Bildsegmentierung und Computer Vision WS 05/06
Jun.-Prof. Dr. Evgueni Spodarev
Referent: Achim Gegler 5.12.2005

Bildsegmentierung mit Snakes und aktiven Konturen

1 Einführung

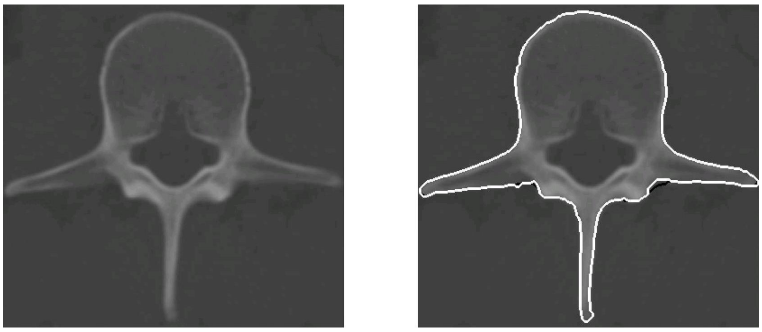

Abbildung 1:

In der **Bildsegmentierung** geht es darum, innerhalb eines Bildes ein bestimmtes **Segment** zu erfassen. Abbildung 1 zeigt beispielsweise eine Computertomographieaufnahme von einem Wirbel. Dessen Umriss wollen wir nun beschreiben. Bei **Snakes** und **aktiven Konturen** erfolgt dies durch eine **explizite Kurve**. Snakes und aktive Konturen bieten außerdem die Möglichkeit **Vorinformationen** miteinzubeziehen. D. h., dass wir in Fig.1 das Wissen über die Gestalt eines Wirbels verwenden können. Die Begriffe Snake und aktive Kontur werden synonym verwendet. Eine **Snake** ist nichts anderes als eine **explizite Parameterdarstellung einer Kurve**. Wir wollen also die Snake finden, die den Umriss des Segments beschreibt.

Um diese Snake zu finden geht man wie folgt vor: Der Snake wird eine **Energie** zugeordnet. Die Energie der Snake berechnet sich aus den **Vorinformationen** und aus dem **Bild**. Je mehr Übereinstimmungen, desto **kleiner** ist die Energie. D. h., die Energie wird kleiner, je besser Snake im Bild liegt (ob sie sich an Kanten befindet) und je mehr sie mit dem Vorwissen übereinstimmt (z .B. aussieht wie ein Wirbel).
Die gesuchte Snake ist nun die **energieminimale Snake**. Wir erhalten also

ein **Minimierungsproblem**.

Die Lösung wird **iterativ** berechnet. Die Snake wird **außerhalb** des Segments initialisiert. Dann hat sie noch eine hohe Energie. Durch Energieminimierung verformt sie sich dann aktiv zum Segment hin. Daher auch der Name aktive Kontur. Der Name Snake lässt sich ebenfalls daraus ableiten: Die Bewegung zum Segment hin erinnert an eine Schlangenbewegung. Abbildung 2 zeigt eine derartige iterative Berechnung.

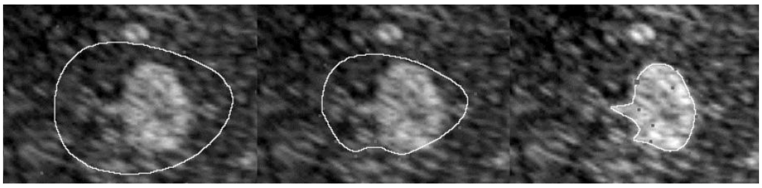

Abbildung 2:

2 Definitionen

2.1 Definition der Snake

Wie bereits erwähnt, wird die Snake als eine **explizite Parameterdarstellung einer Kurve** definiert:

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad mit \quad c(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$$

Wir setzen außerdem voraus, dass die Snake c **zweimal stetig differenzierbar** ist.
Der Snake c wird nun eine Energie E(c) zugeordnet. Diese besteht aus **innerer Energie S(c)** und **äußerer Energie P(c)**. Also

$$E(c) = S(c) + P(c)$$

Die innere Energie ergibt sich aus den Vorinformationen, die äußere Energie aus dem Bild.

