaden-Rückversicherung, 190
 - Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung, 190
 - proportionale, 86
 - Quoten-Rückversicherung, 189
 - Summenexzedenten-Rückversicherung, 190
- Rückwärtsgleichungen von Kolmogorov, 66
- Rest-Hazard-Funktion, 29
 - mittlere, 31
- Risiko, 11
 - gefährliches, 11
 - gutartiges, 11
- Risikoprozess
 - zeitdiskreter, 213
 - zeitstetiger, 218
- Risikoreserve, 6, 84
 - zeitdiskrete, 213
- Risikoreserve des Versicherers, 156
- Risikoteilung
 - nichtproportionale, 187
 - Abzugsfranchise, 188
 - Erstrisikodeckung, 189
 - Franchise, 188
 - Integralfranchise, 188
 - Jahrefranchise, 188
 - Jahreslimits, 188
 - proportionale, 187
 - Mitversicherung, 188
 - Prozenttarif, 188
 - Unterversicherung, 188
- Ruinfunktionen
 - multivariate, 219
- Ruinwahrscheinlichkeit
 - zeitdiskrete
 - endlicher Horizont, 214
 - unendlicher Horizont, 214
- Ruinwahrscheinlichkeiten
 - zeitstetige
 - endlicher Horizont, 218
 - unendlicher Horizont, 218
- Ruinzeit
 - zeitdiskrete, 214
 - zeitstetige, 218
- Satz von Efron, 209
- Schadenanzahl, 6
- Schadengrad, 194
- Schadensüberschussprozess
 - zeitdiskreter, 214
 - zeitstetiger, 218
- Schiefe, 193
- Schwankungsrückstellung, 177

- Selbstbehalt, 86, 187
- Selbstbehalt–Niveau, 86
- Selbstbehaltfunktion, 206
- Selbstbehaltfunktion, 86
- Selbstbehaltsgrenze, 187
- Sicherheitszuschlag, 143, 144
- Simulationsmethoden
 - ad hoc Methoden, 139
 - Akzeptanz– und Verwerfungsmethode, 131
 - Markov Chain Monte–Carlo–Methoden, 139
 - Umkehrmethode, 129
- Solvabilität, 84
- Spätschadenrückstellung, 177
- Sparre–Andersen–Modell, 37
- Sterberate, 16
- Sterbewahrscheinlichkeit, 16
- stochastisch kleiner, 88, 208
- Stop–Loss–Ordnung
 - kleiner bzgl., 88
- Stop–Loss–Prämie, 86
- Stop–Loss–Punkt, 191
- Stop–Loss–Versicherung, 86
- Tail
 - schwerer, 14
- technischer Ruin
 - zeitdiskreter, 213
- Totalvariation, 120
- Untergraph, 132
- Update–Funktion, 58
- Variationskoeffizient, 193
- Verlustfunktion, 152, 166
- Verteilung
 - zusammengesetzte, 80
- Verteilung der Ordnungsstatistiken, 96
- Verteilungen mit leichtem Tail, 20
 - χ^2 –Verteilung, 21
 - Beta–Verteilung, 21
 - Erlang–Verteilung, 21
 - Exponentialverteilung, 20
 - Gamma–Verteilung, 21
 - Inverse Gaußsche Verteilung, 22
 - Normalverteilung, 20
- Verteilungen mit schwerem Tail, 22
 - Benktander–Verteilung
 - Typ I, 24
 - Typ II, 24
 - Loggamma–Verteilung, 24
 - Lognormale Verteilung, 23
 - Pareto–Mischung von Exponentialverteilungen, 23
 - Pareto–Verteilung, 23
 - Weibull–Verteilung, 23
- Verwaltungskosten, 143
- Vorwärtsgleichungen von Kolmogorov, 65
- Zählprozess, 35
 - einfacher, 35
- Zeit in den Roten, 220
- Zufällige Irrfahrt, 56
- Zustandsraum, 53
- Zuwächse
 - stationäre, 36
 - unabhängige, 36
- Zweitrisiko, 187
- Zweitversicherer, 85
- Zwischenankunftszeiten, 6