2.2 Innere Energie S(c)

Zunächst wollen wir eine Formel für die **innere Energie S(c)** herleiten. Diese berechnet sich aus den **Vorinformationen**. Wir kennen die grobe Gestalt des Segments, das wir erfassen wollen. D. h., wir wissen insbesondere etwas über dessen **Kantenlänge** und **Kantenglätte** und damit etwas über das Verhältnis dieser beiden Größen. Wir wissen, ob wir beispielsweise einen glatten Kreis segmentieren wollen oder ein unglattes Objekt mit vielen Krümmungen.

Nun wollen wir diese beiden Größen (Länge und Glätte) in unsere Snake einbauen. Hierzu sind einige Resultate aus der Differenzialgeometrie notwendig: Über die **erste Ableitung** $\frac{\partial c}{\partial s}$ können wir die **Länge** der Kurve berechnen. Die **zweite Ableitung** $\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}$ gibt gerade die **Krümmung** an.

Also erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$c\ lang \Rightarrow \int_0^1 |\frac{\partial c}{\partial s}|^2 \, \mathrm{d}s\ groß, \qquad c\ unglatt \Rightarrow \int_0^1 |\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}|^2 \, \mathrm{d}s\ groß$$

Nun **gewichten** wir in unserer Snake die Länge mit $\omega_1 \geq 0$ und die Krümmungen mit $\omega_2 \geq 0$. Diese Gewichte wählen wir **entsprechend den Vorinformationen**. Also $\omega_1 < \omega_2$ für sehr glatte Segmente und $\omega_1 > \omega_2$ für Segmente mit starken Krümmungen.

Als Term für die **innere Energie** definieren wir nun:

$$S(c) := \frac{1}{2} \int_0^1 \ \omega_1 \, |\frac{\partial c}{\partial s}|^2 + \omega_2 \, |\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}|^2 \ \ \mathrm{d}s$$

S(c) wird **klein**, wenn die Snake gut zu der bekannten Gestalt des zu findenden Segments passt.

2.3 Äußere Energie P(c)

Die **äußere Energie** berechnet sich aus dem Bild. Ein Bild ist gegeben durch den **Grauwert** der einzelnen Pixel. Mathematisch ausgedrückt ist das Bild somit eine Funktion

$$(x, y) \mapsto I(x, y), \qquad mit\ I(x, y) = Grauwert\ an\ der\ Stelle\ (x, y)$$

Wir setzen voraus, dass **I(x,y) stetig differenzierbar** ist.

Das Bildsegment grenzt sich an den **Kanten** von der Umgebung ab. Mathematisch sind Kanten Stellen, an denen große **Veränderungen** des Grauwerts auftreten.
Veränderungen werden bekanntlich durch die **erste Ableitung** beschrieben. Deshalb betrachten wir: $\nabla I(x, y)$
Interessant sind für uns Stellen, an denen $|\nabla I(x, y)|$ **möglichst groß** wird. Da wir die Energie minimieren wollen, sollte diese an den Kanten **möglichst klein** sein. Deshalb machen wir den Term **negativ**. Außerdem führen wir noch eine **Gewichtung** $\omega_3 \geq 0$ der äußeren Energie ein. Somit erhalten wir:

$$P(x, y) := -\omega_3 |\nabla I(x, y)|$$

Damit können wir die äußere Energie wie folgt definieren:

$$P(c) := \int_0^1 P(c(s))\,\mathrm{d}s$$

Dieser Term wird **klein**, wenn die Kontur der Snake mit den Kanten im Bild übereinstimmt.

3 Bestimmung der Lösung

3.1 Statisches Optimierungsproblem

Zusammengefasst gilt also für den Energieterm:

$$E(c) = \frac{1}{2}\int_0^1 \ \omega_1\,|\frac{\partial c}{\partial s}|^2 + \omega_2\,|\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}|^2 \ \ \mathrm{d}s + \int_0^1 P(c(s))\,\mathrm{d}s$$

Diesen Term wollen wir **minimieren**. Wir haben also ein **Optimierungsproblem**:

$$E(c) \ \longrightarrow \ min$$

Wir wollen also ein Funktional minimieren. Die Techniken hierzu stellt uns die **Variationsrechnung** zur Verfügung.

Ein allgemeines Variationsproblem hat die folgende Gestalt:

$$\int_0^1 F(s, c(s), \frac{\partial c(s)}{\partial s}, \frac{\partial^2 c(s)}{\partial s^2})\,\mathrm{d}s \longrightarrow min$$

Ein **notwendiges Kriterium** für ein Minimum ist nun die s. g. **Euler-Lagrange Gleichung**:

$$F_c - \frac{\partial}{\partial s}F_{c'} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}F_{c''} = 0$$

Wenn wir nun unseren Energieterm in das Variationsproblem einsetzen, nimmt die Euler-Lagrange Gleichung die folgende Gestalt an:

$$-\frac{\partial}{\partial s}\,(\omega_1\,\frac{\partial c}{\partial s}) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\,(\omega_2\,\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}) + \nabla P(c(s)) = 0$$

Dies ist ein rein theoretisches Ergebnis. Für die konkrete Berechnung bringt es uns nichts, da die Gleichung nur eine notwendige Bedingung darstellt und sich außerdem auch nicht auflösen lässt.

3.2 Praktische iterative Berechnung

Wenn wir nun die Lösung numerisch berechnen wollen, so müssen wir zunächst die Snake c **diskretisieren**. Dazu wird diese durch **Interpolation** (z. B. durch finite Differenzen) beschrieben. Es genügt $n < \infty$ Knoten $c_0, ..., c_{n-1}$ abzuspeichern. Die Ableitungen $\frac{\partial c_i}{\partial s}$ und $\frac{\partial^2 c_i}{\partial s^2}$ werden auch numerisch über die Knoten berechnet. Für den Energieterm betrachten wir nur die Energie an den Knoten und erhalten somit:

$$E^*(c) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(\omega_1 \, |\frac{\partial c_i}{\partial s}|^2 + \omega_2 \, |\frac{\partial^2 c_i}{\partial s^2}|^2) + P(c_i(s))$$

Auch das Bild muss diskretisiert werden. Dazu wird darüber ein **Gitter** gelegt. Die Knoten können sich nur noch auf den Gitterpunkten bewegen.

Zur iterativen Berechnung der Snake geht man nun wie folgt vor: Zunächst wird die Snake **außerhalb** des Segments initialisiert (durch Festlegen der Knoten). Ein einzelner Knoten kann sich nun auf alle 8 benachbarten Gitterpunkte bewegen, oder unverändert bleiben Für die gesamte Snake gibt es somit 9^n Bewegungsmöglichkeiten. Nun könnte man für alle diese Bewegungsmölichkeiten die neue Energie der Snake berechnen. Für einen Iterationsschritt wählt man nun die Bewegung, für die E*(c_{neu}) minimal wird. Wir sind fertig, wenn die Snake sich nach einem Schritt nicht verändert hat.
Natürlich gibt hierfür auch effiziente Verfahren, wie z. B. dynamische Programmierung oder Greedyalgorithmus.

4 Vor- und Nachteile von Snakes

4.1 Vorteile

Ein klarer Vorteil von Snakes ist es, dass wir Vorwissen berücksichtigen können. Außerdem gibt es **effiziente Verfahren** zur Berechnung. Snakes sind deshalb ein sehr häufig eingesetztes Verfahren
Dadurch, dass Snakes schon bei Beginn der Initialisierung eine Kurve darstellen, haben sie keine Probleme **Lücken** im Bild zu überbrücken. Auch in **verrauschten Bildern** sind Snakes sehr gut einsetzbar.

4.2 Nachteile

Ein großer Nachteil von Snakes ist, dass sie nicht in der Lage sind mit **topologischen Veränderungen** umzugehen. Eine Snake ist z. B. nicht in der Lage sich aufzuteilen, wenn das Segment aus zwei Teilen besteht. Hier gibt es eine Erweiterung, die s. g. **T-Snakes**. (Topologisch-adaptierte Snakes)
Im Zweidimensionalen sind Snakes recht gut einsetzbar. In **höheren Dimensionen** ändert sich dies aber, da sie einen **erheblichen Rechenaufwand** erfordern.

Problematisch ist auch die **Initialisierung der Snake**. Diese konvergiert nämlich gegen das nächste lokale Minimum. D. h., dass die Initialisierung sehr nahe am Segment erfolgen muss.

5 Literatur

- S. Osher, R. Fedkiw: Level set methods and dynamic implicit surfaces, Springer, 2003.

- S. Osher, N. Paragios, eds: Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics, Springer, 2003.

- Internet

- Analysis 1/2 Skript, Prof. Stadtmüller